

底鼓触发器的参数共振及其分岔分析^{*}

张风¹ 李险峰^{1†} 魏周超²

(1. 兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

(2. 中国地质大学(武汉) 数学与物理学院, 武汉 430074)

摘要 工程学中的许多参数激励振动都会产生带有非线性项的 Mathieu 方程. 本文以底鼓触发器为实物模型, 将底鼓槌子的击打过程等效为一个类 Kapitza 单摆系统, 运用泰勒展开得到含有五次方非线性项的 Mathieu-Duffing 方程. 并采用摄动法全面分析了首个参数共振舌域的过渡曲线及附近的稳定性变化, 确定了系统具有多个平衡点共存. 借助雅可比矩阵的特征值, 详细揭示了平衡点处超临界叉式分岔与亚临界叉式分岔的发生机制, 深入探讨了分岔与非线性参数之间的内在关联. 最后运用数值模拟得到了在三维参数状态空间中的首个参数共振舌域的分岔图, 并验证了理论推导的正确性.

关键词 Mathieu-Duffing 方程, 摄动法, 过渡曲线, 超(亚)临界叉式分岔

中图分类号: O322

文献标志码: A

Parametric Resonance and Bifurcation Analysis of a Model of Bass Drum Beater^{*}

Zhang Feng¹ Li Xianfeng^{1†} Wei Zhouchao²

(1. School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

(2. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences (Wuhan), Wuhan 430074, China)

Abstract In engineering systems, many parametrically excited vibrations can be modeled by the Mathieu equation with nonlinear terms. This study establishes a physical model using a bass drum trigger, where the striking process of the drum beater is equivalently represented as a Kapitza-like pendulum system. Through Taylor expansion, we derive a Mathieu-Duffing equation incorporating a quintic nonlinear term. A perturbation method is systematically employed to analyze the transition curves and stability variations near the first parametric resonance tongue, revealing the coexistence of multiple equilibrium points in the system. By investigating the eigenvalues of the Jacobian matrix, we explicitly demonstrate the emergence mechanisms of both supercritical and subcritical pitchfork bifurcations at equilibrium points, with particular emphasis on their intrinsic relationships with nonlinear parameters. Numerical simulations are conducted to reconstruct the bifurcation diagram within the three-dimensional parameter state space for the first resonance tongue, thereby validating the theoretical predictions. The results comprehensively illustrate the intricate interplay between parametric excitation, nonlinear stiffness, and bifurcation dynamics in such hybrid oscillator systems.

Key words Mathieu-Duffing equation, perturbation method, transition curve, supercritical (subcritical) pitchfork bifurcation

2025-02-18 收到第 1 稿, 2025-03-07 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12462002), 甘肃省自然科学基金资助项目(22JR5RA348), National Natural Science Foundation of China (12462002), Project Funded by Gansu Provincial Natural Science Foundation(22JR5RA348).

[†] 通信作者 E-mail: lixf@lztu.edu.cn

引言

底鼓是一种低音打击乐器,广泛应用于管弦乐队、军乐队和流行乐队中,主要用于产生深沉、震撼的低频声音.其实物照片如图 1(a)所示.整套底鼓装置包括底鼓和击打装置,其中底鼓鼓壳通常由木材、塑料或金属材料制成,尺寸较大,音色受到材质和厚度的影响,鼓膜则由塑料等合成材料制成,其张紧度与厚度决定了音色的稳定性和响度.击打装置则通过底鼓触发器中的击槌对鼓膜进行持续打击,其幅度直接影响音频的强度和音色特性.将底鼓槌子的摆动过程等效为类 Kapitza 单摆系统的模型,其等效模型如图 1(b)所示.在该模型中,槌子被视为一个受外部周期性驱动力(例如鼓手脚踏踏板施加的周期性推动力)影响的摆动系统.外力的周期性施加使得槌子的振动行为与 Kapitza 单摆中的非线性动态响应相似^[1].槌子的振幅和角度不仅受到外力幅度的影响,还与槌子的固有频率及外力频率之间的匹配关系密切相关.当外力频率接近槌子的固有频率时,槌子的振幅将显著放大,表现出典型的共振现象;而在其他频率范围内,槌子的振幅则较小.这一过程揭示了类 Kapitza 单摆系统中的共振特性及其非线性响应特征.

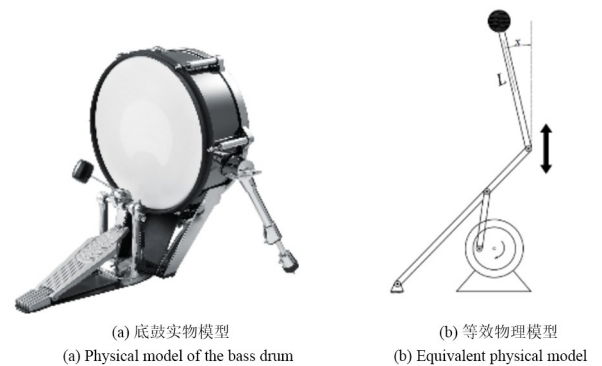


图 1 底鼓的实物照片与其对应的等效物理模型
Fig. 1 The physical photo of the bass drum and its corresponding equivalent physical model

