

基于广义 Udwadia-Kalaba 的电网飞行机械臂关节 模组轨迹跟踪及约束控制^{*}

吴少雷¹ 朱怀韬^{2†} 甄圣超³ 李锐³

(1. 国网安徽省电力有限公司电力科学研究院, 合肥 230601)

(2. 合肥汇优科技有限公司, 合肥 230031)

(3. 合肥工业大学 机械工程学院, 合肥 230009)

摘要 随着社会对供电可靠性要求的提升,配电网带电作业技术的创新愈发重要. 无人机技术的发展推动了飞行机械臂系统在带电作业中的应用,有效解决了传统人工作业的安全风险、效率低下和环境适应性差等问题. 本文聚焦于飞行机械臂关节模组的轨迹跟踪控制,旨在提高带电作业的精度和安全性. 为此,提出了一种基于广义 Udwadia-Kalaba(GUK)理论的鲁棒控制算法,以实现综合约束下的轨迹跟踪控制. 该算法构建了包含等式和不等式约束的框架,将轨迹跟踪问题转化为约束跟踪问题. 通过 Udwadia-Kalaba 方程处理等式约束,采用微分同构方法处理不等式约束,构成一种结合等式和不等式控制项的控制策略,用于求解约束力. 仿真结果表明,该控制方法显著提高了轨迹跟踪的准确性和稳定性.

关键词 飞行机械臂, 关节模组, 不确定性, 广义 Udwadia-Kalaba 方程

中图分类号: TP241

文献标志码: A

Trajectory Tracking and Constrained Control of Power Grid Flying Robotic Arm Joint Modules Based on Generalized Udwadia-Kalaba^{*}

Wu Shaolei¹ Zhu Huaitao^{2†} Zhen Shengchao³ Li Rui³

(1. State Grid Anhui Electric Power Research Institute, Hefei 230601, China)

(2. Hefei Huiyou Technology Co., Ltd., Hefei 230031, China)

(3. School of Mechanical Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract With the increasing demand for power supply reliability, innovations in live-line work technology for distribution networks have become increasingly important. The development of drone technology has driven the application of flying robotic arm systems in live-line operations, effectively addressing safety risks, low efficiency, and poor environmental adaptability associated with traditional manual operations. This paper concentrates on the trajectory tracking control of joint modules in aerial robotic manipulators, with the objective of improving operational accuracy and safety during live-wire maintenance tasks. To this end, a robust control algorithm based on the Generalized Udwadia-Kalaba (GUK) theory is proposed for trajectory tracking control under integrated constraints. The algorithm constructs a framework that includes both equality and inequality constraints, transforming the trajectory tracking problem into a constrained tracking problem. The Udwadia-Kalaba equation is used to handle equality constraints, and a differential isomorphism method is applied to address the inequality constraints, resulting in a control strategy that combines both equality and inequality control terms to solve for the con-

2025-03-02 收到第 1 稿, 2025-04-11 收到修改稿.

^{*} 国网安徽省电力有限公司科技项目 (B3120524000M), 安徽高校协同创新项目 (GXXT-2023-108), Science and Technology Project of State Grid Anhui Electric Power Co., Ltd. (B3120524000M), University Synergy Innovation Program of Anhui Province (GXXT-2023-108).

[†] 通信作者 E-mail: paperluck_zht@163.com

straint forces. Simulation results demonstrate that this control method significantly improves the accuracy and stability of trajectory tracking.

Key words flying manipulator, joint module, uncertainty, generalized Udwadia-Kalaba equation

引言

随着社会发展,用户对电力供应可靠性的要求日益提高.配电网是电力分配的核心,保障其稳定性至关重要.然而,传统作业常导致频繁停电,特别是在中低压配电网中,停电事件占比高达 90%.超过 70%的停电事件源于网络改造、新用户接入及计划性检修等活动.

带电作业技术是确保电力系统稳定运行、提高供电可靠性的关键手段^[1].它是指在电气设备不切断电源的情况下进行操作,以保障作业期间电力供应的连续性.传统带电作业依赖人工操作,但由于作业环境复杂且危险,面临诸多挑战^[2].例如,绝缘子一导线紧固及带电消缺等作业要求作业人员进入高压区域,存在显著安全风险.

随着机器人和自动控制技术的发展^[3],无人自主机器人系统在多个领域得到应用,取代人工完成物理交互任务,解放人员并提高作业效率^[4].如图 1,飞行机械臂结合了旋翼无人机的机动性和机械臂的操作性,能够在不停电的情况下执行各种维护任务,如带电消缺、设备更换及绝缘修复等,显著提高作业效率和安全性.飞行机械臂不仅能到达高空位置并执行多样化作业任务^[5],还具备较高的速度和灵活性,减少了作业风险,并降低了后期维护成本^[6].因此,飞行机械臂有望解决传统高空作业方法长期面临的高风险、高成本、低效率的挑战,从而提高作业效率并增强作业人员的安全保障.

在配电网带电作业中,飞行机械臂面临高空、高压及强电磁场等极端环境,需承载并操作各种负

载.机械臂本身是一个高度非线性、耦合性强、精度要求高的复杂系统,且由于参数变化、外部干扰等不确定性,精确建模与控制十分困难.

如图 2 所示,关节模块是飞行机械臂的动力核心,通常由谐波减速器和永磁同步电机(PMSM)构成,形成电机一齿轮驱动系统.该系统因其紧凑结构、快速响应、高传输效率和稳定性,广泛应用于工业机器人领域^[7].然而,在面对外部干扰和不确定性时,关节模块的控制精度可能受到影响^[8].例如,负载扭矩扰动、电磁干扰、摩擦以及齿轮间隙等因素,会对系统动态性能产生负面影响.因此,关节模块是一个复杂且易受不确定性影响的系统,如何应对这些不确定性并实现高精度轨迹跟踪,成为亟待解决的控制难题.

