

盘式制动系统的稳定性和 Hopf 分岔分析^{*}

王国宇 张文 吴鑫 苏晗 乐源[†]

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 611756)

摘要 本文基于光滑处理后的 Stribeck 摩擦模型,建立了二自由度盘式制动系统非线性动力学模型. 采用 Routh-Hurwitz 判据对平衡点稳定性进行分析,并讨论了不同参数对制动系统稳定性的影响. 利用 Hurwitz 判据求得 Hopf 分岔点,再引入投影法计算分岔点处的第一 Lyapunov 系数并判断 Hopf 分岔类型,并对理论分析结果进行了数值验证. 研究表明:当制动盘角速度较低($\omega < 0.42$ rad/s)时,系统始终保持稳定;而角速度较高时,增大衰减因子或降低静摩擦系数可显著提高稳定性;随着制动力的增大和角速度的减小,系统的不稳定区域也随之扩大;而合理设计制动盘与刹车片的刚度比能优化系统稳定性;此外,系统在临界参数下发生亚临界 Hopf 分岔,系统平衡点的稳定性发生改变,产生不稳定的极限环,从而引发自激振动.

关键词 盘式制动系统, 稳定性, 投影法, Hopf 分岔

中图分类号:O313

文献标志码:A

Stability and Hopf Bifurcation Analysis of the Disc Brake System^{*}

Wang Guoyu Zhang Wen Wu Xin Su Han Yue Yuan[†]

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract Based on the smoothed Stribeck friction model, a nonlinear dynamic model of a two-degree-of-freedom disc braking system was established. The stability of the equilibrium points was analyzed using the Routh-Hurwitz criterion, and the influence of different parameters on the stability of the braking system was discussed. The Hopf bifurcation point was obtained using the Hurwitz criterion, and the first Lyapunov coefficient at the bifurcation point was calculated by introducing the projection method to determine the type of Hopf bifurcation. The theoretical analysis results were verified through numerical simulations. The study shows that when the angular velocity of the brake disc is low, the system remains stable; whereas when the angular velocity is high, increasing the attenuation factor or reducing the dynamic friction coefficient can significantly improve the stability. As the braking force increases and the angular velocity decreases, the unstable region of the system also expands; moreover a reasonable design of the stiffness ratio between the brake disc and the brake pad can optimize the stability of the system. In addition, the system undergoes subcritical Hopf bifurcation under critical parameters, whereby the stability of the equilibrium point changes, an unstable limit cycle is generated, and self-excited vibration is triggered.

Key words disc brake system, stability, projection method, Hopf bifurcation

2025-08-02 收到第 1 稿,2025-08-19 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12072291,12202168),国家青年科学基金资助项目(12302015);National Natural Science Foundation of China(12072291,12202168),National Science Foundation for Young Scientists of China(12302015).

[†] 通信作者 E-mail:leyuan2003@sina.com

引言

制动系统是汽车安全的核心部件之一,其性能直接影响车辆的制动效能、稳定性和舒适性. 盘式制动系统因其散热性好、制动响应快、维护方便等优势,现已成为现代乘用车的主流制动方案. 然而,在制动过程中,刹车片和摩擦盘之间的摩擦可能会导致振动的产生,进而引起噪声问题^[1],甚至影响制动的性能,例如:黏滑振动和模态耦合振动分别引发蠕变呻吟和制动尖叫现象^[2]. 因此,建立准确的动力学模型并分析其非线性行为,对消除摩擦制动、抑制振动噪声具有重要意义^[3].

近几十年来,国内外在摩擦振动方面取得了大量有意义的研究成果. 通过理论研究建立盘式制动器系统的简化数学模型是探讨摩擦诱发振动现象形成和演化的重要研究方法^[4,5]. Popp^[6]通过单自由度模型,发现摩擦系数随相对速度的增加而减小,法向制动力的波动是摩擦诱发振动的激励机制. 在此基础上,提出了通过增加外阻尼和附加外激励来降低振动的措施. Hetzler 等^[7]建立了单自由度模型,讨论了盘式制动系统的稳定性和局部分岔现象,并采用指数衰减的摩擦特性来解释制动过程中的制动尖叫现象. Chen 等^[8]建立了楔形制动系统的单自由度(DOF)扭转模型. 通过制动力放大功能可以得出,制动力、摩擦系数、楔角和激振频率对动态响应影响较大. Shin 等^[9]采用双自由度模型,其中制动盘和刹车片与滑动摩擦界面耦合,证明了当制动盘和摩擦块的固有频率相似时,会发生耦合效应,降低系统稳定性,更可能发生黏滑振动. Wei 等^[10]建立了一种新型双层摩擦片制动系统的三自由度模型,新结构下制动系统的动力学响应表明,随着制动力和系统参数的变化,系统的振动模式由双周期分岔变为混沌. Wang 等^[11]将盘式制动系统模型加入轮轨接触关系,建立了高速列车盘式制动系统的三自由度模型,并进行了黏滑振动分析. 结果表明,随着制动压力的增加,制动系统交替呈现周期和混沌运动. Zhou 等^[12]考虑了在轮轨黏附作用下的四自由度模型,得出了切向刚度主要影响振幅的变化,而法向刚度是引起振动混沌的主要因素. Crowther^[13]提出了一个四自由度扭转模型,将传动系统和制动扭转子系统与摩擦副耦合在一起,他根据库仑定律讨论了耦合系统在低恒

定驱动力矩下的黏滑运动,发现了三种不同制动压力下的黏滑振动现象. Hu 等^[14]建立了固定卡钳盘式制动系统的七自由度模型,包括制动盘、卡钳、内外刹车片的运动,研究不同制动条件对系统稳定性的影响. 结果表明:制动噪声随制动压力的增大和制动盘转速的减小而增大.

