

# 含裂纹齿轮系统混沌运动的 ELM 智能优化 控制策略<sup>\*</sup>

卫晓娟<sup>1†</sup> 翟英栋<sup>1</sup> 李小齐<sup>1</sup> 李宁洲<sup>1</sup> 姬毓君<sup>2</sup> 丁旺才<sup>3</sup>

(1. 上海应用技术大学 轨道交通学院, 上海 201418)

(2. 中国铁路西安局集团有限公司西安动车段, 西安 710018)

(3. 兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

**摘要** 针对含裂纹齿轮传动系统的混沌动力学进行了分析,提出了一种混沌控制策略.首先建立含裂纹三自由度齿轮系统模型,分析裂纹演变对啮合刚度的影响,进而分析了参数 $\omega$ - $\xi$ 耦合作用下系统动力学响应的变化规律,并画出系统参数平面上的运动分布图、位移幅值云图等,分析获取了混沌运动的参数分析判据,同时通过多初值分岔图探究吸引子共存的规律.其次针对部分参数区间混沌发生的区域,基于极限学习机(extreme learning machine, ELM)设计混沌控制器,构建了控制性能指标函数,利用混沌控制器输出微小扰动施加于系统的可控参数 $\omega$ 和 $\xi$ ,将混沌运动控制为预期的周期运动,同时将基于精英选择策略的黏菌优化算法(elite selection strategy slime mould algorithm, ESMA)与 ELM 相结合,优化混沌控制器的参数.然后依据吸引子共存规律,通过力反馈控制,将系统稳定到位移幅值更小的周期轨道.最后通过仿真验证了所提出控制策略的有效性.

**关键词** 齿轮系统, 混沌控制, 多稳态动力学, 极限学习机, 精英选择策略的黏菌优化算法

**中图分类号**: O322; TH113.1; TP183

**文献标志码**: A

## Intelligent Optimal Control Strategy of ELM for Chaotic Motion of Cracked Gear System<sup>\*</sup>

Wei Xiaojuan<sup>1†</sup> Zhai Yingdong<sup>1</sup> Li Xiaoqi<sup>1</sup> Li Ningzhou<sup>1</sup> Ji Yujun<sup>2</sup> Ding Wangcai<sup>3</sup>

(1. School of Railway Transportation, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 201418, China)

(2. Xi'an Multiple Unit Depot, China Railway Xi'an Bureau Group Co., Ltd., Xi'an 710018, China)

(3. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract** The chaotic dynamics of a crack-containing gear transmission system were analyzed, and a chaotic control strategy was proposed. Firstly, a model of a crack-containing three-degree-of-freedom gear system was established to analyze the effect of crack evolution on meshing stiffness. Subsequently, the change rule of the system dynamics response under the action of parameter  $\omega$ - $\xi$  coupling was analyzed. The distribution map of motion on the parameter plane of the system, the displacement amplitude cloud map, and so on were drawn. The correlation between chaotic motions and specific parameter conditions of the system and the characteristics of their manifestation were analyzed. Secondly, the law of the coexistence of attractors was investigated through the multi-primary-value bifurcation map. Aiming

2024-12-02 收到第 1 稿, 2025-01-24 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(51665027), 甘肃省自然科学基金资助项目(20JR5RA406), 甘肃省青年科技基金计划资助项目(21JR7RA328), 上海应用技术大学协同创新基金资助项目(XTCX2023-20), National Natural Science Foundation of China(51665027), Natural Science Foundation of Gansu Province Funded(20JR5RA406), Projects Youth Science and Technology Fund program of Gansu Province(21JR7RA328), Collaborative Innovation Fund of Shanghai Institute of Technology(XTCX2023-20).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: 532201669@qq.com

at the region where chaos occurred in some parameter intervals, a chaotic controller was designed based on extreme learning machine (ELM). A control performance index function was constructed to control the chaotic motion into the expected periodic motion by using the output of the chaotic controller to output tiny perturbations applied to the controllable parameters  $\omega$  and  $\xi$  of the system. Meanwhile, the elite selection strategy slime mould algorithm (ESMA) was combined with ELM to optimize the parameters of the chaotic controller. Additionally, based on the attractor coexistence law, the system was stabilized to a periodic orbit with a smaller displacement amplitude by force feedback control. Finally, the effectiveness of the proposed control strategy was ultimately verified by simulation.

**Key words** gear systems, chaotic control, multistable dynamics, extreme learning machine, elite selection strategy slime mould algorithm

引言

齿轮传动系统具备传动精准、效率高且工作可靠等诸多优势,广泛应用于机械、航空、轨道交通等领域<sup>[1,2]</sup>. 在齿轮传动过程中,齿根区域因受到周期性的接触力作用而产生交替应力,这可能导致疲劳裂纹的形成. 随着裂纹的逐渐扩展,可能会导致齿轮断裂等严重故障<sup>[3,4]</sup>. 研究者们针对齿轮裂纹故障做了大量研究,建立了精确的含裂纹故障的齿轮模型,并分析了系统的振动特性<sup>[5-8]</sup>. 作为重要传力部件,齿轮系统在服役过程中的动力学性能,对于确保机械设备平稳运行至关重要,若出现混沌振动,将导致齿轮传动稳定性变差<sup>[9,10]</sup>,出现潜在故障的风险增大,故研究者对齿轮系统动力学分析引起了关注. Huang 等<sup>[11]</sup>建立了具有分形间隙的齿轮系统动力学模型,比较了具有固定间隙和分形间隙系统的分岔和混沌现象. 王靖岳<sup>[12]</sup>等建立了行星齿轮系统动力学模型,并求解分析了激励频率对系统的影响. 王宗禄等<sup>[13]</sup>通过构造参数平面内不同运动区域的边界线算法,得到系统在参数平面内的分岔曲线,并对系统的全局动力学特性进行研究.

混沌运动作为非线性系统的一种特有现象,它的出现可能引起不规则振动,使齿轮无法正常工作,甚至造成安全事故<sup>[14]</sup>. 因此,针对齿轮系统的混沌控制具有重要意义. 目前,对混沌所采用的主要控制方法有 Ott-Grebogi-Yorke(OGY)法、自适应控制法、参数摄动法等<sup>[15-17]</sup>. 张文等<sup>[18]</sup>采用 OGY 法实现了单自由度齿轮的混沌控制. Arian 等<sup>[19]</sup>针对带惰轮的齿轮传动系统,采用滑模和自适应滑模控制策略,实现了系统的混沌控制. Sheng

等<sup>[20]</sup>以采煤机为例,使用基于比例积分(PI)的方法实现了混沌的控制.

齿轮系统丰富复杂的运动性态往往是多参数耦合作用的综合结果,不同参数之间具有非线性的耦合关系,目前针对含裂纹情况下的齿轮系统的双参协同控制,还未见文献公开报道,且关于参数与初态的优化匹配问题也较为鲜见. 为丰富齿轮系统混沌的控制理论,减轻齿轮运行的不良振动,本文对齿轮系统的混沌动力学进行了分析,并提出了一种混沌控制器. 建立了含裂纹齿轮系统的动力学模型,找到了混沌发生的区域,基于 ELM 设计混沌控制器,同时提出了 ESMA 算法对控制器参数进行优化,实现混沌运动向预期周期运动的传递,最后通过力反馈控制,将系统转迁至振幅更小的周期轨道,并通过数值仿真验证了控制方法的有效性.

1 含裂纹齿轮系统动力学建模

1.1 含裂纹齿轮副建模及刚度影响机理分析

为建立更符合实际的裂纹模型<sup>[8]</sup>,本文建立同时沿齿宽与轮齿中心方向扩展的齿根裂纹扩展方向及形状示意图,如图 1 所示, $\alpha_c$ 、 $q_c$ 、 $b_c$  分别表示裂纹扩展角、裂纹深度以及裂纹宽度, $L$  为齿宽.