关节模组作为工业机器人的动力核心,其控制算法一直是研究的热点领域,对机器人技术的进步起到了重要的推动作用^[9].首先,比例积分微分(PID)控制作为一项基础但关键的技术^[10],在结合整定分数阶 PID 控制策略后^[11],被成功应用于永磁同步电机的速度环控制中.仿真结果表明,模糊分数阶 PID 控制器不仅具备出色的抗干扰能力,而且能够实现高精度跟踪与快速响应,从而提供更优的控制效果.此外,一种融合了模糊逻辑、迭代学习及自适应遗忘因子优点的模糊迭代控制策略也被提出^[12].这种带有自适应遗忘因子的变论域模糊迭代学习控制策略,可以有效提升系统的跟踪精度,体现了其在复杂动态环境下的适应性和精确性.针对系统中存在的不确定性因素,自适应控制策略通过减少观测误差等不确定因素的干扰^[13,14],增强了系统的稳定性.而自抗扰控制则进



图 1 飞行机械臂作业示意图

Fig. 1 Schematic of the flying robotic arm operation

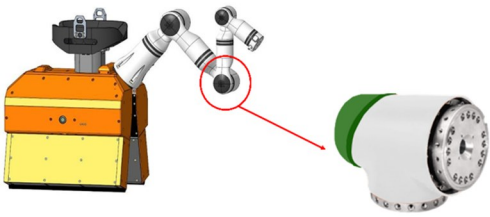


图 2 关节模组位置图

Fig. 2 Position diagram of joint modules

一步利用跟踪微分器(TD)、扩张状态观测器(ESO)和非线性误差反馈控制律^[15],展现了其卓越的控制性能、更快的响应速度以及优秀的抗干扰能力。滑模控制技术通过对传统方法进行改进^[16,17],有效地削弱了抖振现象,显著提升了系统的鲁棒性。同时,模型预测控制通过减少前提条件^[18],降低了计算复杂度和电流波动,改善了转矩脉动,为实时控制提供了可能。最后,神经网络控制通过对控制权重的优化和参数调整^[19,20],实现了位置和转速的更精准跟踪,并且增强了对抗负载扰动的能力和自适应能力,展示了其在未来智能控制系统中的巨大潜力。综上所述,上述各种控制策略在提高工业机器人关节模组控制性能方面均显示了独特的优势和良好的应用前景。

本文提出的研究对提高非线性系统的动态精度具有重要意义。与以往主要关注运动控制的研究不同,本文基于动力学方程提出了一种控制算法,解决了系统在非理想约束下的问题。系统中的约束分为被动约束^[21]和伺服约束^[22]两类。被动约束指系统固有的物理限制^[23],如机械臂的运动范围限制,防止其与无人机机身发生碰撞。伺服约束则通过主动控制手段,根据工作条件和操作需求进行动态调整。本文基于广义 Udwadia-Kalaba 方程对关节模组建模^[24],并设计了一种鲁棒控制器,用于关节模组的轨迹跟踪控制^[25]。该控制策略确保系统在外部干扰或参数变化下仍能满足性能要求,提高了系统对不确定性的适应性和动态响应的精确度。

为处理系统约束和不确定性,建立了关节模块系统的动力学模型,包括系统动力学模型和考虑不确定参数的约束方程^[26]。为应对被动约束,模型中加入了不等式约束,限制飞行机械臂关节模组的运动范围,确保安全操作。此外,设计了一种约束跟踪控制算法,特别考虑了初值不相容问题,即由于噪声和定位误差等因素,关节模块可能无法完全按照预设条件启动。该算法能够适应初始条件偏差,确保系统在不理想启动状态下也能稳定运行。由于传统控制方法在面对参数不精确和外部扰动时可能失效^[27],因此设计了一个鲁棒控制器,确保系统在不确定性和扰动下保持稳定性和性能。综合这些控制策略,所设计的控制器能够提供满足系统要求的控制力解析解,并具有结构清晰、硬件要求低等优点,显著降低了成本并保证了系统高效运行。

本文的第 1 节推导了关节模组的动力学方程,考虑到了改进的摩擦模型。第 2 节根据等式约束和不等式约束,基于广义 Udwadia-Kalaba 方程设计了一种新型鲁棒控制器。第 3 节采用对提出的控制方法在 Matlab/Simulink 中进行了仿真验证,验证了所提出的算法相较于其他传统的算法存在显著的优势,并且验证了改进的摩擦明显的优越性。第 4 节对全文进行了总结。

本文主要贡献有 3 点:

(1)改进的摩擦模型。提出了一种改进的 Striebeck 摩擦模型,综合考虑了库仑摩擦、黏性摩擦和静摩擦,并引入了偏置参数项,以提高摩擦力矩与实际摩擦力之间的拟合精度。

(2)不确定性处理。考虑了系统中的不确定性和外部扰动,针对系统初始状态可能不符合控制初始条件的情况,设计了相应的控制器。该方法确保系统在初始条件偏差、不确定性及外部未知扰动的影响下,依然能够有效地收敛至预期轨迹。

(3)综合约束考虑。在动力学模型建立过程中,除了考虑等式约束,还充分考虑了不等式约束。这一设计保证了飞行机械臂在工作过程中避免与无人机发生碰撞,从而有效降低了系统损坏的风险。

1 系统模型分析

永磁同步电机因其高效率、高扭矩密度和精确的转速控制而广泛应用于机械臂的关节驱动中。

1.1 动力学建模

三相永磁同步电机是一个复杂的非线性系统,具有明显的耦合性。永磁同步电机数学模型可表示如下:

$$\begin{cases} \dot{i}_d = -\frac{R}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}n_p\omega i_q + \frac{u_d}{L_d} \\ \dot{i}_q = -\frac{R}{L_q}i_q - \frac{L_d}{L_q}n_p\omega i_d - n_p\omega \frac{\phi_f}{L_q} + \frac{u_q}{L_q} \\ \dot{\omega} = \frac{T_e}{J} - \omega \frac{B}{J} - \frac{T_L}{J} \end{cases} \quad (1)$$

其中 i_d 、 u_d 和 L_d 表示的是 d 轴上的定子电流、电压和电感, i_q 、 u_q 和 L_q 表示的是 q 轴上的定子电流、电压和电感, R 表示的是定子电阻, n_p 表示的是极对数, ω 表示的是转子的角速度, ϕ_f 表示的是转子磁链, T_e 、 B 、 J 和 T_L 分别表示的是电磁转矩、黏性摩擦系数、转动惯量和负载转矩。

永磁同步电机常用的控制方法是磁场定向控制(FOC)技术,采用了使 $i_d = 0$ 的控制策略,需要控制三相电流矢量合成到 q 轴上,即 $i_q = i_s$ 且 $i_d = 0$. 这样就可以通过控制 i_q 直接控制电磁转矩,并且可以单独控制转矩,以获得更好的动态性能. 将永磁同步电机的数学模型式(1)重写为:

$$\begin{cases} \dot{i}_d = 0 \\ \dot{i}_q = -\frac{R}{L_q}i_q - n_p\omega \frac{\phi_f}{L_q} + \frac{u_q}{L_q} \\ \dot{\omega} = \frac{T_e}{J} - \omega \frac{B}{J} - \frac{T_L}{J} \end{cases} \quad (2)$$

由式(1)可以看出电枢电流和永磁同步电机的转矩之间存在着非线性耦合的情况. 根据磁链方程

$$\begin{cases} \psi_d = L_d i_d + \psi_f \\ \psi_q = L_q i_q \end{cases}$$

可以得到永磁同步电机电磁转矩公式为:

$$T_e = \frac{3}{2} n_p i_q [\psi_f + (L_d - L_q) i_d] \quad (3)$$

对于表贴式 PMSM 存在 $L_q = L_d$. 因此电磁转矩 T_e 的表达式可以改写为:

$$T_e = \frac{3}{2} n_p \psi_f i_q = K i_q \quad (4)$$

式中的 $K = \frac{3}{2} n_p \psi_f$ 是扭矩系数,只需要调整 i_q 的值就可以控制电磁转矩.