在复杂动力学系统的研究中,具有周期性驱动的非线性振动系统一直是一个重要的研究方向.作为研究周期性驱动下非线性系统行为的经典模型,Kapitza 单摆系统已经被广泛应用于探索多种动态现象.近年来,研究者们不仅仅关注 Kapitza 单摆系统的基本动力学特性,还扩展了其应用范围,并对其稳定性与分岔行为进行了深入分析^[2].Gloy 等^[3]提出了通过引入驱动的环形螺旋形状作为

Kapitza 单摆的推广模型,进而探讨了这种新型几何配置下的动力学行为.此外,Citro 等^[4]研究了多体 Kapitza 单摆的动态稳定性,并分析了在不同驱动条件下系统的稳定区域,揭示了其在多体相互作用下的复杂性.文献^[5]进一步地分析了 Mathieu-Duffing 方程的稳定性与分岔行为,为周期性非线性系统的稳定性研究提供了强有力的理论依据.这些研究都为非线性系统的稳定性分析、分岔理论以及多体动力学系统的研究提供了不同的分析方法.

Mathieu 方程是一种含有周期时变系数的线性微分方程.因其本身具有复杂的动力学特性,在工程领域和动力学领域,如裂纹转子振动系统、齿轮啮合模型、轮对轨道耦合动力学模型、阻尼激励隔振机械装置结构、斜拉索-桥耦合参数振动模型中,都有广泛的应用^[6-10].随着众多学者对 Mathieu 方程的深入研究,促使其形式也得到了丰富拓展.Qian 等^[11]研究了在参数激励和强迫激励作用下的斜拉桥拉索的非线性动力学问题,利用多尺度方法分析了 1/2 参激共振下的动力学响应.申永军等^[12-14]对分数阶拟周期 Mathieu 方程进行了动力学分析.陈予恕等^[15-17]对 Van der Pol-Duffing-Mathieu 型系统的动力学响应进行了研究.丁千等^[18,19]对直齿圆柱齿轮啮合耦合振动系统和主动控制压电旋转悬臂梁的参数振动进行了研究,对其稳定性进行了分析.黄建亮等^[20]对 Van der Pol-Mathieu 方程的动力学特性进行了研究,应用改进的谐波平衡法精确计算出了方程的准周期响应.此外,拟周期系数 Mathieu 方程通常被应用于一些特殊的动力系统^[21-27],如含双频激励时变刚度的高速列车受电弓非线性模型^[21],高速列车受电弓-悬链线组合系统^[22],尤其是海上的一些浮力装置^[23-25],研究周期性波浪对设备及船舶的一些影响,避免灾难的发生.Rand 等则针对拟周期 Mathieu 方程不同共振状态的稳定区域进行了深入研究^[26,27].但这些研究通常以非线性低阶次方项或线性化后的 Mathieu-Duffing 方程为主要研究对象^[20-28].

本文以底鼓触发器为实物模型,将其等效为一个类 Kapitza 单摆系统.为了更进一步得到更符合实际运动过程的模型,利用泰勒展开得到一个含有五次方非线性项的 Mathieu-Duffing 方程.采用摄动法分析了第一个参数共振舌域的过渡曲线及其

附近的平衡点的稳定性变化规律,并进一步明确了系统有多个共存平衡点.借助雅可比矩阵特征值,详细分析了平衡点处超临界叉式分岔与亚临界叉式分岔的发生机制,并深入探讨了这两类分岔与非线性参数之间的内在关联性.最后数值模拟了系统在 $A-\omega_1-B$ 参数空间中的首个参数共振舌域的分岔图.

1 模型分析

在等效模型中,底鼓槌子的运动满足欧拉-拉格朗日方程,它的相位 x 与它的位置关系满足如下方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}, \quad (1)$$

其中 $\mathcal{L}$ 是拉格朗日函数,并且

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m L^2 \dot{x}^2 + m L (g + C \omega_p^2 \cos \omega_p t) \cos x, \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得到系统所对应的控制微分方程

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) \sin x = 0, \quad (3)$$

其中 $\omega_n^2 = g/L$, $\epsilon = -A\omega_p^2/L$.

在相关式子里面, x 属于广义坐标,它能够决定角位移的情况.而常数 M 、 g 、 L 、 A 以及 ω_p 各自有着明确的物理意义,其中 M 代表球的质量, g 表示重力, L 为杆的长度, A 则是垂直振荡的幅度, ω_p 为垂直振荡的频率.