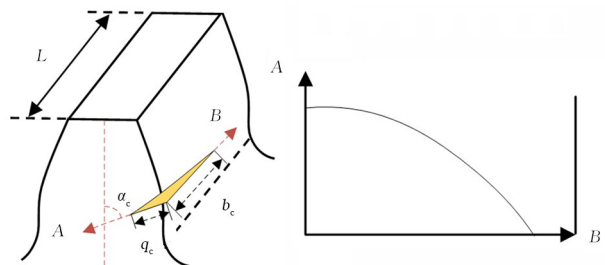


图 1 齿轮副裂纹模型  
Fig. 1 Crack model of gear pair

本文在团队研究基础上,采用文献[21]所提出的方法,计算含裂纹齿轮副时变啮合刚度. 为了研究不同裂纹参数对时变啮合刚度的影响,采用如表1所示的齿轮传动系统基本参数. 随裂纹参数变化下的时变啮合刚度瀑布图如图2所示. 图2展现了在 $b_c=0.6$ 的条件下,不同裂纹深度( $q_c=0.8、1.6、2.4、3.2$ )和裂纹扩展角( $\alpha_c=30、45、60、70$ )下

表 1 齿轮几何参数  
Table 1 Gear geometry parameters

Pinion (gear wheel)	Modulus $m/mm$	Number of teeth $z$	Tooth width $L/mm$	Pressure angle $\alpha/(^{\circ})$	Headspace coefficient $c^*$	Top of tooth height factor $ha^*$
Main gear 1	3	40	25	20	1	0.25
Slave gear 2	3	40	25	20	1	0.25

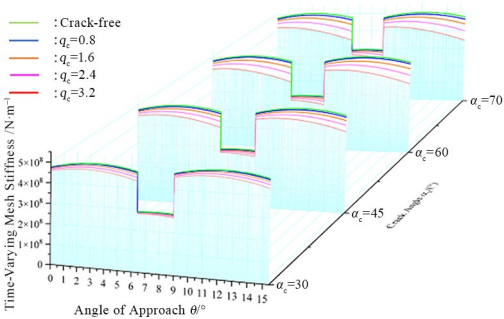


图 2 随裂纹参数变化的刚度瀑布图

Fig. 2 Stiffness waterfall chart with variation of crack parameters

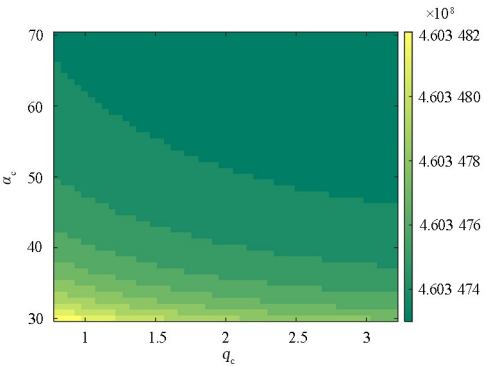


图 3  $q_c-\alpha_c$  变化下的刚度幅值云图

Fig. 3 Stiffness amplitude cloud for variation of  $q_c-\alpha_c$

1.2 含裂纹齿轮传动系统动力学模型及状态方程

为了探究含裂纹情况下齿轮系统混沌运动机理,以文献[13]中建立的三自由度直齿圆柱齿轮传动系统为研究对象,在此基础上引入上述裂纹模型,建立如图4所示的含裂纹齿轮系统动力学模型,图中,齿轮1、2分别为主、从动齿轮; $T_i$  ( $i=1, 2$ )表示作用在主、从动齿轮上的转矩; $y_i、\theta_i、m_i、I_i、R_i、c_{bi}、k_{bi}、f_{bi}、F_{bi}$  ( $i=1, 2$ )分别表示主从动轮在竖直方向上的位移、扭转角位移、质量、惯性矩、

的时变啮合刚度曲线,结果表明,裂纹深度和扩展角的增加导致系统裂纹的严重程度加剧,相应地,时变啮合刚度呈现下降趋势. 图3展示了系统在参数 $q_c$ 和 $\alpha_c$ 变化时,周期性平均啮合刚度的云图,由图可知,随着裂纹长度和扩展角的增大,系统的刚度呈现出逐渐减小的趋势.

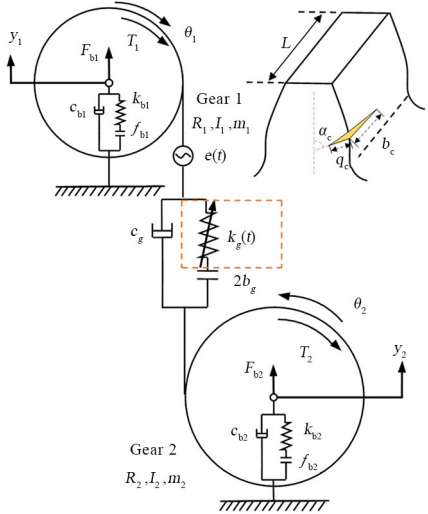


图 4 含裂纹三自由度齿轮系统动力学模型

Fig. 4 Dynamic model of crack-containing gear system

基圆半径以及主从动轴上轴承支撑的阻尼、平均刚度、轴承间隙函数和对齿轮的支撑力; $c_g、b_g、e(t)、k_g(t)、L$ 分别表示啮合阻尼、轮齿间隙、静态传递误差、时变啮合刚度以及齿宽,系统量纲一化状态方程如式(1)所示:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \eta F'_{b1} - 2\sqrt{\eta}\xi_{11}x_2 - 2\xi_{13}x_6 - k_{11}f_{b1}(x_1) - k_{13}(\tau)f_g(x_5) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \eta F'_{b2} - 2\sqrt{\eta}\xi_{22}x_4 + 2\xi_{23}x_6 - k_{22}f_{b2}(x_3) + k_{23}(\tau)f_g(x_5) \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = \eta F'_a + \eta F'_a \omega^2 \cos(\omega\tau) + \dot{x}_2 - \dot{x}_4 - 2\sqrt{\eta}\xi_{33}x_6 - k_{33}(\tau)f_g(x_5) \end{cases} \quad (1)$$

式(1)中,  $x_1, x_3, x_5$  和  $x_2, x_4, x_6$  分别表示主、从动齿轮与齿轮传动相对扭转的无量纲位移和速度,  $x_1 = y_1/b, x_3 = y_2/b, x_5 = y_g/b$ , 其中  $b$  为标称尺寸,  $y_g = \theta_1 R_1 - \theta_2 R_2 + y_1 - y_2 - e(t)$  为齿轮啮合线上的动态传递误差;  $\eta$  为裂纹程度表征系数, 且  $\eta = k'_{\text{gav}}/k_{\text{gav}}$  ( $k_{\text{gav}}, k'_{\text{gav}}$  分别为进入啮合时和无裂纹时的平均啮合刚度);  $\tau = \omega_n t$  为无量纲时间,  $\omega_n = \sqrt{k_{\text{gav}}/m_g}$  为系统固有频率,  $m_g$  表示齿轮副的等效质量;  $\omega$  为无量纲啮合频率, 且  $\omega = \omega'/\omega_n$ ,  $\omega'$  为啮合频率,  $F'_{b1}, F'_{b2}, F'_m, F'_a$  分别为主、从动齿轮无量纲轴承支撑力, 切向平均作用力及齿轮综合误差幅值. 式中其他无量纲参数为:  $\bar{b}_g = b_g/b, \bar{b}_i = b_i/b$  ( $i=1,2$ );  $\xi_{11} = c_{b1}/(2m_1\omega_n), \xi_{22} = c_{b2}/(2m_2\omega_n), \xi = c_g/(2m_g\omega_n), \xi_{13} = c_g/(2m_1\omega_n), \xi_{23} = c_g/(2m_2\omega_n); \bar{k}_g(t) = k_g(t)/b, k_{11} = \omega_1^2/\omega_n^2, k_{22} = \omega_2^2/\omega_n^2, k_{33} = k_g(t)/k_{\text{gav}} = 1 - k \cos(\omega\tau)$ , 其中  $k$  为无量纲啮合刚度,  $k_{13} = k_{23} = k_{33}/4; f_g(x_5), f_{bi}(x_i)$  为间隙非线性函数:

$$f_g(x_5) = \begin{cases} x_5 - \bar{b}_g, & x_5 > \bar{b}_g \\ 0, & x_5 \leq \bar{b}_g \\ x_5 + \bar{b}_g, & x_5 < -\bar{b}_g \end{cases} \quad (2)$$

$$f_{bi}(x_i) = \begin{cases} x_i - B_i, & x_i > B_i \\ 0, & x_i \leq B_i \quad (i=1,3) \\ x_i + B_i, & x_i < -B_i \end{cases} \quad (3)$$

其中  $B_i$  为无量纲轴承游隙.

## 2 含裂纹齿轮系统动力学特性分析

为探究图 4 所示系统混沌运动形成机理, 取 Poincaré 截面为:  $\sum = \{(x_1, \dot{x}_1, x_3, \dot{x}_3, x_5, \dot{x}_5, \theta) \in \mathbf{R}^6 \times \mathbf{S}, \theta = nT\}$ , 激励周期  $T = 2\pi/\omega$ . 选取参数  $\dot{F}_b = 0.1, \dot{F}_a = 0.05, \bar{b}_g = 1.0, B_i = 0.6, c_{11} = 0.01, c_{22} = 0.01, c_{13} = 0.025, c_{23} = 0.025, k_{11} = 1.3, k_{22} = 1.3, k = 0.1, \dot{F}_{b1} = 0.1, \dot{F}_{b2} = 0.2$ , 初始条件  $x_i = 0 (i=1,2,3,4,5,6)$ , 探究系统关键参数对动力学特性的影响.

### 2.1 裂纹程度表征系数 $\eta$ 的影响

为深刻揭示齿轮系统的动力学演化规律, 选取上述基本参数, 探究  $\omega = 2.615, \xi = 0.1$  时, 随  $\eta$  变

化时系统混沌运动的形成机理, 图 5 和图 6 为齿轮系统随  $\eta$  变化的分岔图以及最大 Lyapunov 指数图 (top Lyapunov exponents, TLE). 定义 PD、IPD、HF 以及 SN 分别表示周期倍化分岔、逆周期倍化分岔、Hopf 分岔和鞍结分岔. 由图可知随着  $\eta$  的增加, 系统在  $\eta = 1.082$  处由周期 2 经 PD 进入周期 4 运动, 此时  $\text{TLE} < 0$ , 在分岔点处近似等于 0, 然后在  $\eta = 1.968$  处系统经 HF 进入概周期运动, 在概周期期间,  $\text{TLE}$  持续等于 0, 之后系统经过一段短暂的周期窗口后, 最终进入混沌运动. 综合分析可知, 随着  $\eta$  增大, 系统的动力学行为趋于复杂, 最终进入混沌运动. 这是因为随着裂纹程度的加剧, 齿轮运转不平稳、产生异常振动或噪声, 降低了齿轮的正常工作性能.

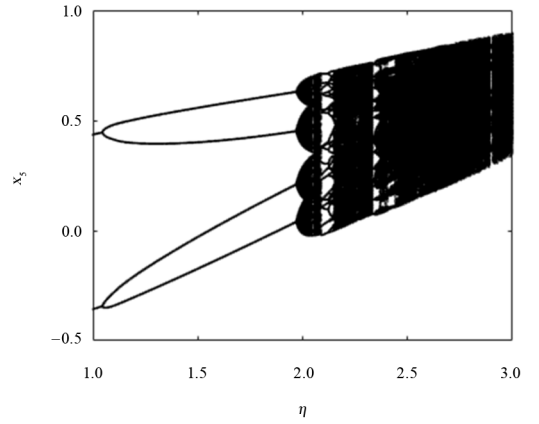


图 5 随  $\eta$  变化的分岔图  
Fig. 5 Bifurcation diagram with  $\eta$

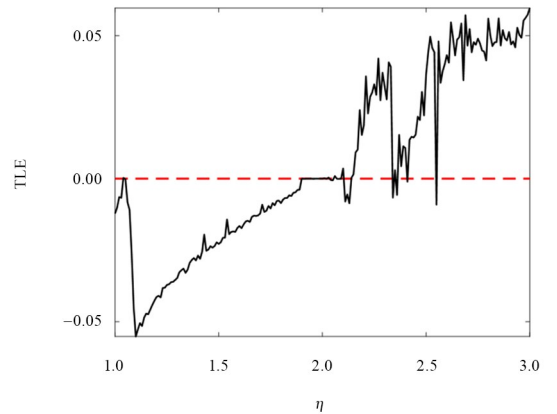


图 6 随  $\eta$  变化的 TLE 图  
Fig. 6 TLE varying with  $\eta$

### 2.2 参数平面 $\omega$ - $\xi$ 内的动力学特性

现有的研究中, 通常只考虑单一参数变化对系统动力学特性的影响, 然而, 动力学参数之间实际上存在着复杂的耦合作用, 本节选取  $\omega$  与  $\xi$  为研究



对象,考虑在轻微裂纹情况下( $\alpha_c$ 、 $q_c$ 、 $b_c$  分别为 0.8、0.6 以及  $30^\circ$ ,  $\eta=1.0498$ ),啮合频率  $\omega$  与阻尼  $\xi$  同时变化时,系统在  $\omega$ - $\xi$  参数平面上的动力学特性. 系统在  $\omega$ - $\xi$  参数平面内的运动分布图及 TLE 图如图 7、图 8 所示,图中不同周期用不同颜色表示,绿色区域代表周期 1 运动(P1),蓝色代表周期 2(P2),黄色代表周期 4(P4),深蓝色代表周期 8(P8),紫色表示周期 16(P16),红色代表混沌(Chaos),粉色表示概周期(H),TLE 图中绿色、蓝色、与黄色分别对应于 TLE 小于 0、等于 0 以及大于 0 的情况.