根据式(2),可以得到三相永磁同步电机的动态方程为:

$$J\dot{\omega} + B\omega + T_L = T_e \quad (5)$$

如图3中所示,永磁同步电机的输出轴和减速器相连,共同作用实现关节模组的运动. 在此过程中,需要考虑到减速器的传动效率和减速比的影响,建立动力学方程如下:

$$T_D = i\eta T_L \quad (6)$$

其中 T_D 表示减速器的输出转矩, η 为传动效率, i 为减速比. 则式(5)可以改写为:

$$J\dot{\omega} + B\omega + \frac{1}{i\eta} T_D = T_e \quad (7)$$

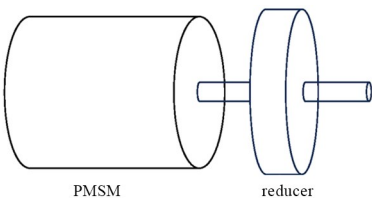


图3 关节模组系统结构图

Fig. 3 Structure diagram of joint module system

因为 ω 表示的是转子的角速度,所以有 $\omega = \dot{\phi}$, $\ddot{\omega} = \ddot{\phi}$, ϕ 表示的是永磁同步电机的转动角度. 考虑到系统运行中存在的摩擦力,在动力学方程中增加一个摩擦项 T_f . 结合式(4)和式(7)可以得到最终的力学方程为:

$$J\ddot{\phi} + B\dot{\phi} + \frac{1}{i\eta} T_D + T_f = u(t) \quad (8)$$

令 $M = J$, $C = B$, $F = \frac{1}{i\eta} T_D + T_f$, 可以整理为:

$$M\ddot{\phi} + C\dot{\phi} + F = u(t) \quad (9)$$

1.2 摩擦力模型

在精密运动控制领域,摩擦力会导致定位误差和响应迟滞,进而影响系统的整体性能. 为了提高系统的动态精度和稳定性,本文将重点探讨摩擦力模型,利用一种改进的 Stribeck 摩擦模型. 不仅考虑到了库仑摩擦和黏性摩擦,还考虑到了静摩擦和速度反转,提高摩擦模型和实际摩擦力的拟合精度,形式如下:

$$T_f = [f_c + (f_s - f_c) e^{-(\frac{\dot{\phi}}{v})^2}] \operatorname{sgn}(\dot{\phi}) + f_v \dot{\phi} - f_g \quad (10)$$

其中 f_c 是库仑摩擦系数, f_s 为静摩擦系数, f_v 为黏性摩擦系数, \dot{q}_s 为润滑参数. f_g 旨在消除速度反转时摩擦力的波动. 可以写成如下:

$$\begin{cases} f_g = s e^{-\frac{\dot{\phi}^2}{v}} \\ s = \operatorname{sgn}(\frac{\dot{\phi}}{\ddot{\phi}}) f_s + n_1 f_c \\ v = \ddot{\phi} \dot{q}_s [n_2 \times \operatorname{sgn}(\ddot{\phi}) + n_3 \times \operatorname{sgn}(\dot{\phi})] \end{cases} \quad (11)$$

其中的 n_1 , n_2 和 n_3 是相关增益参数.

2 控制器设计

完成动力学建模后,基于广义 Udwadia-Kalaba 理论设计了一种新型鲁棒控制器,考虑了等式和不等式约束,以确保控制效果满足期望的约束要求.

在实际应用中,系统存在外部扰动和建模误差,这些不可避免的不确定性. 如果不加以处理,将显著影响系统的控制性能.

引入一个不确定因子 δ , 对这种不确定性进行分解:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(\phi, \delta, t) = \bar{\mathbf{M}}(\phi, t) + \Delta\mathbf{M}(\phi, \delta, t) \\ \mathbf{C}(\phi, \delta, t) = \bar{\mathbf{C}}(\phi, t) + \Delta\mathbf{C}(\phi, \delta, t) \\ \mathbf{F}(\phi, \delta, t) = \bar{\mathbf{F}}(\phi, t) + \Delta\mathbf{F}(\phi, \delta, t) \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\bar{\mathbf{M}}$ 、 $\bar{\mathbf{C}}$ 和 $\bar{\mathbf{F}}$ 是标称部分, $\Delta\mathbf{M}$ 、 $\Delta\mathbf{C}$ 和 $\Delta\mathbf{F}$ 是不确定部分, 各部分函数都是连续的。

定义 1: 对于惯性矩阵, 令:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\phi, t) &= \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\phi, t) \\ \mathbf{E}(\phi, \delta, t) &= \bar{\mathbf{M}}(\phi, t)\mathbf{M}^{-1}(\phi, \delta, t) - \mathbf{I} \\ \Delta\mathbf{D}(\phi, \delta, t) &= \mathbf{M}^{-1}(\phi, \delta, t) - \bar{\mathbf{M}}^{-1}(\phi, t) \end{aligned} \quad (13)$$

则有:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{D}(\phi, \delta, t) &= \mathbf{D}(\phi, t)\mathbf{E}(\phi, \delta, t) \\ \mathbf{M}^{-1}(\phi, \delta, t) &= \mathbf{D}(\phi, t) + \Delta\mathbf{D}(\phi, \delta, t) \end{aligned} \quad (14)$$

2.1 等式约束控制项

本节将利用广义 Udwadia-Kalaba 方程解决系统的约束问题。根据广义 Udwadia-Kalaba 方程的基本原理, 先将研究对象视为一个无约束系统。在无约束的情况下, 系统的广义坐标可表示为 $\phi := [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$, 系统的动力学方程^[28]:

$$\mathbf{M}(\phi, t)\ddot{\phi} = \mathbf{Q}(\phi, \dot{\phi}, t) \quad (15)$$

其中, $\mathbf{M}(\phi, t) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 表示的是系统的惯性矩阵。 $\mathbf{Q}(\phi, \dot{\phi}, t) \in \mathbf{R}^n$ 表示的是系统已知的外力矩阵。