Hopf 分岔与系统的极限环和自激振荡密切相关,属于动力学分岔,具有很高的研究价值. 近年来,国内外学者对非线性动力系统的 Hopf 分岔进行了大量的研究^[15,16]. Saha 等^[17]探究了两个不同的摩擦模型对单自由度动力学系统产生振动的影响,并通过稳定性分析得到系统发生亚临界 Hopf 分岔时的 Hopf 分岔点. Zhang 和 Dai^[18]建立了分段光滑的铁路轮对模型,研究了车辆参数对 Hopf 分岔特性的影响,指出了耦合区域内 Hopf 分岔对参数变化的敏感性. 当分段光滑系统的定常解的周期轨道出现分岔时,这种现象称为广义 Hopf 分岔. 安金凯等^[19]建立了一类以空气弹簧拟合的二自由度垂向振动系统模型,结果表明,当外激励频率和固有频率的接近程度达到固定值时,系统发生亚临界 Hopf 分岔,在分岔点的邻域内稳定焦点失稳形成不稳定的焦点. 周军超等^[20]建立了一种基于空间激励的跨座式单轨车辆转向架模型,探讨了不同空间激励条件下对转向架稳定性的影响,结果表明,转向架结构参数的改变可引发系统超临界与亚临界 Hopf 分岔之间的迁移. Zhang 等^[21]建立具有高阶非线性项的近似光滑飞机起落架模型,对 Hopf 分岔点附近的动力学行为进行了理论和数值研究,研究结果为飞机起落架系统的优化设计提供了理论依据. 张瑜等^[22]通过添加线性和非线性控制器对光滑起落架模型的 Hopf 分岔行为进行控制,结果表明,线性控制器能使系统的 Hopf 分岔点后移,从而减小 Hopf 分岔的不稳定区域;非线性控制器在不改变系统 Hopf 分岔点的情况下,能减小 Hopf 分岔产生的极限环的幅值. Zhang 等^[23]建立了一个三自由度非线性气弹性系统的非线性响应进行了解析和数值分析,结果表明,当阻尼系数小于或大于 Hopf 分岔线性临界值时,非线性颤振会发生极限环振荡现象.

本文考虑了刹车片的平移运动和制动盘的扭转运动,应用光滑的 Stribeck 摩擦模型建立了一个包含摩擦副的二自由度盘式制动系统;采用

Routh-Hurwitz 矩阵对系统的平衡点的稳定性进行分析,得到不同参数下系统的稳定区域;通过计算得到制动系统的 Hopf 分岔点并引入投影法得到系统的第一 Lyapunov 系数,进而判断出 Hopf 分岔类型,并通过数值模拟进行验证。

1 盘式制动系统的动力学模型

简化的盘式制动系统模型如图 1 所示,根据牛顿第二定律,得到二自由度盘式制动系统的运动微分方程为^[24]:

$$\begin{cases} J_r \ddot{\theta}_r + c_r \dot{\theta}_r + k_r \theta_r = T_f \\ m_b \ddot{x}_b + c_b \dot{x}_b + k_b x_b = F_f \end{cases} \quad (1)$$

式中: m_b 代表着刹车片和卡钳的质量; J_r 代表着制动盘的转动惯量; k_b 、 c_b 代表着刹车片的刚度和阻尼; k_r 、 c_r 代表着制动盘的刚度和阻尼; x_b 、 θ_r 分别代表着刹车片的切向位移和制动盘的扭转位移; r_b 代表着刹车片和制动盘中心的距离,即摩擦半径; ω 代表制动盘的扭转角速度; F_N 表示作用在刹车片上的法向制动力; v_r 表示制动盘和刹车片的相对速度; F_f 、 T_f 分别表示刹车片和制动盘接触界面产生的摩擦力和摩擦力矩。