方程(3)在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 这两个点处存在平衡点.针对 x 取较小值的情形,可以运用泰勒展开把式(3)改写为如下形式,进而对各平衡点的局部稳定性展开研究.

$$\ddot{x} \pm (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) x = 0 \quad (4)$$

其中,正号与负号各自对应着 $x=0$ 以及 $x=\pi$ 的平衡点.就非参数激励系统而言, $x=0$ 时处于稳定状态,而 $x=\pi$ 时则是不稳定的.当存在参数激励且参数频率有所不同时,这两个平衡点的稳定性均会出现改变.在大多数的研究中^[5],基本用泰勒展开式的前两项 $x-x^3/6$ 来近似 $\sin x$,可以得到如下系统

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) \left(x - \frac{x^3}{6} \right) = 0.$$

此时假设 x 很小,约为 ϵ 的平方根量级,因此,令 $x = \sqrt{\epsilon} y$,这样就能得到

$$\ddot{y} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) \left(y - \epsilon \frac{y^3}{6} \right) = 0,$$

$$\ddot{y} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) y - \epsilon \frac{\omega_n^2 y^3}{6} + O(\epsilon^2) = 0.$$

如此可得含有三次非线性项的 Mathieu 方程,

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) x + \epsilon \alpha x^3 = 0.$$

对于 x 小的时候,我们认为非线性项 x^3 并不是特别小,为此用泰勒展开式的前三项 $x - x^3/6 + x^5/120 + O(x^7)$ 来近似 $\sin x$,可以得到如下系统

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \right] = 0.$$

令 $x = \sqrt{\epsilon} y$,这样我们就能得到

$$\ddot{y} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) \left[y - \epsilon \frac{y^3}{6} + \epsilon^2 \frac{y^5}{120} + O(\epsilon^3 y^7) \right] = 0,$$

$$\ddot{y} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) y - \epsilon \frac{\omega_n^2 y^3}{6} - \epsilon^2 \frac{y^3}{6} \cos \omega_p t + \epsilon^2 \frac{\omega_n^2 y^5}{120} + O(\epsilon^3 y^7) = 0,$$

$$\ddot{y} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) y - \epsilon \frac{\omega_n^2 y^3}{6} - \epsilon^2 \frac{y^3}{6} \cos \omega_p t + \epsilon^2 \frac{\omega_n^2 y^5}{120} + O(\epsilon^3 y^7) = 0.$$

为了使结果在 $x \approx 0$ 与 ϵ 处近似更为精确,将偏大的非线性项略去,偏小的非线性项也略去,即直接取非线性项为五次方项,可得如下具有五次非线性项的 Mathieu 方程

$$\ddot{x} + (\omega_n^2 + \epsilon \cos \omega_p t) x + \epsilon \alpha x^5 = 0 \quad (5)$$

2 稳定性分析

将 x 和 ω_n 展开成下列的幂级数

$$x = x_0 + x_1 \epsilon + x_2 \epsilon^2 + x_3 \epsilon^3 + x_4 \epsilon^4 + x_5 \epsilon^5 + \dots, \quad (6)$$

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 + \omega_1 \epsilon + \omega_2 \epsilon^2 + \omega_3 \epsilon^3 + \omega_4 \epsilon^4 + \omega_5 \epsilon^5 + \dots \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(5),并且合并同次项得到

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_1 x_0 - x_0 \cos \omega_p t - \alpha x_0^5, \quad (9)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\omega_1 x_1 - \omega_2 x_0 - x_1 \cos \omega_p t - 5\alpha x_0^4 x_1, \quad (10)$$

$$\ddot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 = -\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1 - x_2 \cos \omega_p t - 5\alpha x_0^4 x_2 - 10\alpha x_0^3 x_1^2 \quad (11)$$

由于式(5)中的五次非线性项,额外的五次和四次项出现在式(9)和式(10)中,与线性情况一样,所以式(8)的解为

$$x_0(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (12)$$

将式(12)代入到式(9)中,得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & -\omega_1 x_0 - x_0 \cos \omega_p t - \alpha x_0^5 = -\omega_1 (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) - (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) \cos \omega_p t - \\ & \alpha (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t)^5 = -\omega_1 A \cos \omega_0 t - \omega_1 B \sin \omega_0 t - \frac{A}{2} \cos(\omega_0 + \omega_p)t - \frac{A}{2} \cos(\omega_0 - \omega_p)t - \\ & \frac{B}{2} \sin(\omega_0 + \omega_p)t + \frac{B}{2} \sin(\omega_0 - \omega_p)t - \frac{5\alpha A^5}{8} \cos \omega_0 t - \frac{5\alpha A^5}{16} \cos 3\omega_0 t - \frac{\alpha A^5}{16} \cos 5\omega_0 t - \frac{15\alpha A^4 B}{8} \sin \omega_0 t - \\ & \frac{5\alpha A^4 B}{4} \sin 3\omega_0 t + \frac{5\alpha A^4 B}{4} \sin \omega_0 t - \frac{5\alpha A^4 B}{16} \sin 5\omega_0 t + \frac{5\alpha A^4 B}{16} \sin 3\omega_0 t - \frac{15\alpha A^3 B^2}{4} \cos \omega_0 t + \\ & \frac{15\alpha A^3 B^2}{8} \cos 3\omega_0 t + \frac{15\alpha A^3 B^2}{8} \cos \omega_0 t - \frac{5\alpha A^3 B^2}{4} \cos 3\omega_0 t + \frac{5\alpha A^3 B^2}{8} \cos 5\omega_0 t + \frac{5\alpha A^3 B^2}{8} \cos \omega_0 t - \\ & \frac{15\alpha A^2 B^3}{4} \sin \omega_0 t + \frac{5\alpha A^2 B^3}{4} \sin 3\omega_0 t - \frac{15\alpha A^2 B^3}{8} \sin 3\omega_0 t + \frac{15\alpha A^2 B^3}{8} \sin \omega_0 t + \frac{5\alpha A^2 B^3}{8} \sin 5\omega_0 t + \\ & \frac{5\alpha A^2 B^3}{8} \sin \omega_0 t - \frac{15\alpha A B^4}{8} \cos \omega_0 t + \frac{5\alpha A B^4}{4} \cos 3\omega_0 t + \frac{5\alpha A B^4}{4} \cos \omega_0 t - \frac{5\alpha A B^4}{16} \cos 5\omega_0 t - \frac{5\alpha A B^4}{16} \cos 3\omega_0 t - \\ & \frac{5\alpha B^5}{8} \sin \omega_0 t + \frac{5\alpha B^5}{16} \sin 3\omega_0 t - \frac{\alpha B^5}{16} \sin 5\omega_0 t \end{aligned} \quad (13)$$