对这个无约束系统施加 m 个平滑约束, 系统的零阶伺服约束为:

$$\mathbf{Y}(\phi, t) = \mathbf{d}(\phi, t) \quad (16)$$

其中 $\mathbf{Y} = [\mathbf{Y}_{li}]_{m \times n}$, $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_m]_{m \times n}$, $\mathbf{Y}(\cdot)$ 和 $\mathbf{d}(\cdot)$ 对于 ϕ 和 t 参量都是一阶连续可导。式(16)对求两次导得到二阶约束方程:

$$\mathbf{X}(\phi, t)\ddot{\phi} = \mathbf{b}(\phi, \dot{\phi}, t) \quad (17)$$

$\mathbf{X}(\cdot) \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为约束矩阵, $\mathbf{b}(\cdot)$ 对于 ϕ 和 t 参量都是一阶连续可导, 此约束为对原来的无约束系统施加了一个约束。所以具有等式约束的系统方程为:

$$\mathbf{M}(\phi, t)\ddot{\phi} = \mathbf{Q}(\phi, \dot{\phi}, t) + \mathbf{Q}^c(\phi, \dot{\phi}, t) \quad (18)$$

其中 $\mathbf{Q}^c(\phi, \dot{\phi}, t) \in \mathbf{R}^n$ 为约束力矩阵, 保证驱动系统满足规定约束。

根据 Udwadia-Kalaba 方程的理论, 给出理想约束力的精确表达式:

$$\mathbf{Q}^c(\phi, \dot{\phi}, t) = \mathbf{M}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{X}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{X}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (19)$$

其中符号⁺表示 Moore-Penrose 广义逆。

等式约束加速度 $\mathbf{a}^c(\phi, \dot{\phi}, t)$ 为:

$$\mathbf{a}^c = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{X}\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}})^+ (\mathbf{b} - \mathbf{X}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}) \quad (20)$$

备注 1: Udwadia-Kalaba 方程可以同时处理多种类型的约束, 如非完整约束、完整约束、流变约束、硬化约束以及其他各种常见约束。方程(17)中的二阶形式包含了这些常见约束。约束力和主动力的综合作用将改变机械系统的运动。

根据 Udwadia-Kalaba 理论^[29], 约束力 $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$ 可以表示为:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 \quad (21)$$

其中 \mathbf{u}_1 是标称约束力(即不存在不确定性或不确定性已知), \mathbf{u}_2 用于处理初始条件不兼容的情况, 而 \mathbf{u}_3 用于解决系统内部存在的不确定性。

备注 2: Udwadia-Kalaba 理论表明, 当以 $\mathbf{u} = \mathbf{Q}^c$ 作为控制输入时, 机械系统可以在满足各种类型的约束的情况下以最小的控制成本随时启动。

首先考虑没有不确定性所需的约束力, 即式(12)中的标称部分。

假设 1: 对于所有的 $(\phi, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, $\sigma \in \Sigma$ (Σ 是模糊边界集), $\mathbf{M}(\phi, \delta, t)$ 正定。

假设 2: 对于所有的 $(\phi, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, 如果 $\mathbf{X}(\phi, t)$ 的秩大于等于 1, 则 $\mathbf{X}^+(\phi, t)$ 必存在。

假设 3: 如果对于给定的 \mathbf{X} 和 \mathbf{b} , 至少存在一个解 $\ddot{\phi}$, 则称公式(17)是一致的。

没有不确定性的期望约束项为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \bar{\mathbf{M}}^{1/2}(\mathbf{X}\bar{\mathbf{M}}^{-1/2})^+ \{ \mathbf{b} + \mathbf{X}\bar{\mathbf{M}}^{-1}[\bar{\mathbf{C}}\dot{\phi} + \\ &\quad \bar{\mathbf{F}} - \lambda(\mathbf{X}\dot{\phi} - \mathbf{c})] \} \end{aligned} \quad (22)$$

备注 3: 根据达朗贝尔虚功原理, 上述约束力满足系统约束[式(17)]的要求。

跟踪误差定义为:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t) &= \mathbf{X}(\phi, t)\dot{\phi} - \mathbf{c}(\phi, t) + \\ &\quad \lambda[\mathbf{Y}(\phi, t) - \mathbf{d}(\phi, t)] \end{aligned} \quad (23)$$

其中 λ 为零阶约束增益系数, 它是一个大于 0 的常数。

当 $t=0$ 时, 系统可能不满足 $\mathbf{e} \neq 0$ 的初始条件, 因此, 控制器中需要考虑到初值不相容的情况。设计控制项为:

$$\mathbf{u}_2 = -k\bar{\mathbf{M}}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{e} \quad (24)$$

其中的 k 为大于 0 的参量。

之后考虑系统中存在的不确定性问题。

假设 4: 对于所有的 $(\phi, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, $\mathbf{X}(\phi, t)$ 是满秩的. 所以 $\mathbf{X}(\phi, t)\mathbf{X}^T(\phi, t)$ 是可逆的.

定义 2: 对于给定的 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $\mathbf{P} > 0$ 令:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\phi, \delta, t) &:= \mathbf{P}\mathbf{X}(\phi, t)\mathbf{D}(\phi, t)\mathbf{E}(\phi, \delta, t) \\ \bar{\mathbf{M}}(\phi, t)\mathbf{X}^T(\phi, t)[\mathbf{X}(\phi, t)\mathbf{X}^T(\phi, t)]^{-1}\mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

存在一个 $\hat{\rho}_E(\cdot)$ 对于所有的 (ϕ, t) 有:

$$\frac{1}{2} \min_{\delta \in \Sigma} \lambda_m[\mathbf{X}(\phi, \delta, t) + \mathbf{X}^T(\phi, \delta, t)] \geq \hat{\rho}_E(\phi, t) \quad (26)$$

其中 λ_m 是最小特征值.

等式约束下存在不确定性的控制项为:

$$\mathbf{u}_3 = -[\bar{\mathbf{M}}\mathbf{X}^T(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}\mathbf{P}^{-1}] \times \gamma e \rho^2 \quad (27)$$

其中

$$\gamma(\phi, \dot{\phi}, t) = \begin{cases} \frac{[1 + \hat{\rho}_E(\phi, t)]^{-1}}{\|\mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t)\mathbf{p}(\phi, \dot{\phi}, t)\|}, & \|e\rho\| > \epsilon \\ \frac{[1 + \hat{\rho}_E(\phi, t)]^{-1}}{\epsilon}, & \|e\rho\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (28)$$

变量 ϵ 为大于 0 的参量.

函数 $\rho(\cdot): \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ 定义为:

$$\begin{aligned} \rho \geq \max_{\delta \in \Sigma} \|\mathbf{P}\mathbf{X}\Delta\mathbf{D}[-\mathbf{C}\dot{\phi}(t)\mathbf{F} + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2] + \\ \mathbf{P}\mathbf{X}\mathbf{D}[-\Delta\mathbf{C}\dot{\phi}(t) - \Delta\mathbf{F}]\| \end{aligned} \quad (29)$$

函数代表了右侧包含了系统所有不确定性的上限.