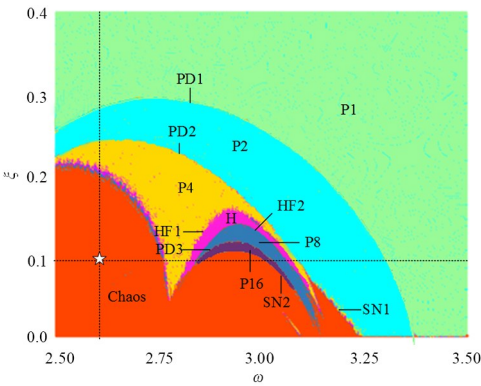


图 7  $\omega$ - $\xi$  平面运动分布图  
Fig. 7  $\omega$ - $\xi$  Plane motion distributions

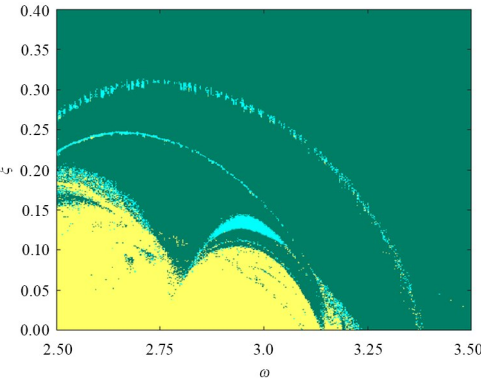


图 8  $\omega$ - $\xi$  平面 TLE 图  
Fig. 8  $\omega$ - $\xi$  plane TLE plot

从双参分岔图可以看出系统运动分布情况,由图可见,参数平面的右上角为 P1,随着参数  $\omega$  以及  $\xi$  的减小,系统先经 PD1 由 P1 进入 P2,随参数的变化,在 P2 边界,系统经 PD2 进入 P4,在部分参数区间,系统经 SN1 进入 Chaos,随着参数的减小,在  $\omega=3$  附近,系统先经 HF1 进入 H,随后经 HF2 进入 P8,再经 PD3 进入 P16,最后经 SN2 进入 Chaos. 为定量分析系统运动的过渡规律,选取与分析 Poincare 截面相同的参数来计算 TLE. 对于较大的  $\xi$  值,系统无论  $\xi$  取何值,始终维持周期运动

状态,此时 TLE 值小于 0,表明系统表现出稳定的周期性运动, $\xi$  的变化对系统的运动状态影响较小. 相反,当  $\xi$  较小时,随着频率  $\omega$  的降低,系统在大部分区域会从低周期运动转变为高周期或混沌、概周期运动,此时 TLE 值非负,系统开始表现出无序的混沌运动特征. 总体来说,在该参数平面内,系统运动状态会随  $\xi$  与  $\omega$  的减小逐渐失稳,因此在工程中应避免此类参数.

图 9 和图 10 为系统在  $\omega$ - $\xi$  参数平面内的最大扭转位移以及 TLE 幅值云图,其能综合反映  $\omega$  与  $\xi$  对系统振动幅值的耦合影响,由图可知,随着  $\omega$  与  $\xi$  的减小,系统的振幅逐渐增大,对应的 TLE 幅值也变大,系统的混沌程度更高,从图中也可以看出系统幅值在参数区域的分布规律,在实际参数选取中应尽量避免幅值较大的参数.

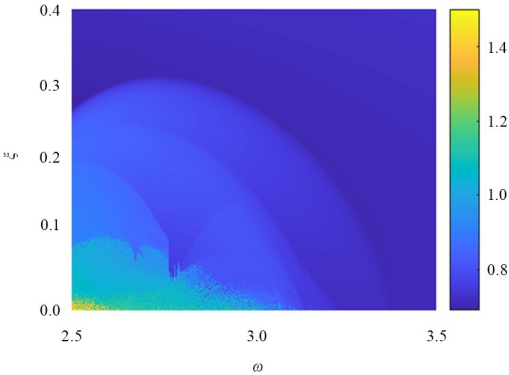


图 9  $\omega$ - $\xi$  平面上最大扭转位移幅值云图  
Fig. 9 Cloud map of maximum torsional displacement amplitude on the  $\omega$ - $\xi$  plane

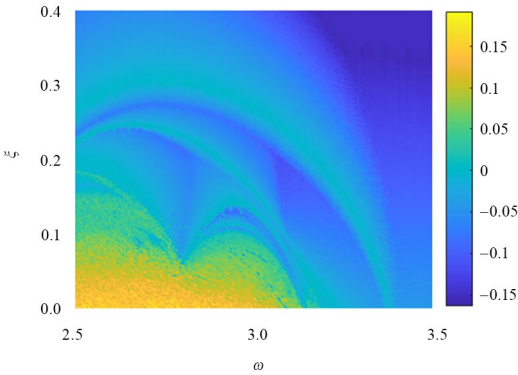


图 10  $\omega$ - $\xi$  平面上 TLE 幅值云图  
Fig. 10 Cloud view of TLE amplitude in the  $\omega$ - $\xi$  plane

2.3 系统随  $\omega$  变化的多稳态动力学

多初值分岔图研究有助于理解系统行为对初始条件的敏感性,这对于设计更为可靠的齿轮传动系统至关重要. 为揭示系统的全局分岔特性,选取  $\xi=0.1$ ,  $\eta=1.0489$ ,分别以  $\omega$  增大和减小两种方式

计算得到系统随  $\omega$  变化时的分岔情况,其多初值分岔图和 TLE 图如图 11、图 12 所示,图中用不同的颜色表示共存的不同吸引子或分岔分支. 由图可知,随着  $\omega$  增加(图中橙色图像),当  $\omega \in [2.5, 2.779]$  之间时,系统为混沌运动,当  $\omega$  增加至 2.779 时,系统经 SN 进入周期 4 运动,随着  $\omega$  增加,在  $\omega = 2.867$  时,系统经 HF 进入概周期运动,此时  $TLE = 0$ ,当  $\omega$  增加至 2.951 时,系统经 HF 进入周期 16 运动,随后在  $\omega = 3.105$ 、3.114、3.092 时分别经 IPD 进入周期 8、周期 4 以及周期 2 运动,最后在  $\omega = 3.295$  处经 IPD 退化为周期 1 运动,此后  $TLE < 0$ . 随着  $\omega$  减小时(图中蓝色图像),当  $\omega > 3.012$  时系统为稳定的周期 1 运动,随着  $\omega$  减小至 3.012,系统经 PD 进入周期 2 运动,随后在  $\omega = 2.915$  处经 PD 进入周期 4 运动,最后在  $\omega = 2.779$  时经 SN 走向混沌. 通过对比可以看出,由于初值的不同,在部分参数区间内系统的分岔特性并不相同,出现了吸引子共存的现象.

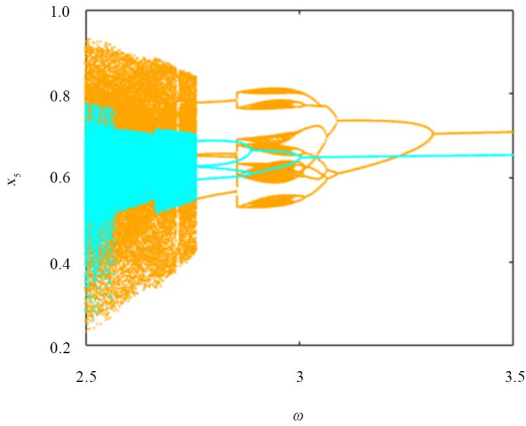


图 11 随  $\omega$  变化的多初值分岔图  
Fig. 11 Multi-initial bifurcation plot with  $\omega$

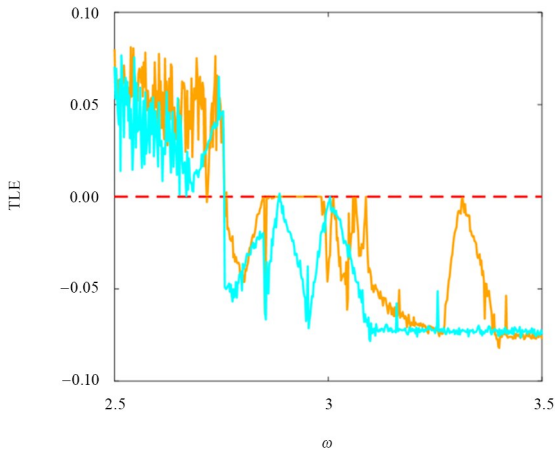


图 12 随  $\omega$  变化的多初值 TLE  
Fig. 12 Multi-initial TLE varying with  $\omega$

3 三自由度齿轮系统混沌控制

3.1 控制分析

通过第 2 节对影响齿轮系统非线性动力学的主要因素的分析,可以发现合理选择非线性参数区间可以有效降低系统多周期和混沌的发生概率. 图 13(a)~(d)为参数  $\omega = 2.615$ 、 $\xi = 0.1$  时(图 7 中☆所示)系统的动力学响应,由图可知,Poincaré 映射图显示出许多离散点集,相图为无限次折叠的曲线,不重复且杂乱无章,时间历程图也显示出非周期运动,幅频谱是连续的. 这些特征表明,在此参数下,齿轮系统处于混沌状态.