文章采用 Stribeck 形式的摩擦模型研究摩擦非线性问题。该模型将摩擦系数定义为相对速度的负斜率函数,是指数型摩擦模型。

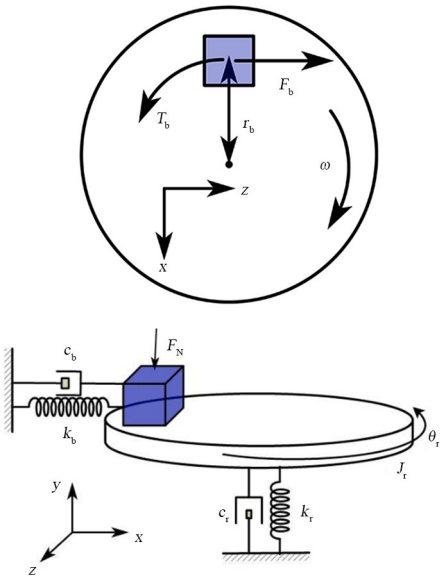


图 1 二自由度盘式制动系统模型图

Fig. 1 Dynamic model of the two-degree-of-freedom disc brake system

该模型的表达式如下^[25]:

$$\mu(v_r) = [\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\alpha|v_r|}] \tanh(\sigma v_r) \quad (2)$$

式中: μ_k 是动摩擦系数; μ_s 为静摩擦系数; v_r 为制动盘和刹车片之间的相对速度; α 为指数衰减因子,其代表着摩擦系数随着相对速度衰减的快慢程度; σ 是平滑控制系数。相对速度 v_r 可以表示为:

$$v_r = (\omega + \dot{\theta}_r)r_b - \dot{x}_b \quad (3)$$

取 $\mu_k = 0.3$, $\mu_s = 0.5$, $\alpha = 4$, $\sigma = 50$, 得到 Stribeck 形式的摩擦模型中的摩擦系数和相对速度之间的关系,如图 2 所示。

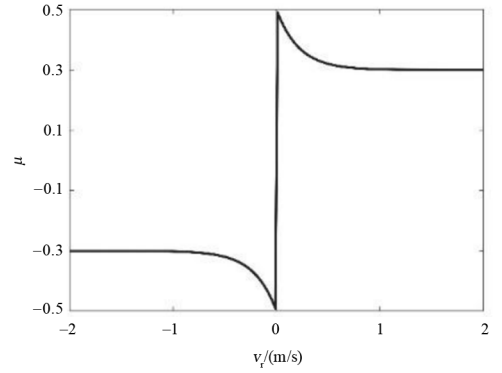


图 2 Stribeck 模型曲线图

Fig. 2 Curve of Stribeck model

摩擦力 F_f 和摩擦力矩 T_f 可表示为:

$$F_f = -\mu(v_r)F_N = -F_N[\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\alpha|v_r|}] \tanh(\sigma v_r) \quad (4)$$

$$T_f = F_b r_b = F_N[\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\alpha|v_r|}] \tanh(\sigma v_r) r_b \quad (5)$$

由公式(1)、(4)和(5),最终得到盘式制动系统的状态方程为:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\frac{c_r y_2 + k_r y_1 + [\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\alpha|v_r|}] \tanh(\sigma v_r) F_N r_b}{J_r} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = -\frac{c_b y_4 + k_b y_3 - [\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-\alpha|v_r|}] \tanh(\sigma v_r) F_N}{m_b} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $y = [y_1, y_2, y_3, y_4]$ 为状态变量,且 $[y_1, y_2, y_3, y_4] = [\theta_r, \dot{\theta}_r, x_b, \dot{x}_b]$ 。

2 稳定性分析

令公式(1)右侧方程为 0,可以得到平衡点 $\bar{y} = (\bar{y}_1, 0, \bar{y}_3, 0)$, 当 ω, r_b 都大于 0 时,此时可以化简

得到 $v_r = e^{-a|(\omega+y_2)r_b-y_4|} = e^{-a\omega r_b}$, 最终可以得到平衡点为:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= -\frac{[\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-a\omega r_b}]\tanh(\sigma\omega r_b)Fr_b}{k_r} \\ \bar{y}_3 &= \frac{[\mu_k + (\mu_s - \mu_k)e^{-a\omega r_b}]\tanh(\sigma\omega r_b)F}{k_b}\end{aligned}\quad (7)$$

由雅可比矩阵可以得到系统的特征方程:

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (8)$$

式中:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{k_b k_r}{J_r m_b}, a_1 = \frac{c_b k_r + c_r k_b}{J_r m_b} + \frac{r_b^2 k_b + k_r}{J_r m_b} \xi, \\ a_2 &= \frac{k_r}{J_r} + \frac{k_b}{k_m} + \frac{c_b c_r}{J_r m_b} + \frac{c_r + c_b r_b^2}{J_r m_b} \xi, \\ a_3 &= \frac{c_r}{J_r} + \frac{c_b}{m_b} + \left(\frac{1}{m_b} + \frac{r_b^2}{J_r}\right) \xi. \\ \xi &= \sigma F(\mu_k + \Delta\mu e^{-a\omega r_b})[1 - \tanh^2(\sigma\omega r_b)] - \\ &\quad \alpha F \Delta\mu e^{-a\omega r_b} \tanh(\sigma\omega r_b), \\ \Delta\mu &= \mu_s - \mu_k.\end{aligned}$$

由特征方程(8)得到 Hurwitz 矩阵为:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_3 & 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

由 Routh-Hurwitz 判据^[26]可得,当 $\mathbf{H}$ 的所有主子式都大于 0 时,此时系统所有特征值都有负实部,系统是稳定的,即:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0 \quad (10)$$

式中:

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= a_3, \Delta_2 = a_2 a_3 - a_1, \\ \Delta_3 &= a_3(a_2 a_1 - a_0 a_3) - a_1^2, \\ \Delta_4 &= a_0 \Delta_3.\end{aligned}\quad (11)$$

仿真过程中的参数选取基于文献[10],如表 1 所示.由稳定性的判定条件即公式(10)得到制动系统在不同参数下的稳定和不稳定区域,如图 3 所示.图中蓝色代表不稳定,黄色代表稳定.黄色和蓝色交汇处即为系统的稳定边界.