定理 1: 根据假设 1~4 和定义 2, 设计的控制器满足以下性能要求^[30]:

(1) 一致有界. 对于任意的 $g > 0$, 都存在一个 $d(g) < \infty$, 如果有 $\|\mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t)\| \leq g$, 则对所有的 $t \geq t_0$ 都有 $\|\mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t)\| \leq d(g)$.

(2) 一致最终有界. 对于任意的 $g > 0$, 并且 $\|\mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t)\| \leq g$, 存在一个 $\bar{d} > 0$, 当 $t \geq t_0 + T(\bar{d}, r)$ 时, 对任意的 $\bar{d} < \bar{d}$ 存在 $\|\mathbf{e}(\phi, \dot{\phi}, t)\| \leq \bar{d}$. 其中 $0 \leq T(\bar{d}, r) < \infty$.

2.2 不等式约束控制项

在许多机械系统中, 除了等式约束外, 还存在不等式约束. 如避障约束、车辆可行区域边界约束等. 飞行机械臂为了保证正常工作, 需要对机械臂上的关节模组运动范围进行限制, 避免与无人机机体发生碰撞.

对于关节模组转角 ϕ 人为给定一个运动范围, 有如下的不等式约束:

$$f_j(t) < g_j[\phi(t)] < h_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (30)$$

为了满足这些额外的不等式约束, 引入一个额外的加速度 $\mathbf{a}^i(\phi, \dot{\phi}, t)$, 它描述了系统受到不等式约束的额外运动. 受等式和不等式约束的系统加速度为:

$$\ddot{\phi} = \mathbf{a}(\phi, \dot{\phi}, t) + \mathbf{a}^c(\phi, \dot{\phi}, t) + \mathbf{a}^i(\phi, \dot{\phi}, t) \quad (31)$$

不等式约束产生的附加加速度表示为:

$$\mathbf{a}^i(\phi, \dot{\phi}, t) = (\mathbf{I} - \mathbf{X}^+ \mathbf{X})\mathbf{r} \quad (32)$$

其中 \mathbf{I} 是单位矩阵, $\mathbf{r} \in n$ 为一个待确定的参数.

备注 4: 给出的 $\mathbf{a}^i(\phi, \dot{\phi}, t)$ 的结构, 得到的系统加速度表达式, 对于所有的 $\mathbf{r} \in \mathbf{R}$ 依旧满足约束条件, 即不等式约束不影响系统的等式约束.

接下来进行简单的证明, 对式 (31) 左乘矩阵 $\mathbf{X}(\phi, t)$:

$$\mathbf{X}\ddot{\phi} = \mathbf{X}(\mathbf{a} + \mathbf{a}^c) + \mathbf{X}\mathbf{a}^i \quad (33)$$

根据式 (17) 和式 (32) 可得:

$$\mathbf{X}(\phi, t)\ddot{\phi} = \mathbf{b}(\phi, \dot{\phi}, t) + \mathbf{X}(\mathbf{I} - \mathbf{X}^+ \mathbf{X})\mathbf{r} \quad (34)$$

根据 Moore-Penrose 广义逆的性质 $\mathbf{X}\mathbf{X}^+ \mathbf{X} = \mathbf{X}$, 上式可以改写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\phi, t)\ddot{\phi} &= \mathbf{b}(\phi, \dot{\phi}, t) + (\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{X}^+ \mathbf{X})\mathbf{r} \\ &= \mathbf{b}(\phi, \dot{\phi}, t) + (\mathbf{X} - \mathbf{X})\mathbf{r} \\ &= \mathbf{b}(\phi, \dot{\phi}, t) \end{aligned} \quad (35)$$

可以得出, 在加入了不等式约束之后, 不会影响到等式约束.

基于以上分析, 可以得到受综合约束的动态系统的广义 Udwadia-Kalaba 方程, 无论是等式约束还是不等式约束, 都可以得到:

$$\mathbf{M}\ddot{\phi} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^c + \mathbf{Q}^i \quad (36)$$

其中 $\mathbf{Q}^i(\phi, \dot{\phi}, t)$ 代表的是不等式约束力.

对于不等式约束, 采用一种微分同构的方法进行状态转化, 使得:

$$\xi_j = \hat{q}[g_j(\phi)] = q_j(\phi) \quad (37)$$

其中 $\xi_j \in \mathbf{R}$ 为变换后的状态, \hat{q} 为微分同构变换函数. 通过引入变换函数, 将不等式约束转化为等式约束. 利用微分同构的连续可微性质, 保证了 ξ_j 的有界性. 也就是说当 $g_j(q) \in [f_j(t), h_j(t)]$ 时,

$\xi_j \in (-\infty, \infty)$. 当 ξ_j 有界时, 不等式约束得到满足.

转换前的状态变量为 $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$, 转换后的状态变量为 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$. 则有:

$$\xi = q(\phi) \quad (38)$$

进行连续求导得:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{\partial q}{\partial \phi} \dot{\phi} \\ \ddot{\xi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) \right] \dot{\phi} + \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) \ddot{\phi} \\ &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) \right] \dot{\phi} + \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) [M^{-1}(a + a^c)] + \\ &\quad \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) (I - X^+ X) r := h_1 + h_2 r \end{aligned} \quad (39)$$

然后令 $\zeta = [\xi, \dot{\xi}]^T$, 可以将上式改写为:

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ \ddot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \phi} \dot{\phi} \\ \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) \right] \dot{\phi} + \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) [M^{-1}(a + a^c)] + \left(\frac{\partial q}{\partial \phi} \right) (I - X^+ X) r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} r = h_3 + h_4 r \quad (40)$$

根据式(40), 对于不等式约束, 设计 Q_i 中的控制输入 r 以稳定变换状态 ξ . 具有不确定性的动态系统方程如下:

$$\dot{\zeta}(t) = h_3 + h_4 \times r \quad (41)$$

和式(12)类似, 上式可以分解为:

$$\begin{aligned} h_3 &= \bar{h}_3 + \Delta h_3 \\ h_4 &= \bar{h}_4 + \Delta h_4 \end{aligned} \quad (42)$$

式(41)可以重写为:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} &= (\bar{h}_3 + \Delta h_3) + (\bar{h}_4 + \Delta h_4) r \\ &= A\zeta + (\bar{h}_4 + \Delta h_4) r + (\underbrace{\bar{h}_3 - A\zeta}_{:= (\bar{h}_4 + \Delta h_4) \bar{\omega}} + \Delta h_3) \\ &= A\zeta + (\bar{h}_4 + \Delta h_4) (r + \bar{\omega}) + \underbrace{\Delta h_3}_{:= h_4 \Delta \omega} \\ &= A\zeta + (\bar{h}_4 + \Delta h_4) (r + \bar{\omega}) + h_4 \Delta \omega \end{aligned} \quad (43)$$

$\bar{\omega}$ 和 $\Delta \omega$ 分别表示标称部分和不确定部分, 表示相关系统的参数和扰动.