合并同类项得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & -\frac{A}{2} \cos(\omega_0 + \omega_p)t - \frac{A}{2} \cos(\omega_0 - \omega_p)t - \frac{B}{2} \sin(\omega_0 + \omega_p)t + \frac{B}{2} \sin(\omega_0 - \omega_p)t + \\ & \left[-\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 - \omega_1 \right] A \cos \omega_0 t - \left[\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 + \omega_1 \right] B \sin \omega_0 t - \frac{5\alpha}{16} (A^4 - 2A^2 B^2 - 3B^4) A \cos 3\omega_0 t - \\ & \frac{5\alpha}{16} (3A^4 + 2A^2 B^2 - B^4) B \sin 3\omega_0 t - \frac{\alpha}{16} (A^4 - 10A^2 B^2 + 5B^4) A \cos 5\omega_0 t - \frac{\alpha}{16} (5A^4 - 10A^2 B^2 + B^4) A \sin 5\omega_0 t, \end{aligned} \quad (14)$$

其中包含频率的谐波函数 $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \omega_0 \pm \omega_p$. 令

$$\omega_0 - \omega_p = -\omega_0 \rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_p}{2} \quad (15)$$

将式(15)代入到式(14)得到

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{\omega_p^2}{4} x_1 = & \left[-\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 - \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \right) \right] A \cos \frac{1}{2} \omega_p t - \left[\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 + \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right) \right] B \sin \frac{1}{2} \omega_p t - \\ & \left[\frac{5\alpha}{16} (A^4 - 2A^2 B^2 - 3B^4) + \frac{1}{2} \right] A \cos \frac{3}{2} \omega_p t - \left[\frac{5\alpha}{16} (3A^4 + 2A^2 B^2 - B^4) + \frac{1}{2} \right] B \sin \frac{3}{2} \omega_p t - \\ & \frac{\alpha}{16} (A^4 - 10A^2 B^2 + 5B^4) A \cos \frac{5}{2} \omega_p t - \frac{\alpha}{16} (5A^4 - 10A^2 B^2 + B^4) A \sin \frac{5}{2} \omega_p t. \end{aligned} \quad (16)$$

需要同时满足以下条件才可消去永年项

$$\left[-\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 - \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \right) \right] A = 0, \quad (17)$$

$$\left[\frac{5\alpha}{8} (A^2 + B^2)^2 + \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right) \right] B = 0, \quad (18)$$

继而可得

$$\omega_1 = \pm \frac{1}{2}, \quad (19)$$

所以第一共振舌过渡曲线的幂级数为

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_p^2}{4} + \frac{1}{2} \epsilon + o(\epsilon^5), \quad (20)$$

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_p^2}{4} - \frac{1}{2} \epsilon + o(\epsilon^5). \quad (21)$$

同理可以求得第二共振舌过渡曲线的幂级数为

$$\omega_n^2 = \omega_p^2 - \frac{1}{12\omega_p^2} \epsilon^2 + o(\epsilon^5), \quad (22)$$

$$\omega_n^2 = \omega_p^2 + \frac{5}{12\omega_p^2} \epsilon^2 + o(\epsilon^5). \quad (23)$$

3 第一舌分岔

令 $A = R \cos \theta, B = R \sin \theta$, 代入式(17)和式(18)得到

$$\left[-\frac{5\alpha}{8} R^4 - \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \right) \right] R \cos \theta = 0, \quad (24)$$

$$\left[\frac{5\alpha}{8} R^4 + \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right) \right] R \sin \theta = 0. \quad (25)$$

通过解式(24)和式(25)可以得到 9 个平衡点 $R_i (i=1,2,\dots,8,9)$ 分别为

$$R_1 = 0, \quad (26)$$

$$R_{2,3,4,5}^4 = -\frac{8}{5\alpha} \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right),$$

这些平衡点的局部稳定性由式(17)和式(18)所对应的雅可比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{5\alpha}{8}(4A^3B + 4AB^3) & \frac{5\alpha}{8}(A^4 + 6A^2B^2 + 5B^4) + \left(\omega_1 - \frac{1}{2} \right) \\ -\frac{5\alpha}{8}(5A^4 + 6A^2B^2 + B^4) - \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \right) & -\frac{5\alpha}{8}(4A^3B + 4AB^3) \end{bmatrix} \quad (29)$$