首先考虑摩擦特性对制动系统稳定性的影响,选取参数 $F_N = 1000 \text{ N}$, $\omega \in [0, 15]$,其他参数固定不变如表 1 所示,讨论静摩擦系数 μ_s 和衰减因子 α 对系统稳定性的影响,如图 3(c) 和图 3(d) 所示.在图 3(c) 中, $\alpha = 4.6$, $\mu_s \in [0.4, 0.8]$,图 3(d) 中,

$\mu_s = 0.5$, $\alpha \in [4, 6]$,从图中得到,当制动盘的角速度 ω 很小,即此时 $\omega < 0.42 \text{ rad/s}$ 时,在一定的范围内,无论摩擦系数和衰减因子为何值,此时系统都具有稳定性.当 $\omega > 0.42 \text{ rad/s}$ 时,随着静摩擦系数的逐渐增大,系统的不稳定区域也随之增大,而系统的不稳定区域随着衰减因子的增大而逐渐减小.所以在设计有关摩擦特性的系数时,可以通过增大衰减因子或者降低静摩擦系数来扩大制动系统的稳定区域,进而提高制动系统的稳定性,从源头上抑制制动尖叫现象的产生.

选取参数 $\omega \in [0.5, 15]$, $F_N \in [0, 2000]$,其他参数固定不变如表 1 所示,得到制动力和刹车盘角速度对制动系统稳定性的影响,如图 3(b) 所示.系统的不稳定区域制动力 F_N 的增加而逐渐扩大,而随着角速度 ω 的增加,系统的稳定区域逐渐增大,说明在较大的制动力下系统更容易发生不稳定的运动,此时则需要更大的角速度来使系统重新维持稳定.选取参数 $F_N = 1000 \text{ N}$, $\omega = 12.363 \text{ rad/s}$, $k_b \in [0, 6 \times 10^5]$, $k_r \in [0, 6 \times 10^5]$,同时变化制动盘与刹车片刚度值对系统稳定性的影响如图 3(c) 所示.定义制动盘与刹车片的刚度比为 κ ,当刚度比 κ 在蓝色范围内时系统是不稳定的,从图中可知单纯地增加制动盘刚度值或刹车片刚度值并不一定会使系统的稳定性增加,反而会使系统的稳定性下降.所以合理设计制动盘和刹车片的刚度系数比值能在很大程度上改善系统的稳定性.

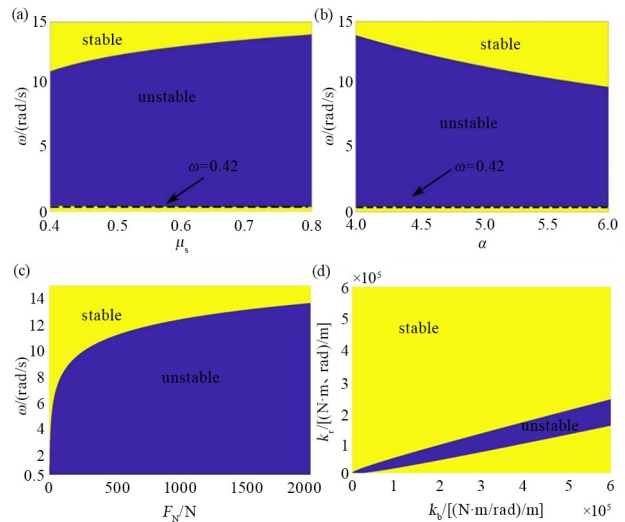


图 3 盘式制动系统在不同参数下的稳定和不稳定区域:

- (a) ω 和 μ_s 的稳定区域; (b) ω 和 α 的稳定区域;
(c) F_N 和 ω 的稳定区域; (d) k_b 和 k_r 的稳定区域
- Fig. 3 The stable and unstable regions of the disc braking system under different parameters: (a) The stable area of ω and μ_s ; (b) The stable area of ω and α ; (c) The stable area of F_N and ω ; (d) The stable area of k_b and k_r

表 1 制动系统参数表
Table 1 Parameters of the brake system

Parameter	Symbol	Value
The quality of the pad	m_b/kg	2
Inertia moment of the brake	$J_r/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.65
The stiffness of the pad	$k_b/(\text{N}/\text{m})$	3×10^5
The damping of the pad	$c_b/(\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad})$	1
The stiffness of the brake	$k_r/(\text{N}/\text{m})$	3×10^5
The damping of the brake	$c_r/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}/\text{s})$	1
Friction radius	r/m	0.12
Kinetic friction coefficient	μ_s	0.5
Static friction coefficient	μ_k	0.3
Decay factor	α	4.6
Smooth parameter	σ	50

3 Hopf 分岔特性分析

3.1 理论推导

以角速度 ω 作为分岔参数并取 $F_N=1000\text{ N}$, 其他参数不变如表 1 所示, 得到临界角速度 $\omega_0=12.363\text{ rad/s}$, 进而得到 Hopf 分岔点 $B(\omega_0)$, 并代到其他条件中验证, 结果满足横截条件^[27].