假设 5: 矩阵 A 是渐进稳定的, 对于以下的方程

$$A^T P + PA + Q = 0 \quad (44)$$

有 $Q > 0$. 如果矩阵 A 是 Hurwitz 稳定的, 则解 $P > 0$ 存在且唯一.

假设 6: 不确定性边界可以被描述为:

$$\|\Delta \omega\| \leq a_1 \|\zeta\|^2 + a_2 \|\zeta\| + a_3 \quad (45)$$

其中的 a_1, a_2 和 a_3 是非负常数.

定义 3: 对于所有的 $(\phi, \dot{\phi}, t) \in R^n \times R^n \times R$, 存在

一个矩阵 N

$$\Delta h_4 = \bar{h}_4 N \quad (46)$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(N + N^T) \geq a_4 > -1 \quad (47)$$

$$\|N\| \leq a_5 \quad (48)$$

其中的 a_4 和 a_5 是非负常数.

则不等式约束力中的控制项 r 可以表示为:

$$r = r_1 - \bar{\omega} \quad (49)$$

其中 r_1 旨在补偿不确定性, 而 $\bar{\omega}$ 作为系统的预补偿标称部分, 可以减轻控制增益的负担. r_1 表达式为:

$$\begin{aligned} r_1 &= -\bar{h}_4^T P \zeta(t) [c_1 \|\zeta(t)\|^2 + \\ &\quad c_2 \|\zeta(t)\| + c_3]^2 \end{aligned} \quad (50)$$

其中的 c_1, c_2 和 c_3 是非负常数.

根据公式(29), 不等式约束力表示为:

$$\begin{aligned} Q_i &= M(I - X^+ X) r \\ &= M(I - X^+ X) - \{\bar{h}_4^T P \zeta(t) [c_1 \|\zeta(t)\|^2 + \\ &\quad c_2 \|\zeta(t)\| + c_3]^2 - \bar{\omega}\} \end{aligned} \quad (51)$$

2.3 基于广义 Udwadia-Kalaba 方程的鲁棒控制器

考虑具有等式和不等式约束的动态系统, 可以得到等式约束力和不等式约束力. 并且这两个力不会相互影响. 那么基于广义 Udwadia-Kalaba 方程的约束力为 $Q_{ci} = Q_c + Q_i$, 表达式为:

$$Q_{ci} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \quad (52)$$

其中

$$\begin{cases} u_1 = \bar{M}^{1/2} (X \bar{M}^{-1/2})^+ \{b + X \bar{M}^{-1} \cdot \\ \quad [\bar{C} \dot{\phi} + \bar{F} - \lambda(X \dot{\phi} - c)]\} \\ u_2 = -k M \bar{X}^T (X X^T)^{-1} P^{-1} e \\ u_3 = -[\bar{M} X^T (X X^T)^{-1} P^{-1}] \gamma e \rho^2 \\ u_4 = M(I - X^+ X) r \end{cases} \quad (53)$$

其中 $r = -\bar{h}_4^T P \zeta (c_1 \|\zeta\|^2 + c_2 \|\zeta\| + c_3)^2 - \bar{\omega}$.

备注 5: 只要控制参数满足设计要求, 就能保证系统达到期望的稳定性能. 其中 $k, c_1, c_2, c_3 \in R > 0$. k 值越大, 约束力 u_2 就越大, 系统负反馈就越强. 系统的稳态收敛速度受参数 P 的影响, P 值越大, 系统的收敛速度越大, 但系统的控制成本会上升, 因此在选择参数 P 时必须考虑真实的控制要求. 参数 c_1, c_2 和 c_3 用于调节不等式约束控制项, 控制各阶变量的控制比例.

3 仿真与结果

设计了基于广义 Udwadia-Kalaba 方程的控制器. 基于 MATLAB 平台搭建了仿真代码, 对所提出的控制策略和改进的 Stribeck 摩擦模型进行仿真验证.

3.1 算法性能对比实验

为了保证系统的安全, 每种情况下都必须考虑不等式约束. 将含有 u_1 和 u_4 控制项称为 SC (smooth constraint control) 算法; 含有 u_1 、 u_2 和 u_4 控制项称为 ICM (initial condition mismatch control) 算法; 包含 u_1 、 u_2 、 u_3 和 u_4 控制项称为 UR (uncertainty rubust control) 算法. 分别对 SC 算法、ICM 算法、UR 算法和经典的 PID 算法进行对比仿真, 验证新算法的优越性能. 关节模组系统标称参数如表 1 所示.

表 1 飞行机械臂关节模组参数

Table 1 Joint module parameters of flight manipulator

关节参数	数值
$\bar{J}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	0.001 650
$\bar{B}/[\text{N} \cdot \text{m}/(\text{rad}/\text{s})]$	0.001
ϕ_f/Wb	0.311
i	101
η	0.95
n_p	6

相关摩擦系数如表 2 所示.

表 2 摩擦模型参数

Table 2 Friction model parameters

参数	数值
f_s	0.3075
f_c	0.2382
f_v	0.0585
\dot{q}_s	0.0424
n_1	0.1838
n_2	1.1574
n_3	2.0801

在控制设计中, 寻找最佳参数的过程是多目标优化的关键环节, 特别是在工业实践中, 这涉及实际的使用精度、频率要求、系统硬件性能参数以及成本效益. 考虑到飞行机械臂特定的应用场景和硬

件约束, 设定了控制器的参数范围. 各控制器参数如表 3 所示.

表 3 控制器参数
Table 3 Controller parameters

参数	数值
P	0.05
k	20
ϵ	0.01
ρ_E	0.1
c_1	10
c_2	1
c_3	1
k_p	287
k_i	5
k_d	26

为了评估算法在初值不相容条件下的性能, 当初始时间 t 为 0, 设置初始状态 $e=0.1$.

为了评估控制器在不确定性条件下的性能, 引入了时间相关的不确定性, $J = \bar{J} + 0.001 \times \sin(t)$, $B = \bar{B} + 0.01 \times \sin(t)$, $F = \bar{F} + 0.1 \times \sin(t)$.