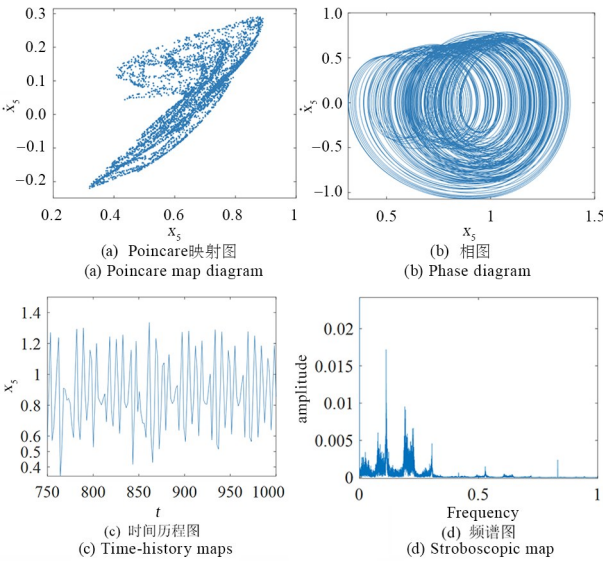


图 13  $\omega = 2.615$ 、 $\xi = 0.1$  时系统动态响应  
Fig. 13 Dynamic response of the system for  $\omega = 2.615$  and  $\xi = 0.1$

目前,混沌控制主要的方法是基于系统状态变量的反馈以及单参数反馈来实现,通过分析我们可以看到,齿轮系统受多个参数耦合作用的共同影响,在某些特定参数下,仅靠单一参数控制无法控制到目标周期运动,如果采用双参协同控制,可以提升系统从混沌控制到周期运动的效率,并且可以将混沌控制至幅值更小的参数区域. 同时通过上述仿真发现,在某些参数条件下,图 4 所示系统因对初始状态的敏感性不同,稳定运行于若干个不同的吸引子上. 针对图 4 所示系统对初始状态的敏感性,以系统共存的某一个吸引子对应的轨道作为目标轨道,而另一个吸引子对应的轨道作为被控轨道,通过施加力反馈控制,即可实现系统向幅值更小的周期吸引子的转迁,实现控制的最优化.

### 3.2 控制策略

为实现系统经混沌控制向周期运动且幅值相对较小的目标,解决混沌控制时初态与参数的优化匹配问题,本文设置分步控制以实现控制的最优性,即先采用双参控制,将混沌控制为周期运动,再利用吸引子共存特性将系统转迁至幅值更小的周期轨道.基于此我们设计了如图 14 所示基于 ELM 的双参数反馈控制器,用以对混沌行为进行控制.双参数反馈 ELM 控制器输入层为 2 个,分别选取 Poincaré 截面上相邻两次投影点之间的距离  $d(k)$  和  $d(k-1)$  作为控制器的输入,即

$$\begin{cases} d(k) = \| \mathbf{X}(k) - \mathbf{X}(k-1) \| \\ d(k-1) = \| \mathbf{X}(k-1) - \mathbf{X}(k-2) \| \end{cases} \quad (4)$$

隐层节点数需满足控制系统性能要求,本文在前期调研和团队研究成果的基础上,经过反复对比试验,选定其为 5 个.最后确定高斯径向基函数作为 ELM 的特征映射,即

$$\phi_s(\mathbf{D} - \mathbf{C}_s) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{D} - \mathbf{C}_s\|^2}{2\sigma_{N_s}^2}\right) \quad (5)$$

控制器的输出则定义为齿轮系统啮合频率  $\omega$  与阻尼  $\xi$  的微幅调整量,即

$$\begin{aligned} u_\omega(k) &= \sum_{s=1}^5 \beta_s \phi_s(\mathbf{D}, \mathbf{C}_s) + b_{j1} = \sum_{s=1}^5 \beta_s \times \\ &\exp\left(-\frac{\|\mathbf{D} - \mathbf{C}_s\|^2}{2\sigma_{N_s}^2}\right) + b_{j1} = \Delta\omega \\ u_\xi(k) &= \sum_{s=1}^5 \beta_s \phi_s(\mathbf{D}, \mathbf{C}_s) = \sum_{s=1}^5 \beta_s \times \\ &\exp\left(-\frac{\|\mathbf{D} - \mathbf{C}_s\|^2}{2\sigma_{N_s}^2}\right) + b_{j2} = \Delta\xi \end{aligned} \quad (6)$$

至此,确定 ELM 双参控制器结构如图 14 所示,其输入层为 2 个节点、输出层为 2 个节点.其中  $\beta$  为隐层和输出层之间的权重矩阵,网络具有 5 个隐节点,  $\phi_s(\mathbf{D} - \mathbf{C}_s)$  为高斯径向基函数,  $b_{ji}$  为偏置,  $u(k)$  为控制器输出的扰动量.为保持控制有效性,设定  $u_{\max}$  为最大扰动量,则  $-u_{\max} < u < u_{\max}$ .

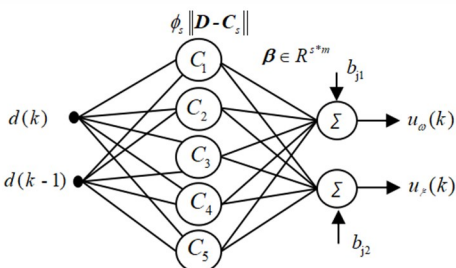


图 14 双参协同控制器结构

Fig. 14 Structure of the dual-parameter co-controller

为实现系统向幅值更小的周期运动的转迁,在双参控制后,针对图 4 所示系统对初始状态的敏感性,以系统共存的幅值较低的吸引子对应的轨道作为目标轨道,而高幅值吸引子对应的轨道作为被控轨道,通过施加力反馈控制,从而实现吸引子之间的转迁.即控制器输入层与隐层不变,输出则为  $k$  时刻施加于被控系统的外部载荷(即外加驱动力)

$$u(k) = F_k, \text{ 即: } u(k) = \sum_{s=1}^5 \beta_s \phi_s(\mathbf{D}, \mathbf{C}_s) + b_{j1} = \sum_{s=1}^5 \beta_s \times \exp\left(-\frac{\|\mathbf{D} - \mathbf{C}_s\|^2}{2\sigma_{N_s}^2}\right) + b_{j1} = F_k.$$

### 3.3 参数优选

在混沌控制系统的设计过程中,必须选定一些关键参数,这些参数的选择将直接影响控制器的效果以及整体设计的效率.为了解决传统黏菌算法容易陷入局部最优解和收敛精度不足的问题,本研究提出了一种新的算法——基于精英选择策略的黏菌算法.该算法融合了精英主义遗传算法的优点,具体收敛速度快,求解稳定等特点.