系统在 Hopf 分岔点处的第一 Lyapunov 系数可以由投影法^[28]进行推导, 推导步骤如下: 由于平衡点不在坐标原点中, 将平衡点 $\bar{y}=(\bar{y}_1, 0, \bar{y}_3, 0)$ 平移到坐标原点中, 并在原点处进行泰勒展开得到方程(12):

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\tag{12}$$

式中:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-46\ 158.461&-1.516&0&-0.185\\0&0&0&1\\0&-0.6&-150\ 000&0\end{pmatrix}\tag{13}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}0\\-110.850-0.006x_2^2+0.102x_4x_2-0.425x_4^2+0.001x_2^3-0.028x_2^2x_4+0.234x_4^2x_2-0.651x_4^3\\0\\300.217+0.017x_2^2-0.276x_2x_4+1.150x_4^2-0.003x_2^3+0.076x_2^2x_4-0.635x_2x_4^2+1.763x_4^3\end{pmatrix}\tag{14}$$

通过投影法^[28]可以得到对于任意的 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)^T,\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)^T,\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4)^T\tag{15}$$

有多重线性向量函数 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 和 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}0\\-0.012a_2b_2+0.102(a_4b_2+a_2b_4)-0.849a_4b_4\\0\\0.034a_2b_2-0.276(a_2b_4+a_4b_2)+2.300a_4b_4\end{pmatrix}\tag{16}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})=\begin{pmatrix}0\\0.006a_2b_2c_2-0.056(a_2b_2c_4+a_2b_4c_2+a_4b_2c_2)+0.468(a_2b_4c_4+a_4b_4c_2+a_4b_2c_4)-3.906a_4b_4c_4\\0\\-0.018a_2b_2c_2+0.152(a_2b_2c_4+a_2b_4c_2+a_4b_2c_2)-1.269(a_2b_4c_4+a_4b_4c_2+a_4b_2c_4)+10.578a_4b_4c_4\end{pmatrix}\tag{17}$$

计算出特征向量 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ 为:

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}1\\8.391\times10^{-4}\text{i}\\-8.213-4357.110\text{i}\\11.250-0.021\text{i}\end{pmatrix},\boldsymbol{q}=\begin{pmatrix}1\\387.299\text{i}\\-8.213+4357.110\text{i}\\-1.688\times10^{-6}-3181.020\text{i}\end{pmatrix}\tag{18}$$

式中: p, q 满足 $Aq = i\omega q, A^T p = -i\omega p, \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^3 \bar{p}_i q_i = 1$. 由特征向量 p, q 得到:

$$B(q, q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.418 \times 10^{12} - 9.250 \times 10^9 i \\ 0 \\ 6.550 \times 10^{12} + 2.505 \times 10^{10} i \end{pmatrix}, B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.418 \times 10^{12} + 1.364 i \\ 0 \\ 6.550 \times 10^{12} - 0.407 i \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$C(q, q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.877 \times 10^{19} + 3.590 \times 10^{16} i \\ 0 \\ -5.084 \times 10^{19} - 9.724 \times 10^{16} i \end{pmatrix}, A^{-1}B(q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 5.240 \times 10^6 - 2.956 \times 10^{-6} i \\ 0 \\ -4.366 \times 10^7 + 2.712 \times 10^{-6} i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$B[q, A^{-1}B(q, \bar{q})] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (2\eta i - A^{-1})B(q, q) = \begin{pmatrix} 1.746 \times 10^7 + 199\,918.037 i \\ -1.549 \times 10^8 + 1.353 \times 10^{10} i \\ -1.455 \times 10^7 - 53\,870.471 i \\ 4.173 \times 10^7 - 1.127 \times 10^{10} i \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$B[\bar{q}, (2\eta i - A^{-1})B(q, q)] = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.108 \times 10^{13} - 1.848 \times 10^{16} i \\ 0 \\ -1.383 \times 10^{14} + 5.006 \times 10^{16} i \end{pmatrix} \quad (22)$$

通过上述计算,最终可以得到系统在分岔点 B 处的 Lyaounov 系数为:

$$l_{B1}(0) = \frac{1}{2\eta} \text{Re}\{\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2\langle p, B[q, A^{-1}B(q, \bar{q})] \rangle + \langle p, B[\bar{q}, (2\eta i - A^{-1})B(q, q)] \rangle\} \\ = 1.945 \times 10^{10} > 0 \quad (23)$$