3.1.1 正弦信号

以正弦信号作为参考轨迹, 测试三种算法的轨迹跟踪性能. 参考信号如下:

$$\phi_d = \frac{\pi}{6} \sin(t)$$

(54)

在图 4~图 6 中分别展示了 4 种控制算法在正弦信号下轨迹跟踪的位移、误差和控制输入响应曲线. 通过图 4 中的轨迹跟踪位移曲线可以看出, 在初始时刻存在偏差的情况下, PID 算法和 SC 算法无法有效地跟踪期望正弦信号, 存在较大的偏差; 并且在存在初值不相容的情况下, PID 出现了一个明显的突变, 处理效果不佳; ICM 和 UR 算法都可以处理这种初值不相容的情况, 但是 UR 算法的响应速度和趋近程度都要优于 ICM 算法. 并且在存在不确定性的情况下, 稳态之后的 UR 算法也更加趋近期望信号. 图 5 中的轨迹跟踪误差响应曲线也验证了上述的结论, PID 算法和 SC 算法全程存在较大的误差; ICM 和 UR 算法的误差都可以很快地趋近 0 参考线, 但是 UR 算法可以更快的逼近参考线, 并且稳态之后的误差绝对值更小. 图 6 为轨迹跟踪的控制输入响应曲线, UR 算法的控制输入也是四者之中最小的. 因此, 所提出的 UR 算法显

力,从结果可以看出 MSF 比 CVF 更快地跟踪上了正弦信号,MSF 输出的幅值波动也更加小.图 11 验证分别采用两种摩擦模型的 UR 算法的动态响应和稳态精度.从结果可以看出两者都没有超调.但是 MSF 的动态响应能力更好,在稳定之后的稳态精度也要比 CVF 好.综合上述,仿真结果表明,在同样的控制算法和参数下,MSF 模型的摩擦补偿策略能够提升系统的稳态精度,减少因为模型简化带来的性能损失,提高系统的跟踪精度和动态响应能力.

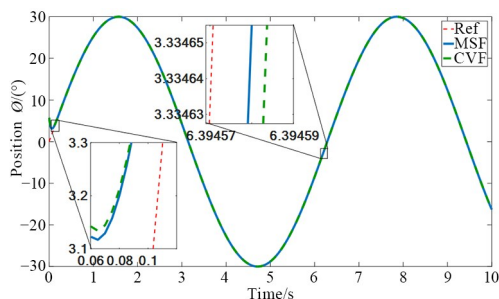


图 10 正弦信号响应曲线

Fig. 10 Response curve of sinusoidal signal

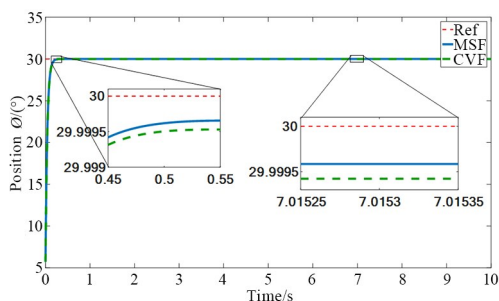


图 11 阶跃信号响应曲线

Fig. 11 Response curve of step signal

4 结论

本文提出了一种创新的鲁棒控制方案,旨在实现飞行机械臂关节模组轨迹跟踪的优秀动态性能和鲁棒性.通过建立永磁同步系统的精确动态模型,并引入了改进的 Stribeck 摩擦模型,提高了摩擦补偿的精度.应用广义 Udwadia-Kalaba 方程,构建了等式约束和不等式约束框架,将轨迹跟踪问题转化为约束跟踪问题.等式约束控制项考虑了初值不相容、系统不确定性和外部扰动情况,不等式约束控制项采用微分同构进行转化.设计的控制器中, u_1 项为理想条件下的期望约束力; u_2 项为保证系统初始条件不相容时,使系统服从约束的控制项; u_3 项为解决系统中存在的不确定性和外部扰动的问题; u_4 项为确保系统在人为设定的范围中

运动,避免发生部件碰撞造成系统损坏.通过仿真验证,展示了 UR 控制器在瞬态响应、稳态精度、轨迹跟踪精度和鲁棒性方面优于其他算法.

参考文献

- [1] 张守强. 高压带电作业现状分析及发展研究[D]. 济南: 山东大学, 2021.
ZHANG S Q. Current situation analysis and development research of high voltage live operation [D]. Jinan: Shandong University, 2021. (in Chinese)
- [2] 王建, 夏震, 王景熙, 等. 配电网不停电作业现场条件及作业方法[J]. 电力与能源, 2023, 44(5): 524—528.
WANG J, XIA Z, WANG J X, et al. Field conditions and working methods for non-blackout operation of distribution network [J]. Power & Energy, 2023, 44(5): 524—528. (in Chinese)
- [3] 黄山, 吴振升, 任志刚, 等. 电力智能巡检机器人研究综述[J]. 电测与仪表, 2020, 57(2): 26—38.
HUANG S, WU Z S, REN Z G, et al. Review of electric power intelligent inspection robot [J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2020, 57(2): 26—38. (in Chinese)
- [4] 王云龙, 赵君臣, 牛立壮, 等. 无人机配网带电作业技术研究与展望[J]. 价值工程, 2024, 43(15): 162—164.
WANG Y L, ZHAO J C, NIU L Z, et al. Research and prospect on UAV live working technology for distribution network [J]. Value Engineering, 2024, 43(15): 162—164. (in Chinese)
- [5] WANG Z Y, GAO Q, XU J B, et al. A review of UAV power line inspection [C]//Advances in Guidance, Navigation and Control. Singapore: Springer Singapore, 2022: 3147—3159.
- [6] 王辰羽. 基于机械臂的无人机检修作业系统设计与实现[D]. 天津: 天津工业大学, 2021.
WANG C Y. Design and implementation of UAV maintenance operating system based on robot arm [D]. Tianjin: Tianjin Polytechnic University, 2021. (in Chinese)
- [7] 张国强, 杜锦华. 永磁同步电机无位置传感器控制技术综述[J]. 电机与控制应用, 2024, 51(1): 1—13.
ZHANG G Q, DU J H. Review of position sensor-

less control technology for permanent magnet synchronous motors [J]. *Electric Machines & Control Application*, 2024, 51(1): 1–13. (in Chinese)

[8] ZHEN S C, MENG C Q, LIU X L, et al. Robust trajectory tracking control design for the robotic arm with uncertainty and experimental validation [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2024, 30(19/20): 4351–4367.

[9] 吕从鑫, 汪波, 陈静波, 等. 永磁同步电机控制策略综述与展望[J]. *电气传动自动化*, 2022, 44(4): 1–10.

LYU C X, WANG B, CHEN J B, et al. Review and prospect of control strategies for permanent magnet synchronous motors [J]. *Electric Drive Automation*, 2022, 44(4): 1–10. (in Chinese)

[10] 林洪兵, 狄凯杰, 杨婧, 等. 基于模糊 PID 伺服电机控制策略设计[J]. *山东工业技术*, 2024(1): 74–80.