的特征值 λ 决定,

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \text{Det}(J) = 0 \quad (30)$$

其中

$$\text{Tr}(J) \equiv 0,$$

$$\text{Det}(J) = \frac{125(A^2 + B^2)^4 \alpha^2}{64} - \frac{1}{4} + \frac{5[3(A^2 + B^2)^2 \omega_1 - A^4 + B^4] \alpha}{4} + \omega_1^2 \quad (31)$$

又由于雅可比矩阵 J 的迹 $\text{Tr}(J)$ 恒等于 0, 显然可知雅可比矩阵 J 的两个特征值大小相同, 但符号相反. 且若 $\text{Det}(J) > 0$, 两个特征值都在虚轴上, 平衡点是稳定的(中心); 若 $\text{Det}(J) < 0$, 两个特征值都在实轴上, 平衡点是不稳定的(鞍). 因此稳定性的变化发生在 $\text{Det}(J) = 0$ 时. 将式(29)转化为极坐标, 代入式(26)~(28)得到平衡点处 $\text{Det}(J)$ 的表达式, 分别如下

$$\text{对于 } R_1: \text{Det} = \omega_1^2 - \frac{1}{4} \quad (32)$$

$$\text{对于 } R_{2,3,4,5}: \text{Det} = -4\omega_1 + 2 \quad (33)$$

$$\text{对于 } R_{6,7,8,9}: \text{Det} = +4\omega_1 + 2 \quad (34)$$

不同 ω_1 值下平衡点的行列式如图 2 所示.

(1) 当 $\alpha > 0$ 时实平衡点存在的条件为:

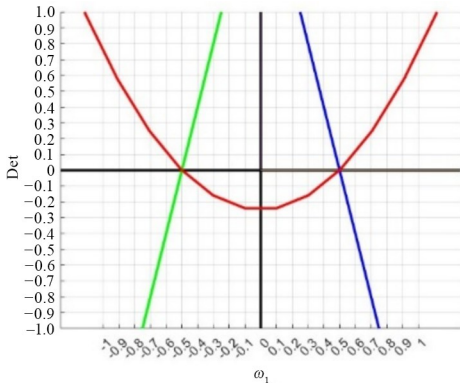


图 2 第一个共振舌附近平衡点的行列式

Fig. 2 The determinant of the equilibrium near the first resonant tongue

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \quad (27)$$

$$R_{6,7,8,9}^4 = -\frac{8}{5\alpha} \left(\omega_1 + \frac{1}{2} \right), \quad \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \quad (28)$$

对于平衡点 R_1 : 存在任意的 ω_1 , 都使得平衡点 $R_1 = 0$;

对于平衡点 $R_{2,3,4,5}$: 存在任意的 $\omega_1 < 1/2$, 都使得平衡点 $R_{2,3,4,5} > 0$;

对于平衡点 $R_{6,7,8,9}$: 存在任意的 $\omega_1 < -1/2$, 都使得平衡点 $R_{6,7,8,9} > 0$.

(2) 当 $\alpha < 0$ 时实平衡点存在的条件为

对于平衡点 R_1 : 存在任意的 ω_1 , 都使得平衡点 $R_1 = 0$;

对于平衡点 $R_{2,3,4,5}$: 存在任意的 $\omega_1 > 1/2$, 都使得平衡点 $R_{2,3,4,5} > 0$;

对于平衡点 $R_{6,7,8,9}$: 存在任意的 $\omega_1 > -1/2$, 都使得平衡点 $R_{6,7,8,9} > 0$.

当穿越过渡曲线时, 对于恒定的 ϵ 值, 会发生超临界和亚临界叉式分岔(即新平衡点的产生). 图 3 给出了 $\alpha > 0$ 和 $\alpha < 0$ 两种情况的分岔示意图.

对于 $\alpha < 0$, 要求 R_1 、 $R_{2,3,4,5}$ 、 $R_{6,7,8,9}$ 在第一个舌形区域的左侧, 原点是唯一的中心. 同时随着逐渐地增加 ω_1 的值并接近左侧的过渡曲线, R_1 和 $R_{6,7,8,9}$ 的行列式值之和为 0. 然后, 当穿过左侧过渡曲线时, R_1 和 $R_{6,7,8,9}$ 处 $\text{Det}(J)$ 穿过 ω_1 轴, 此时发生超临界叉式分岔, 使得原点处的平衡点变为鞍点, 并且产生两个新的中心. 图 4(a)用数值仿真的结果验证了分析结果的正确性, $\alpha = -0.7$. 随着 ω_1 的值进一步增加并且穿过右侧的过渡曲线时, R_1 和 $R_{2,3,4,5}$ 处 $\text{Det}(J)$ 穿过 ω_1 轴, 此时发生亚临界叉式分岔, 原点再次变为中心, 并且产生两个新的鞍点.