通过理论推导可以得到系统的第一 Lyapunov 系数大于 0, 系统在分岔点处发生亚临界 Hopf 分岔, 产生不稳定的极限环。

3.2 数值模拟

为了验证理论推导的准确性, 利用 Matlab 软件对方程进行数值求解验证, 得到了系统的特征值实部的最大值随着角速度 ω 变化的曲线, 如图 4 所示. 图中虚线是特征值实部最大值为 0 的线, 可以看到特征值的实部最大值随着角速度的增大而减小, 当平衡点到达 B 点时, 此时系统的角速度 $\omega = 12.363 \text{ rad/s}$, 系统特征值实部的最大值曲线穿越 0 点, 由负值变为正值, 即平衡点由稳定变为不稳定, 发生了 Hopf 分岔, 制动系统发生自激振动。

基于上述分析, 为了更直观地描述在发生 Hopf 分岔时系统稳定性的变化, 对 Hopf 分岔点 B 附近进行数值模拟, 得到平衡点随着角速度变化时的二维和三维分岔图, 如图 5 所示. 图中红色代表不稳定, 蓝色代表稳定. 从图中可以看到系统在 $\omega = 12.363 \text{ rad/s}$ 时系统发生亚临界 Hopf 分岔, 系统

由一个不稳定的平衡点分岔产生一个稳定的平衡点和一个不稳定的极限环, 验证了理论推导中对极限环的类型的判断的准确性。

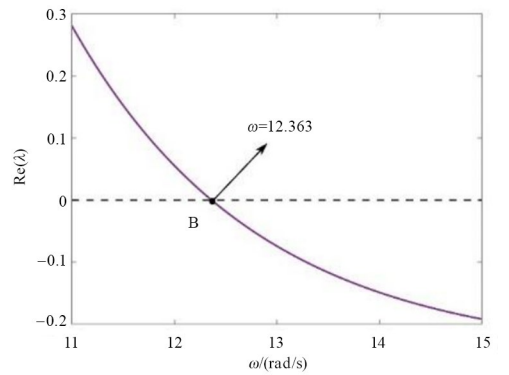


图 4 系统随着 ω 变化的特征值实部图
Fig. 4 Diagram of the real part of the eigenvalue as ω changes

考虑制动力对制动系统稳定性的影响. 选取参数 $\omega = 10 \text{ rad/s}$, 选取 F_N 作为分岔参数. 结合公式 (10) 可计算得到系统的临界制动力 $F_N = 271.342 \text{ N}$, 得到特征方程对应的特征值 $\lambda_{1,2} = \pm 387.298 i$, $\lambda_{3,4} = -0.758 \pm 679.366 i$, 系统在此时发生 Hopf 分岔. 通过投影法^[28] 得到系统的第一 Lyapunov 系数为: $l_1(0) = 5.277 \times 10^9 > 0$, 此时发生的 Hopf 分岔

是亚临界的. 在 Hopf 分岔点附近进行数值模拟, 得到图 6 和图 7. 当 $F_N=281.758\text{ N}$ 时, 系统在相空间的状态为一个不稳定的平衡点和一个稳定的极限环. 随着制动力的减小, 系统在 $F_N=271.342\text{ N}$ 时发生亚临界 Hopf 分岔, 平衡点的稳定性发生变化, 其由不稳定变为稳定, 并在其邻域内产生一个不稳定的极限环. 当 F_N 继续减小到 241.758 N 时, 系统在相空间的状态为一个稳定平衡点、一个不稳定的极限环和一个稳定的极限环. 由于制动系统发生 Hopf 分岔时, 系统的运动状态可能发生突变从平衡点跃迁至大幅度的极限环运动, 所以要将制动力限制在 241.758 N 以下来避免 Hopf 分岔的发生.

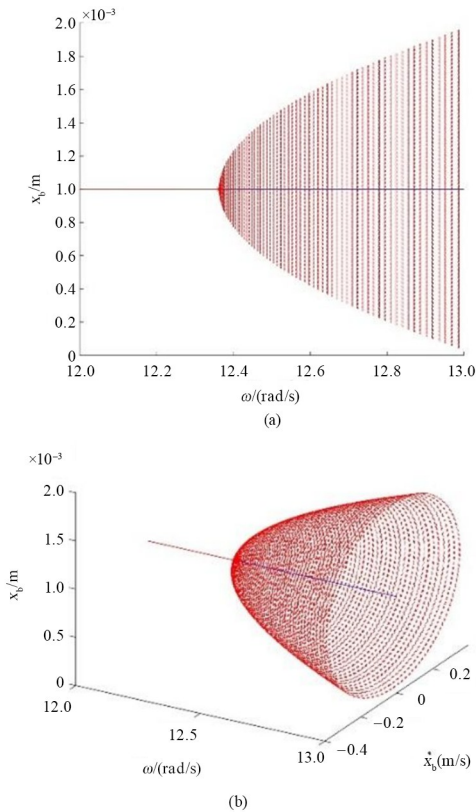


图 5 系统随着 ω 变化时平衡点的分岔图: (a) 二维分岔图; (b) 三维分岔图

Fig. 5 Bifurcation diagram of the equilibrium point of the system as ω changes: (a) Two-dimensional bifurcation diagram; (b) Three-dimensional bifurcation diagram