#### 3.3.1 控制性能指标函数构建

控制性能指标函数是遗传算法中评估个体优劣并指导其进化方向的关键机制,同时也用于评估 ELM 控制器对目标系统的控制效果.根据混沌运动控制目标(将混沌运动控制为规则的周期运动,且齿轮副相对扭转振副较小),本文所提出的含轻微裂纹齿轮系统混沌运动的智能优化控制策略为:将能够反映系统运动性态演化趋势的 Poincaré 截面图的特征进行量化表征,以构建控制性能指标函数;依据非线性系统反馈控制原理,基于 ELM 设计控制器,并采用 ESMA 算法对控制器参数迭代寻优,既求解出最优或相对最优控制器参数解,也实现控制品质的量化评价.综合上述因素,本文构建 ESMA 搜索最优参数的控制性能指标函数如下:

$$\text{Fitness} = \alpha_1 \sum_{jj=1}^k |d^* - \|\mathbf{X}(k) - \mathbf{X}(k-1)\|| \times \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \alpha_2 \sum_{jj=1}^k |u(k)| + \alpha_3 \frac{x_5 x_6}{x_5^2 + x_6^2 + 1} \quad (7)$$

其中,  $\alpha_i (i=1,2,3)$  为相对权重;  $\|\mathbf{X}(k) - \mathbf{X}(k-1)\|$  为 Poincaré 截面上相邻两次迭代投影点间的距离,其反映了 Poincaré 截面图的点集分布变化趋势;  $d^*$  为 Poincaré 截面上相邻两点距离的期望值;  $\gamma$  为区间  $[0,1]$  上的随机数;  $u(k)$  为控制器输出,此



项表征控制时控制能量损耗情况; $\frac{x_5 x_6}{x_5^2 + x_6^2 + 1}$ 为齿轮副相对扭转振动程度表征系数。

### 3.3.2 基于 ESMA 的控制器参数优化

在黏菌算法中,黏菌  $i_s$  会根据当前位置的客观条件,决定每个个体所在位置的权重,然后个体会根据权重更新位置.黏菌算法中种群初始化采用的是随机生成种群个体,方式如式(8)所示,其中, $vc=[-a, a]$ , $vb=[-b, b]$ , $r_s$  为  $[0, 1]$  的随机数, $ub$  和  $lb$  分别为搜索空间上下界.为加快前期寻优速度,本文采用一维 Logistic 混沌映射[数学表达式为: $Y_{n+1}=\mu Y_n \times (1-Y_n)$ , $\mu$  是 Logistic 参数]代替  $r_s$  初始化种群,来改善初始化中产生相同个体降低种群多样性的问题,经试验知  $\mu$  取 4 时, $Y$  的取值均匀地分布在  $[0, 1]$  上.采用改进后的位置更新公式(8)更新黏菌位置,在首次位置更新之后,计算原始位置适应度,然后通过强化搜索公式(9)获取新的位置,之后再计算强化搜索更新后的适应度.在强化搜索之后对适应度进行排名再更新位置,其更新公式如式(10)所示,即如果新的个体位置的适应值小于原来个体位置的适应值,或者搜索黏菌适应度排名位于所有个体排名的后 1/3 的精英子群,则如公式(9)将新产生的个体位置代替原来搜索黏菌个体位置。

$$X(t+1) = \begin{cases} r_s \times (ub - lb) + lb, & r_s < p \\ vc \times X(t), & p \leq r_s \end{cases} \quad (8)$$

$$X_{t+1}^{\text{Strengthen}} = X_b(t) + vb[W \times X_A(t) - X_B(t)] \quad (9)$$

$$X_{t+1}^{\text{new}} = \begin{cases} X_{t+1}^{\text{Strengthen}}, & \text{fit}(X_{t+1}^{\text{Strengthen}}) < \text{fit}(X_t) \\ \text{or } FL(i) > \frac{2}{3} \text{partiNum} & \\ X(t), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $X_b$  为迭代的最佳位置, $X_A$  和  $X_B$  为迭代时随机选择的两个黏菌个体,控制参数  $p$ 、 $a$ 、 $b$  和权重系数  $W_s$  的更新公式分别为

$$p = \tanh(|S(i_s) - DF|), i_s = 1, 2, \dots, N_s \quad (11)$$

$$W_s = \begin{cases} 1 + r_s \times \log\left(\frac{bF - S(i_s)}{bF - wF} + 1\right), & \text{if 该个体适应度在群体前面} \\ 1 - r_s \times \log\left(\frac{bF - S(i_s)}{bF - wF} + 1\right), & \text{else 在后一半} \end{cases} \quad (12)$$

$$a = \arctanh(b) \quad (13)$$

$$b = 1 - \frac{t_s}{T_s} \quad (14)$$

式中  $bF$  和  $wF$  分别表示当前迭代中最优和最差适应度值, $DF$  为所有迭代中的最优适应度, $S(i_s)$  为当前适应度.ESMA 算法优选控制器参数流程图如图 15 所示。

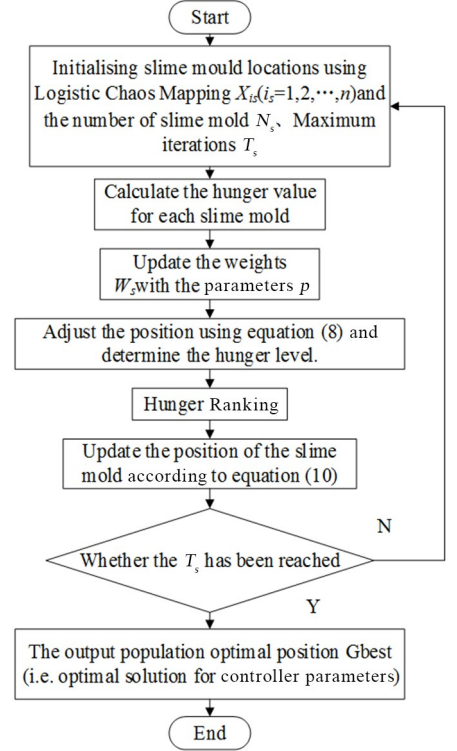


图 15 ESMA 算法优化控制器流程图  
Fig. 15 Flowchart of ESMA optimization controller

## 4 混沌控制与仿真

### 4.1 ESMA-ELM 控制结果分析

由 3.1 节分析可知,系统在  $\omega = 2.615$ ,  $\xi = 0.1$  时处于混沌运动,为了验证基于 ESMA-ELM 的双参协同智能优化控制策略的有效性,在 MATLAB 中进行仿真,对图 13(a) 所示混沌吸引子进行控制.设置 ESMA 算法的参数  $N_s$  和  $T_s$  分别为 30 和 25,为了清楚地展示混沌运动控制效果,本文选择在系统迭代  $k = 500$  次时施加控制。

图 16 和图 17 分别是控制目标为周期 1 运动和周期 2 运动的仿真结果图.其中图 16(a)、图 17(a)和图 16(b)、图 17(b)分别是  $x_5 - k$  和  $\dot{x}_5 - k$  控制轨道图,图 16(c)和图 17(c)展现了系统在控制过程中 Poincaré 截面上投影点的收敛过程.表 2 和



表 3 分别是预期控制目标为周期 1 运动和周期 2 运动时经 ESAM 算法优化后的 ELM 参数.