对于 $\alpha > 0$, 要求 R_1 、 $R_{2,3,4,5}$ 、 $R_{6,7,8,9}$ 在第一个舌形区域的右侧, 原点是唯一的中心. 同时通过逐渐减小 ω_1 的值并接近右侧的过渡曲线时, R_1 和 $R_{2,3,4,5}$ 的行列式之和也等于 0. 然后, 当穿过右侧过渡曲线时, R_1 和 $R_{2,3,4,5}$ 处 $\text{Det}(J)$ 穿过 ω_1 轴, 此时

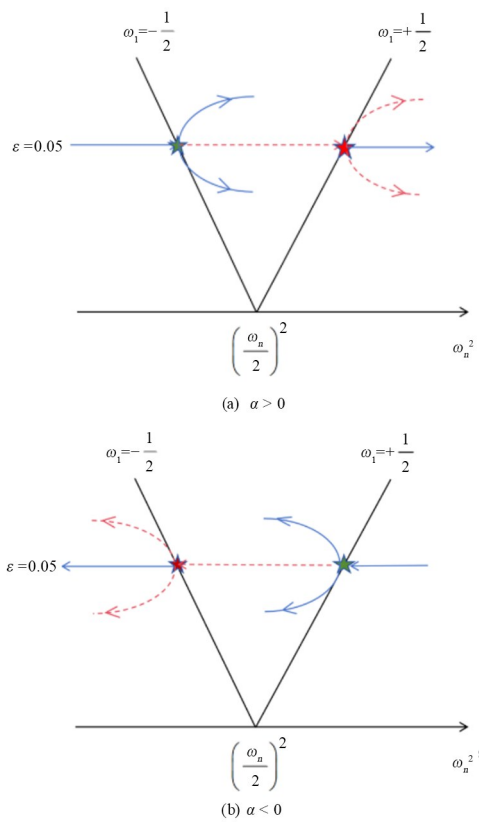


图3 第一舌周围的超临界和亚临界叉式分岔，分别用绿色和红色星号表示
Fig. 3 The supercritical and subcritical pitchfork bifurcations near the first resonant tongue, which are distinguished by green and red asterisks, respectively

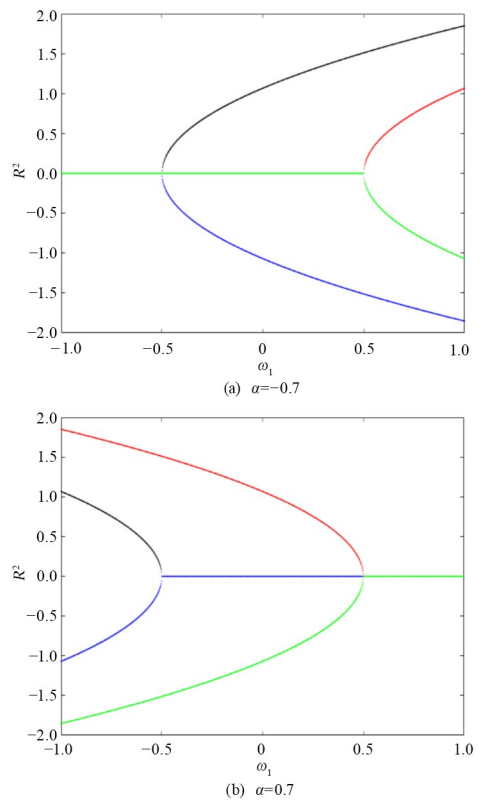


图4 α 取不同值时的分岔图
Fig. 4 The bifurcation diagrams corresponding to different α

发生超临界叉式分岔,使得原点处的平衡点变为鞍点,并且产生两个新的中心.随着 ω_1 的值进一步减小并且穿过左侧的过渡曲线时, R_1 和 $R_{6,7,8,9}$ 处 $\text{Det}(\mathbf{J})$ 逐渐趋近于0并且穿过 ω_1 轴,此时发生亚临界叉式分岔,原点再次变为中心,并且产生两个新的鞍点.图4(b)用数值仿真的结果验证了分析结果的正确性, $\alpha=0.7$.图4(c)给出了利用延续算法检测的分岔点,此处超临界和亚临界叉式分岔都标记为BP.取定参数 $\alpha=0.7$,图5~图7给出了 ω_1 分别取1、0、-1时,依赖于不同初始值的多吸引子

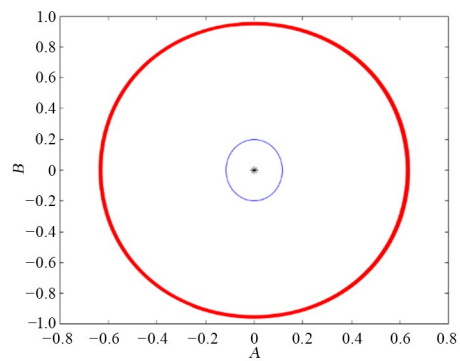


图5 $\alpha=0.7, \omega_1=1$ 时和不同初始值下共存吸引子的相图
Fig. 5 The phase diagram of coexisting attractors with different initial values, $\alpha=0.7, \omega_1=1$

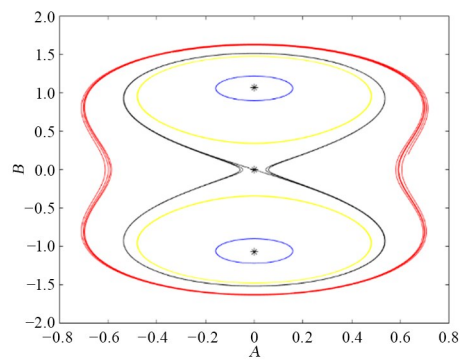


图6 $\alpha=0.7, \omega_1=0$ 时和不同初始值下共存吸引子的相图
Fig. 6 The phase diagram of coexisting attractors with different initial values, $\alpha=0.7, \omega_1=0$