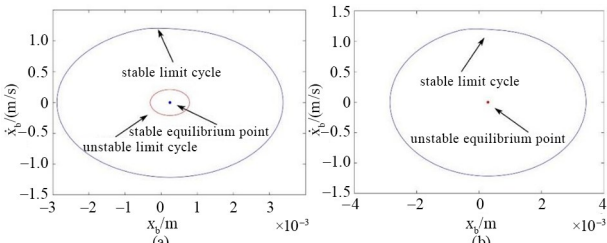


图 6 系统在不同 F_N 下分岔点附近的相图: (a) $F_N=241.758\text{ N}$; (b) $F_N=281.758\text{ N}$

Fig. 6 Phase diagrams of the system near the bifurcation point with different F_N : (a) $F_N=241.758\text{ N}$; (b) $F_N=281.758\text{ N}$

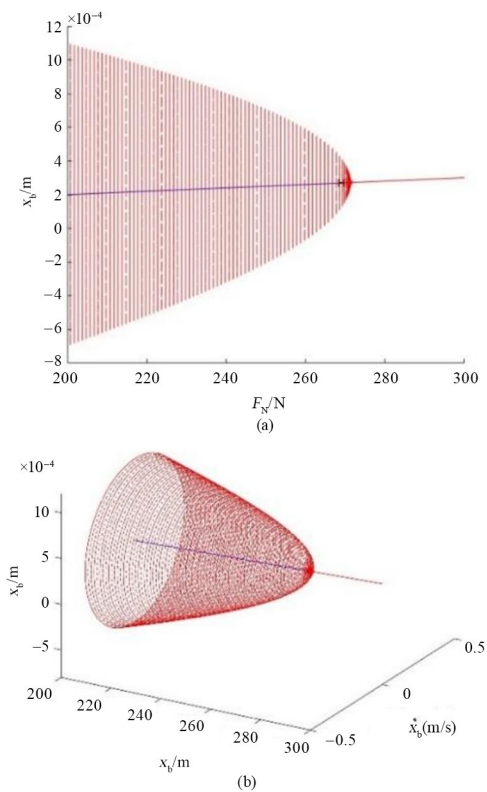


图 7 系统随着 F_N 变化时平衡点的分岔图: (a) 二维分岔图; (b) 三维分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagram of the equilibrium point of the system as F_N changes: (a) Two-dimensional bifurcation diagram; (b) Three-dimensional bifurcation diagram

4 结论

本文采用 Stribeck 形式的摩擦模型, 建立二自由度盘式制动系统非线性动力学模型. 基于 Hurwitz 矩阵对系统在不同参数下的稳定性进行分析, 得到系统的稳定区域, 在此基础上利用投影法对系统的 Hopf 分岔进行分析, 得到第一 Lyapunov 系数, 根据其正负号判断 Hopf 分岔类型, 并通过数值模拟分析验证. 主要结论如下:

- (1) 盘式制动系统的稳定性受摩擦特性、制动力和刚度比等因素影响显著. 增大制动力会扩大制动系统的不稳定区域, 而提高角速度可抵消其负面影响, 设计合理的刚度比对提高制动系统的稳定性也至关重要. 当制动盘的角速度小于 0.42 rad/s 时, 系统始终保持稳定, 当角速度大于该值时, 可以通过减小动静摩擦系数的差值或增大衰减因子来抑制不稳定振动现象. 在对制动系统材料进行设计选取时, 要将摩擦材料的衰减因子设计在较大的范围内, 并选择静摩擦系数较低的材料, 从而在源头上抑制制动尖叫现象的产生.

(2) 系统在临界角速度 $\omega_0=12.363\text{ rad/s}$ 和临

界制动力 $F_N = 271.342 \text{ N}$ 时,系统的第一 Lyapunov 系数为正值,发生亚临界 Hopf 分岔,平衡点由不稳定变成稳定,产生不稳定的极限环,引发自激振动。数值模拟证实了分岔点附近平衡点稳定性的突变以及极限环的产生,与理论分析一致,这为盘式制动系统的安全范围提供了边界。在实际应用中,可以通过施加控制策略确保系统工作点远离此边界,防止因 Hopf 分岔而引发剧烈的自激振动。