表 2 控制器参数(周期 1)  
Table 2 Controller parameters (period 1)

Hidden layer node center	Centre width	Weights linking the hidden and output layers	Bias $b_{j1}$	Bias $b_{j2}$
(0.3383, -0.4217)	0.0370	(1.7305, -0.2715)	-0.7801	0.8858
(-0.2202, 0.5319)	0.1703	(1.7877, -0.4217)	-0.7801	0.8858
(-0.6651, -0.6588)	0.3631	(-0.3648, -1.3415)	-0.7801	0.8858
(0.5021, -0.1974)	0.1321	(1.3465, -1.8610)	-0.7801	0.8858
(-0.9439, 0.2047)	0.6118	(0.7528, 1.6256)	-0.7801	0.8858

表 3 控制器参数(周期 2)  
Table 3 Controller parameters (period 2)

Hidden layer node center	Centre width	Weights linking the hidden and output layers	Bias $b_{j1}$	Bias $b_{j2}$
(0.0872, -0.2388)	0.1119	(0.2239, -0.2227)	-0.0442	0.0539
(0.1239, 0.2232)	0.7891	(0.1301, 0.7288)	-0.0442	0.0539
(-0.2780, -0.0049)	0.1246	(-0.1900, -0.2130)	-0.0442	0.0539
(-0.1194, 0.0037)	0.9249	(-0.1428, -0.0098)	-0.0442	0.0539
(-0.0910, 0.0919)	0.1652	(-0.0117, -0.3280)	-0.0442	0.0539

从图 16 可知,在  $k=548$  时,系统由混沌状态转变为稳定的周期 1 运动,在 Poincaré 截面上也可以看出系统由密集分布的无数个点收敛为一个点(图中为 1 个绿色★).图 17 展现了系统控制为周期 2 的结果,系统经 54 步被控制为周期 2 运动, Poincaré 截面上收敛为 2 个点(图中为 2 个绿色★).由上述仿真结果可知,本文所提出的方法对混沌运动实现了有效的控制.仿真研究中,控制目标可以设定为其他周期轨道,但由于篇幅限制,本文不再详细讨论.

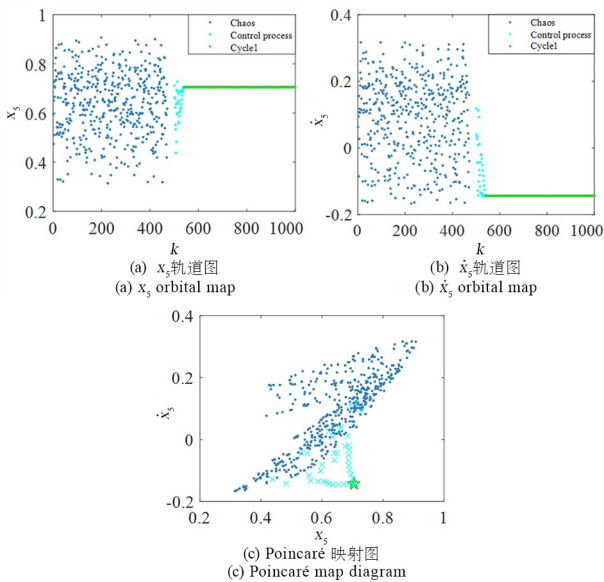


图 16 系统的受控周期 1 轨道  
Fig. 16 Controlled period 1 orbit of the system

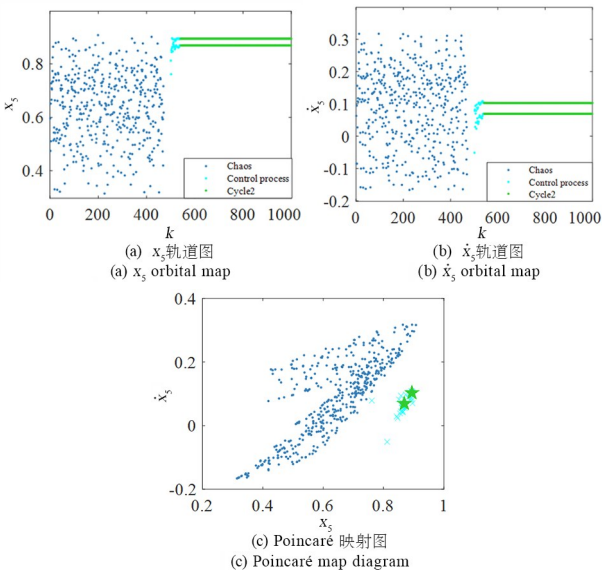


图 17 系统的受控周期 2 轨道  
Fig. 17 Controlled period 2 orbit of the system

4.2 控制效果对比分析

图 18~21 为系统采用不同控制方法,将齿轮系统的混沌状态镇定到周期运动的仿真结果图,图中蓝色表示混沌运动,紫色、橙色以及绿色分别表示采用 SMA 单参控制、ESMA 单参控制以及 ESMA 双参控制的控制结果.图 18 和图 19 为系统  $x_5-k$  和  $\dot{x}_5-k$  全局控制轨道图,图 20 为系统控制过程中 Poincaré 截面上投影点的收敛过程,系统

在不同控制方法下分别收敛于三个对应颜色的★, 为更清晰展现控制效果, 画出系统在  $x_5-k$  轨道上的局部放大图, 如图 21 所示. 通过控制结果可以看出, 采用本文设计的控制器, 均能在较快的响应下实现轻微裂纹齿轮系统的混沌控制. 表 4 为控制后系统的控制结果对比, 通过分析可以看出, 采用本文改进的 ESMA 算法可以加快算法的寻优迭代, 使系统更快稳定至周期轨道, 且扭转位移幅值更小, 而采用改进算法后利用双参协同控制, 则能进一步实现系统周期轨道的稳定化的快速响应, 并且将系统稳定至幅值更小的周期轨道. 本文设计的方法能够有效完成对图 4 所示系统混沌运动的控制要求, 在工程实际中对齿轮的冲击力更小, 对于机械设备安全运行有着重要意义.

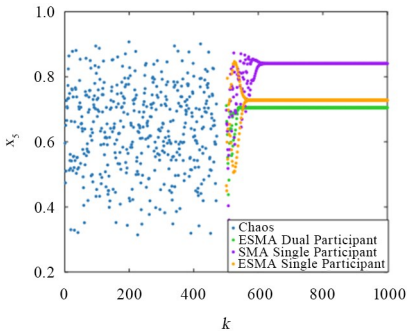


图 18  $x_5$  轨道图  
Fig. 18  $x_5$  orbital diagram

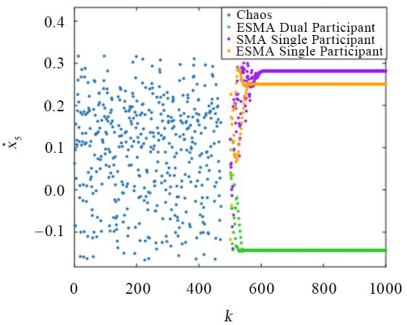


图 19  $\dot{x}_5$  轨道图  
Fig. 19  $\dot{x}_5$  orbital diagram

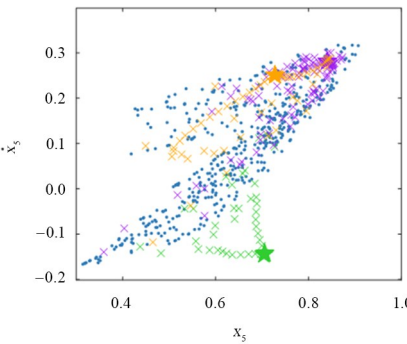


图 20 Poincaré 映射图  
Fig. 20 Poincaré map diagram

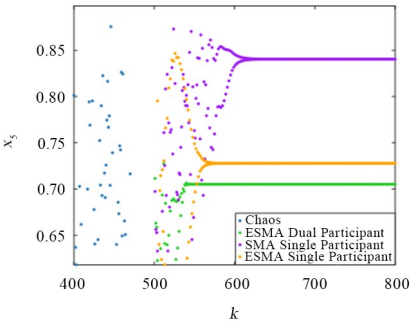


图 21 局部放大图  
Fig. 21 Local enlargement

表 4 控制效果对比			
Table 4 Comparison of control effects			
表征参数	SMA 单参	ESMA 单参	ESMA 双参
$x_5$	0.8414	0.7265	0.7041
$\dot{x}_5$	0.2845	0.2613	-0.1568
$k$	619	573	542

4.3 系统共存吸引子转迁控制

通过 3.1 节分析, 针对图 4 所示系统吸引子共存的现象, 通过施加力反馈控制, 从而实现吸引子之间的转迁. 本文以经上文双参协同控制后的周期 1 轨道作为被控轨道, 以图 11 中幅值较小的周期 1 轨道作为目标轨道, 通过力反馈控制, 实现系统共存吸引子之间的转迁, 为凸显控制效果, 本文在双参协同控制的基础上, 在  $k=700$  次时施加力反馈控制.