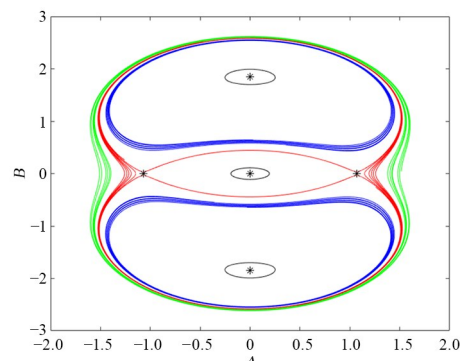


图7 $\alpha=0.7, \omega_1=-1$ 时和不同初始值下共存吸引子的相图
Fig. 7 The phase diagram of coexisting attractors with different initial values, $\alpha=0.7, \omega_1=-1$

共存的相图. 这些数值结果叠加在 $A-\omega_1-B$ 参数空间中, 如图 8 所示, 数值结果与理论分析结果完全一致.

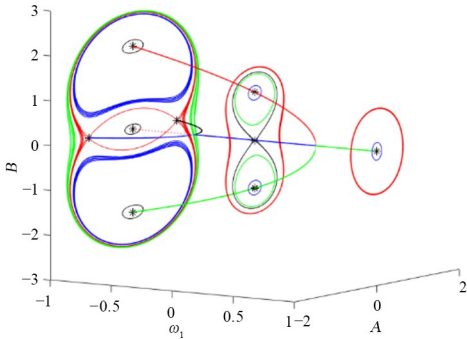


图 8 $\alpha=0.7$ 时系统在 $A-\omega_1-B$ 参数空间中的分岔图
Fig. 8 The bifurcation diagram of the system in the $A-\omega_1-B$ parameter space when $\alpha=0.7$

4 结论

本文以底鼓触发器为实物模型, 通过底鼓触发器中的击槌摆动过程建立了一个类 Kapitza 单摆系统的模型, 并推导出所对应的含有五次非线性项的 Mathieu-Duffing 方程. 通过摄动法, 精确地获得了过渡曲线的幂级数展开式, 特别是第一共振舌域与第二共振舌域的过渡曲线的具体表达式, 从而明确了系统发生动力学行为的关键的参数范围. 选取第一共振舌域对其进行分岔分析时, 不但精确地确定了多个平衡点, 还通过雅可比矩阵特征值分析, 系统地判定了这些平衡点的稳定性变化, 当平衡点穿越过渡曲线时, 会发生超临界和亚临界叉式分岔, 并给出了 $\alpha>0$ 和 $\alpha<0$ 两种情况的分岔示意图. 最后通过数值模拟验证了推导的正确性. 这一结论揭示了超临界叉式分岔与亚临界叉式分岔的发生机制, 并讨论了分岔与非线性参数之间的依赖关系.

参考文献

[1] BUTIKOV E I. An improved criterion for Kapitza's pendulum stability [J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2011, 44 (29): 295202.

[2] RICHARDS C J, SMART T J, JONES P H, et al. A microscopic Kapitza pendulum [J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 13107.

[3] GLOY J F, SIEMENS A, SCHMELCHER P. Driven toroidal helix as a generalization of the Kapit-

za pendulum [J]. Physical Review E, 2022, 105 (5): 054204.

[4] CITRO R, DALLA TORRE E G, D'ALESSIO L, et al. Dynamical stability of a many-body Kapitza pendulum [J]. Annals of Physics, 2015, 360: 694 — 710.

[5] AZIMI M. Stability and bifurcation of Mathieu-Duffing equation [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2022, 144: 104049.

[6] 李润方, 王建军. 齿轮系统动力学: 振动、冲击、噪声[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

LI R F, WANG J J. Dynamics of gear system: vibration, impact and noise [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese)

[7] 沈钢. 轨道车辆系统动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2014.

SHEN G. Railway vehicle system dynamics [M]. Beijing: China Railway Publishing House, 2014. (in Chinese)

[8] KECIK K, KAPITANIAK M. Parametric analysis of magnetorheologically damped pendulum vibration absorber [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2014, 14(8): 1440015.

[9] 陈水生, 孙炳楠. 斜拉桥索—桥耦合非线性参数振动数值研究[J]. 土木工程学报, 2003, 36(4): 70—75.

CHEN S S, SUN B N. Numerical study on nonlinear parametric vibration of coupled cables and bridge decks [J]. China Civil Engineering Journal, 2003, 36(4): 70—75. (in Chinese)

[10] 张丽娜, 李凤臣. 大跨度桥梁斜拉索的参数振动研究[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

ZHANG L N, LI F C. Parametric vibration study on stayed cable of large-span bridges [M]. Beijing: Science Press, 2017. (in Chinese)

[11] QIAN Z C, CHEN P C, ZHOU W G. Nonlinear dynamical analysis for the cable excited with parametric and forced excitation [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 183257.