参考文献

- [1] ELMAIAN A, GAUTIER F, PEZERAT C, et al. How can automotive friction-induced noises be related to physical mechanisms[J]. *Applied Acoustics*, 2014, 76: 391—401.
- [2] DONG C L, MO J L, YUAN C Q, et al. Vibration and noise behaviors during stick-slip friction [J]. *Tribology Letters*, 2019, 67(4): 103.
- [3] BUTLIN T, WOODHOUSE J. A systematic experimental study of squeal initiation [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(21): 5077—5095.
- [4] BOWDEN F. P., LEBEN L. The nature of sliding and the analysis of friction [J]. *Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1939, 169(938): 371—391.
- [5] ANDREAUS U, CASINI P. Dynamics of friction oscillators excited by a moving base and/or driving force [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 245(4): 685—699.
- [6] POPP K. Modelling and control of friction-induced vibrations [J]. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 2005, 11(3): 345—369.
- [7] HETZLER H, SCHWARZER D, SEEMANN W. Analytical investigation of steady-state stability and Hopf-bifurcations occurring in sliding friction oscillators with application to low-frequency disc brake noise [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2007, 12(1): 83—99.
- [8] CHEN L, XI G. Stability and response of a self-amplified braking system under velocity-dependent actuation force [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 78(4): 2459—2477.
- [9] SHIN K, BRENNAN M J, OH J E, et al. Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(5): 837—848.
- [10] WEI D G, SONG J W, NAN Y H, et al. Analysis of the stick-slip vibration of a new brake pad with double-layer structure in automobile brake system [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 305—316.
- [11] WANG Q, WANG Z W, MO J L, et al. Nonlinear behaviors of the disc brake system under the effect of wheel-rail adhesion [J]. *Tribology International*, 2022, 165: 107263.
- [12] ZHOU H Y, WANG Z W, WANG Q, et al. Dynamic models and analysis of key factors influencing stick-slip vibration in disc brake system [J/OL]. *Railway Engineering Science*, 2025 [2025-08-02]. <https://doi.org/10.1007/s40534-025-00379-3>.
- [13] CROWTHER A R, SINGH R. Identification and quantification of stick-slip induced brake groan events using experimental and analytical investigations [J]. *Noise Control Engineering Journal*, 2008, 56(4): 235—255.
- [14] HU S G, LIU Y C. Disc brake vibration model based on stibeck effect and its characteristics under different braking conditions [J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 2017(1): 6023809.
- [15] AHMADIAN M, YANG S P. Hopf bifurcation and hunting behavior in a rail wheelset with flange contact [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15(1): 15—30.
- [16] KUPPER T, MORITZ S. Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar systems [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2001, 359(1789): 2483—2496.
- [17] SAHA A, WIERCIGROCH M, JANKOWSKI K, et al. Investigation of two different friction models from the perspective of friction-induced vibrations [J]. *Tribology International*, 2015, 90: 185—197.
- [18] ZHANG T T, DAI H Y. Loss of stability of a railway wheel-set, subcritical or supercritical [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2017, 55(11): 1731—1747.
- [19] 安金凯, 乐源. 二自由度车辆垂向振动系统的 Hopf 分岔 [J]. *四川轻化工大学学报(自然科学版)*, 2024, 37(4): 11—18.
- AN J K, YUE Y. Hopf bifurcation of two-degree-of-freedom vehicle vertical vibration system [J]. *Journal of Sichuan University of Science & Engi-*

neering (Natural Science Edition), 2024, 37(4): 11–18. (in Chinese)

[20] 周军超, 黄尚武, 胡光忠, 等. 基于空间扰动的跨座式单轨车辆转向架 Hopf 分岔特性分析[J/OL]. 西南交通大学学报, 2024 (2024-12-05) [2025-08-02]. <https://link.cnki.net/urlid/51.1277.u.20241204.1730.004>. ZHOU J C, HUANG S W, HU G Z, et al. Hopf bifurcation characteristics analysis of straddle-type monorail vehicle bogie based on spatial perturbations [J/OL]. China Industrial Economics, 2024 (2024-12-05) [2025-08-02]. <https://link.cnki.net/urlid/51.1277.u.20241204.1730.004>. (in Chinese)

[21] ZHANG Y, ZHANG W, YUE Y. Hopf bifurcation analysis of a nose landing gear system of aircraft [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2024, 34(15): 2450184.

[22] 张瑜, 张文, 乐源. 飞机前起落架模型的 Hopf 分岔及控制研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(8): 13–22. ZHANG Y, ZHANG W, YUE Y. Hopf bifurcation analysis and bifurcation control of aircraft nose landing gear system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(8): 13–22. (in Chinese)

[23] ZHANG L, CHEN F Q. Bifurcations and stability analysis for nonlinear oscillations of an airfoil [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2017, 103: 220–231.

[24] WEI D G, RUAN J Y, ZHU W W, et al. Properties of stability, bifurcation, and chaos of the tangential motion disk brake [J]. Journal of Sound and Vibration, 2016, 375: 353–365.

[25] VAN DE VRANDE B L, VAN CAMPEN D H, DE KRAKER A. An approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure [J]. Nonlinear Dynamics, 1999, 19(2): 159–171.

[26] NAYFEH A H, BALACHANDRAN B. Applied nonlinear dynamics; analytical, computational, and experimental methods [M]. New York: John Wiley & Sons, 1995.

[27] LIU W M. Criterion of Hopf bifurcations without using eigenvalues [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 182(1): 250–256.

[28] 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2018. XIE J H, LE Y, LI D H. Nonlinear system dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)