图 22(a)~(d)为系统转迁控制图, 由图可知,

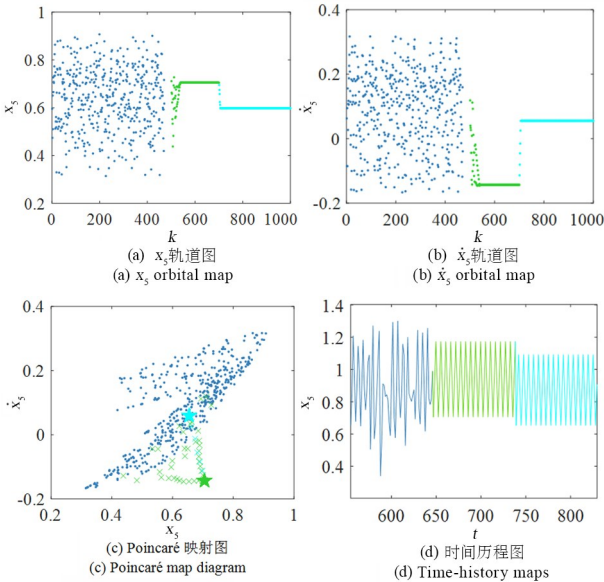


图 22 共存吸引子转迁控制  
Fig. 22 Control of coexisting attractor transitions

系统通过双参协同控制控制,在 $k=542$ 时系统被控制为周期1轨道,在控制至 $k=700$ 时施加力反馈控制,控制后的系统位移幅值由0.7041下降至0.6584,在Poincaré截面上表示为从绿色★转迁至蓝色★,成功实现了系统向更小幅值周期1轨道的转迁,完成了控制过程中初态与参数的优化匹配。由上述仿真结果可见,利用本文方法能够很好地实现对系统共存吸引子之间的转迁。

## 5 结论

本文以三自由度齿轮系统为研究对象,建立了含裂纹齿轮系统动力学模型,通过双参运动分布图、最大Lyapunov指数图以及扭振位移振幅云图等,分析了系统的动力学行为,针对含轻微裂纹情况的三自由度齿轮传动系统中的混沌运动,提出了基于ESAM-ELM的混沌运动控制策略。通过所设计的控制器实现了系统从混沌向周期轨道的控制,并针对系统中的吸引子共存的现象,利用力反馈控制,将系统控制至振幅更小的周期轨道,仿真实验结果表明了该控制方法能够有效地控制齿轮系统的混沌状态,并且响应速度快,控制的幅值小,该方法的可行性和有效性得到了验证。

## 参考文献

- [1] 陈再刚,刘禹清,周子伟,等. 轨道交通牵引动力传动系统动力学研究综述[J]. 交通运输工程学报, 2021, 21(6): 31—49.
- [2] CHEN Z G, LIU Y Q, ZHOU Z W, et al. Summary of dynamics research on traction power transmission system of rail transits [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2021, 21(6): 31—49. (in Chinese)
- [3] LI W, LI Z Y. Dynamic analysis of a multi-stage gear system considering the coupling between mesh phasing angle and coaxial teeth ratio [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(21): 19855—19878.
- [4] MA H, ZENG J, FENG R J, et al. Review on dynamics of cracked gear systems [J]. Engineering Failure Analysis, 2015, 55: 224—245.
- [5] CHEN Z G, SHAO Y M. Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack [J]. Mechanism and Machine Theory, 2013, 62: 63—74.
- [6] WU S Y, ZUO M J, PAREY A. Simulation of spur gear dynamics and estimation of fault growth [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 317(3/4/5): 608—624.
- [7] 马锐,陈予恕. 含裂纹故障齿轮系统的非线性动力学研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(21): 84—90.
- [8] MA R, CHEN Y S. Nonlinear dynamic research on gear system with cracked failure [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(21): 84—90. (in Chinese)
- [9] CHEN Z G, ZHANG J, ZHAI W M, et al. Improved analytical methods for calculation of gear tooth fillet-foundation stiffness with tooth root crack [J]. Engineering Failure Analysis, 2017, 82: 72—81.
- [10] 莫帅,王榴,胡庆森,等. 裂纹齿轮时变啮合刚度与传动系统振动机理[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2023, 54(5): 1769—1778.
- [11] MO S, WANG L, HU Q S, et al. Time varying meshing stiffness of cracked gears and fault vibration for transmission system [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2023, 54(5): 1769—1778. (in Chinese)
- [12] CAI-WAN C J. Bifurcation and chaos of gear-rotor-bearing system lubricated with couple-stress fluid [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 79(1): 749—763.
- [13] XIANG L, GAO N, HU A J. Dynamic analysis of a planetary gear system with multiple nonlinear parameters [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 327: 325—340.
- [14] HUANG K, CHENG Z B, XIONG Y S, et al. Bifurcation and chaos analysis of a spur gear pair system with fractal gear backlash [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 142: 110387.
- [15] 王靖岳,乔乐群,郑珺文,等. 随机齿侧间隙下行星齿轮系统的修形方法研究[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(5): 27—34.
- [16] WANG J Y, QIAO L Q, ZHENG J W, et al. Research on profile modification method of planetary gear system under random backlash [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(5): 27—34. (in Chinese)
- [17] 王宗禄,朱凌云,荀向锋. 三自由度齿轮系统的双参数分岔与全局特性研究[J]. 应用力学学报, 2019, 36(5): 1034—1041, 1255.
- [18] WANG Z L, ZHU L Y, GOU X F. Study on two-parameter bifurcation and global characteristics of 3-

DOF gear system [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2019, 36(5): 1034—1041, 1255. (in Chinese)

[14] JIANG Y, ZHU H, LI Z, et al. The nonlinear dynamics response of cracked gear system in a coal cutter taking environmental multi-frequency excitation forces into consideration [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(1): 203—222.

[15] DE PAULA A S, SAVI M A. A multiparameter chaos control method based on OGY approach [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 40(3): 1376—1390.

[16] CHEN G X. A simple adaptive feedback control method for chaos and hyper-chaos control [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 217(17): 7258—7264.

[17] KAVITHA A, UMA G. Resonant parametric perturbation method to control chaos in current mode controlled DC-DC buck-boost converter [J]. Journal of Electrical Engineering and Technology, 2010, 5(1): 171—178.

[18] 张文, 谢建华, 李高磊, 等. 单自由度齿轮系统的混沌控制[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(4): 1—7.

ZHANG W, XIE J H, LI G L, et al. Chaos control of a single degree of freedom gear system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 1—7. (in Chinese)

[19] ARIAN G, TAGHVAEI S. Dynamic analysis and chaos control of spur gear transmission system with idler [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, 87: 104229.

[20] SHENG L C, LI W, WANG Y Q, et al. Nonlinear dynamic analysis and chaos control of multi-freedom semi-direct gear drive system in coal cutters [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 116: 62—77.

[21] 李忱. 基于 Volterra-DMSCDA 的机车牵引齿轮裂纹故障诊断研究[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2019.

LI C. Research on crack fault diagnosis of traction gear of locomotive based on Volterra-DMSCDA [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiatong University, 2019. (in Chinese)