LIN H B, DI K J, YANG J, et al. Design of servo motor control strategy based on fuzzy PID [J]. *Journal of Shandong Industrial Technology*, 2024(1): 74–80. (in Chinese)

[11] 曲萍萍, 韩俊杰, 姚橹, 等. 永磁同步电机自适应分数阶 PID 速度控制[J]. *北华大学学报(自然科学版)*, 2025, 26(2): 273–280.

QU P P, HAN J J, YAO L, et al. Self-tuning fractional order PID speed control of permanent magnet synchronous motor [J]. *Journal of Beihua University (Natural Science)*, 2025, 26(2): 273–280. (in Chinese)

[12] 张艺镪, 张涛, 李勇, 等. 基于变论域模糊迭代学习的直线电机位置控制[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(12): 45–53.

ZHANG Y Q, ZHANG T, LI Y, et al. Position control of PMLSM based on variable universe fuzzy iterative learning [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(12): 45–53. (in Chinese)

[13] 冯建鑫, 巩建雄, 李昊阳, 等. 基于改进扰动观测器的永磁同步电机鲁棒自适应控制[J/OL]. *吉林大学学报(工学版)*, 1–8 [2025-03-02]. <https://doi.org/10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20240790>.

FENG J X, GONG J X, LI H Y, et al. Robust adaptive control of permanent magnet synchronous motor based on improved disturbance observer [J/OL]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)* 1–8 [2025-03-02]. <https://doi.org/10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20240790>.

[14] 文利燕, 任秋萍, 姜斌, 等. 基于状态预测的永磁同步电机自适应扰动抑制方法[J/OL]. *控制理论与应用*, 1–9 [2025-03-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.TP.20240830.1529.075.html>.

WEN L Y, REN Q P, JIANG B, et al. Adaptive disturbance suppression method of permanent magnet synchronous Motor based on State Prediction [J/OL]. *Control Theory and Applications*, 1–9 [2025-03-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.TP.20240830.1529.075.html>.

[15] 章东旭, 李伟, 孔科研, 等. 基于分数阶滑模自抗扰控制的六自由度串联机械臂研究[J]. *动力学与控制学报*, 2025, 23(1): 49–58.

ZHANG D X, LI W, KONG K Y, et al. Research on six-degree-of-freedom series manipulator based on fractional order sliding mode active disturbance rejection control [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(1): 49–58. (in Chinese)

[16] 赵鑫宇, 王丽梅. 分数阶变增益超螺旋终端滑模位置控制 [J/OL]. *控制理论与应用*, 1–9 [2025-03-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.TP.20240830.1259.016.html>.

ZHAO X Y, WANG L M. Fractional order variable gain superspiral terminal sliding mode position control [J/OL]. *Control Theory & Applications*, 2024: 1–9. [2025-03-02]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/44.1240.TP.20240830.1259.016.html>. (in Chinese)

[17] 席隆兴, 敖邦乾, 马家庆, 等. PMSM 自适应分数阶滑模控制器设计[J]. *电子测量技术*, 2024, 47(16): 58–64.

XI L X, AO B Q, MA J Q, et al. Design of a PMSM adaptive fractional order sliding mode controller [J]. *Electronic Measurement Technology*, 2024, 47(16): 58–64. (in Chinese)

[18] 杨狂彪, 陈鼎新, 石坚. 低复杂度永磁同步电机双矢量模型预测控制策略[J]. *电机与控制应用*, 2024, 51(1): 87–96.

YANG K B, CHEN D X, SHI J. Low complexity dual vector model predictive control strategy for permanent magnet synchronous motor [J]. *Electric Machines & Control Application*, 2024, 51(1): 87–96. (in Chinese)

[19] 阎世梁, 王银玲, 路丹丹, 等. 基于深度神经网络的永磁直线电机仿真与优化[J]. *系统仿真学报*, 2024, 36(3): 713–725.

YAN S L, WANG Y L, LU D D, et al. Simulation

- and optimization of permanent magnet linear machine based on deep neural network [J]. *Journal of System Simulation*, 2024, 36(3): 713—725. (in Chinese)
- [20] 李明阳, 贾红云, 陈卓. 基于双神经网络自学习的 IPMSM 自抗扰控制[J]. *武汉大学学报(工学版)*, 2024, 57(2): 201—208.
- LI M Y, JIA H Y, CHEN Z. Active disturbance rejection control of IPMSM based on double neural network self-learning [J]. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2024, 57(2): 201—208. (in Chinese)
- [21] HUANG K, MA C, LI C M, et al. High-order robust control and Stackelberg game-based optimization for uncertain fuzzy PMSM system with inequality constraints [J]. *ISA Transactions*, 2023, 134: 451—459.
- [22] 张新荣, 谭宇航, 贾一帆, 等. 四轮独立驱动电动汽车路径跟踪鲁棒控制[J]. *汽车工程*, 2023, 45(2): 253—262, 312.
- ZHANG X R, TAN Y H, JIA Y F, et al. Robust control of path tracking for four-wheel independent drive electric vehicles [J]. *Automotive Engineering*, 2023, 45(2): 253—262, 312. (in Chinese)
- [23] ZHANG X R, SONG B Y, YANG Z Y, et al. Optimal robust vehicle motion control under equality and inequality constraints [J]. *Asian Journal of Control*, 2023, 25(3): 2031—2047.
- [24] UDWADIA F E, KALABA R E. On the foundations of analytical dynamics [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2002, 37(6): 1079—1090.
- [25] ZHAO R Y, LI M, NIU Q, et al. Udwadia-Kalaba constraint-based tracking control for artificial swarm mechanical systems: dynamic approach [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(3): 2381—2399.
- [26] 陈力. 基于 Udwadia-Kalaba 方程的机械臂末端轨迹跟踪控制研究[D]. 西安: 长安大学, 2018.
- CHEN L. Research on end trajectory tracking control of robotic arm based on Udwadia-Kalaba equation [D]. Xi'an: Changan University, 2018. (in Chinese)
- [27] SUN H, TU L C, YANG L W, et al. Adaptive robust control for nonlinear mechanical systems with inequality constraints and uncertainties [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2023, 53(3): 1761—1772.
- [28] CHEN Y H. Performance analysis of controlled uncertain systems [J]. *Dynamics and Control*, 1996, 6(2): 131—142.
- [29] YU R R, CHEN Y H, HAN B K. Cooperative game approach to robust control design for fuzzy dynamical systems [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7): 7151—7163.
- [30] CORLESS M. Control of uncertain nonlinear systems [J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1993, 115(2B): 362—372.