[12] 郭建斌, 申永军, 李航. 分数阶拟周期 Mathieu 方程的动力学分析[J]. 力学学报, 2021, 53(12): 3366—3375.

GUO J B, SHEN Y J, LI H. Dynamic analysis of quasi-periodic Mathieu equation with fractional-order derivative [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(12): 3366 — 3375. (in Chinese)

[13] 郭建斌, 申永军. 分数阶 van der Pol-Mathieu 方程的

- 动力学分析[J]. 振动与冲击, 2023, 42(8): 62—68.
- GUO J B, SHEN Y J. Dynamic analysis of the van der Pol-Mathieu equation with fraction-order derivative [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(8): 62—68. (in Chinese)
- [14] 崔腾达, 申永军. 含分数阶微分项和参数激励的 Duffing-van der Pol 振子的动力学分析[J/OL]. 振动工程学报, 2025, 38(4): 715—721[2025-02-18]. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.04.006.
- CUI T D, SHEN Y J. Dynamic analysis of Duffing-van der Pol oscillators with fractional-order derivative and parametric excitation [J/OL]. Journal of Vibration Engineering, 2025, 38(4): 715—721[2025-02-18]. DOI: 10.16385/j.cnki.issn.1004-4523.2025.04.006.
- [15] 陈予恕, 徐鉴. van der Pol-Duffing-Mathieu 型系统主参数共振分岔解的普适分类[J]. 中国科学 (A 辑), 1995, 25(12): 1287—1297.
- CHEN Y S, XU J. Universal classification of bifurcation solutions for main parameter resonance of van der Pol-Duffing-Mathieu type systems [J]. Science in China (Series A), 1995, 25(12): 1287—1297. (in Chinese)
- [16] 侯磊, 陈予恕, 李忠刚. 一类两自由度参激系统在常数激励下的响应研究[J]. 物理学报, 2014, 63(13): 254—261.
- HOU L, CHEN Y S, LI Z G. Constant-excitation caused response in a class of parametrically excited systems with two degrees of freedom [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(13): 254—261. (in Chinese)
- [17] ZHOU L Q, CHEN F Q, CHEN Y S. Chaotic behavior on reduction of perturbed KdV equation in form of parametric excitation [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 24(4): 283—287.
- [18] 张微, 丁千. 直齿圆柱齿轮啮合耦合振动系统参数振动研究[J]. 工程力学, 2015, 32(5): 213—220.
- ZHANG W, DING Q. Research on properties for parametric vibration of a spur gear meshing and coupling system [J]. Engineering Mechanics, 2015, 32(5): 213—220. (in Chinese)
- [19] 唐冶, 王涛, 丁千. 主动控制压电旋转悬臂梁的参数振动稳定性分析[J]. 力学学报, 2019, 51(6): 1872—1881.
- TANG Y, WANG T, DING Q. Stability analysis on parametric vibration of piezoelectric rotating cantilever beam with active control [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(6): 1872—1881. (in Chinese)
- [20] 黄建亮, 王腾, 陈树辉. 含外激励 van der Pol-Mathieu 方程的非线性动力学特性分析[J]. 力学学报, 2021, 53(2): 496—510.
- HUANG J L, WANG T, CHEN S H. Nonlinear dynamic analysis of a van der Pol-Mathieu equation with external excitation [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(2): 496—510. (in Chinese)
- [21] GALEOTTI G, TONI P. Nonlinear modeling of a railway pantograph for high speed running [J]. Transactions on Modelling and Simulation, 1993, 5: 421—436.
- [22] HUAN R H, ZHU W Q, MA F, et al. The effect of high-frequency parametric excitation on a stochastically driven pantograph-catenary system [J]. Shock and Vibration, 2014, 1: 792673.
- [23] 张延峰, 董艳秋, 唐友刚, 等. 纵浪上基本参数共振对船舶稳性的影响[J]. 船舶力学, 1998, 2(3): 6—12.
- ZHANG Y F, DONG Y Q, TANG Y G, et al. The effect of fundamental parametric excitation on the stability of ships in longitudinal seas [J]. Journal of Ship Mechanics, 1998, 2(3): 6—12. (in Chinese)
- [24] 杨和振, 李华军. 参数激励下深海立管动力特性研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(9): 65—69, 78, 214.
- YANG H Z, LI H J. Vibration analysis of deep-sea risers under parametric excitations [J]. Journal of Vibration and Shock, 2009, 28(9): 65—69, 78, 214. (in Chinese)
- [25] MAO H, YANG H Z. Parametric pitch instability investigation of Deep Draft Semi-submersible platform in irregular waves [J]. International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering, 2016, 8(1): 13—21.
- [26] RAND R, MORRISON T. $2:1:1$ resonance in the quasi-periodic Mathieu equation [J]. Nonlinear Dynamics, 2005, 40(2): 195—203.
- [27] RAND R, KAMAR G. $2:2:1$ resonance in the quasiperiodic Mathieu equation [J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 31(4): 367—374.
- [28] FOSSEN T I, NIJMEIJER H. Parametric resonance in dynamical systems [M]. New York: Springer New York, 2012.