

# 基座角运动下陀螺加速度计误差模型的动力学分析

靳艳飞<sup>1†</sup> 石崇基<sup>1</sup> 靖征<sup>2</sup> 程修妍<sup>1</sup> 孟经纬<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 空天科学与技术学院, 北京 100081)

(2. 北京航天控制仪器研究所, 北京 100039)

**摘要** 惯性导航系统往往面临复杂的力学环境,在高速运动或剧烈振动的情况下,加速度计的输出会受到基座角速度的影响,从而产生测量结果的误差.因此,本文研究了基座角运动下摆式积分陀螺加速度计(PIGA)输出误差的形成机理及动力学特性.首先,从 PIGA 动力学建模出发,构建包含线加速度、角速度与角加速度联合作用的完整误差模型.接着,在综合考虑三轴角速度与角加速度输入的基础上,推导 PIGA 的误差表达式,分析角运动相关误差项的产生机制、数量级及与系统参数之间的耦合关系,揭示了对输出精度产生显著影响、需实施补偿的关键误差分量.最后,基于动力学仿真模型,研究基座角运动输入对 PIGA 输出动态响应的影响规律.结果表明,不同角速度与角加速度输入组合下,PIGA 输出的误差特性表现出明显差异,因此基座角速度对 PIGA 输出的影响显著,在实际工程应用中应予以关注与补偿.

**关键词** 摆式积分陀螺加速度计, 基座角运动, 完整误差模型, 动态误差分析

**中图分类号**:U666.1

**文献标志码**:A

## Dynamic Analysis of the Error Model for Gyro Accelerometers under Base Angular Motion Conditions

Jin Yanfei<sup>1†</sup> Shi Chongji<sup>1</sup> Jing Zheng<sup>2</sup> Cheng Xiuyan<sup>1</sup> Meng Jingwei<sup>1</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(2. Beijing Institute of Aerospace Control Instruments, Beijing 100039, China)

**Abstract** Inertial navigation systems often operate in complex mechanical environments. Under conditions of high-speed motion or severe vibration, the output of accelerometers can be affected by the base angular velocity, leading to measurement errors. Therefore, this paper investigates the formation mechanism and dynamic characteristics of the output error of the Pendulous Integrating Gyroscopic Accelerometer (PIGA) under base angular motion. First, starting from the dynamic modeling of the PIGA, a comprehensive error model incorporating the combined effects of linear acceleration, angular velocity, and angular acceleration is established. Then, based on the simultaneous consideration of three-axis angular velocity and angular acceleration inputs, the error expression of the PIGA is derived. The generation mechanism, magnitude, and coupling relationship with system parameters of error terms related to angular motion are analyzed, revealing the key error components that significantly impact output accuracy and require compensation. Finally, based on the dynamic simulation model, the influence of base angular motion inputs on the dynamic response of the PIGA output is studied. The results show that under different combinations of angular velocity and angular acceleration inputs, the error characteristics of the PIGA output exhibit significant differences. Therefore, the effect of dynamic base angular velocity on the PIGA output

is substantial and should be addressed and compensated for in practical engineering applications.

**Key words** pendulous integrating gyro accelerometer, base angular motion, comprehensive error modeling, dynamic error analysis

## 引言

摆式积分陀螺加速度计(PIGA)作为高精度惯性测量装置,是惯性导航系统中的核心器件,广泛应用于国防、航空航天及工业测控等领域,其输出精度可达极高量级<sup>[1-3]</sup>. PIGA 虽具有优异的测量性能,但由于结构复杂、运行条件严苛,其在实际应用中不可避免地产生零偏误差、比例因子误差、交叉耦合误差和动态耦合误差等<sup>[4-6]</sup>. 传统的静态误差模型和标定方法无法充分表征其在动基座环境(如舰载、机载)下所受的多源扰动,限制了其导航精度的进一步提升<sup>[7]</sup>. 因此,研究在基座复杂角运动下 PIGA 输出误差的形成机制与补偿方法具有重要的理论意义和工程应用价值.

在已有的 PIGA 误差模型研究中,误差模型主要围绕线性误差分析展开,用于描述基础性误差,如零偏误差、比例因子误差和传感器误差等. 这些模型可以有效地描述静态或低动态条件下的误差行为,但在复杂动态环境中精度受到限制<sup>[8-9]</sup>. 随着面向高度复杂动态环境应用需求的增加,非线性误差模型开始引入. 研究发现,基座平台上的复杂运动会引入非线性效应,如陀螺仪的非线性响应、加速度计的非线性漂移等<sup>[10]</sup>,非线性误差模型能够更好地描述在大范围运动条件下的实际误差. 这些模型考虑了比力产生的惯性力矩、不等弹性引起的力矩、阻尼力矩、电磁力矩及其他干扰力矩之间的相互作用. 通过建立综合误差模型,能更加全面地描述和分析 PIGA 在复杂环境中的误差行为. 孙闯等<sup>[11-12]</sup>提出了一种陀螺加速度计交叉二次项在精密线振动台上的测试方法,通过分析陀螺加速度计的测试原理建立了包含交叉二次项的误差模型. 徐凤霞等<sup>[13-14]</sup>提出了采用三轴台与陀螺加速度计构成闭环伺服系统分离陀螺加速度计外环干扰力矩试验方法,将最小二乘法应用于辨识陀螺加速度计在三轴台上的测试试验,消除了测试设备的误差对陀螺加速度计精度的影响.

随着惯性导航系统对精度要求越来越高,一些

研究不仅考虑传统的误差源,还引入了温度漂移、老化效应以及环境噪声等因素的影响<sup>[15-17]</sup>. 通过精细化的误差建模和补偿算法,力图进一步提升陀螺加速度计的测量精度<sup>[18]</sup>. 为此,王子超等<sup>[19]</sup>研究了捷联惯导系统复杂误差模型的建立,提出了一种新的包含加速度计内杆臂参数和温度误差系数的系统级标定方法. 王国栋等<sup>[20]</sup>提出了一种基于离心机实验的陀螺仪误差标定方法来消除高加速度对陀螺仪的影响,分析了离心机实验引入的误差源,给出了等效半径、失准角等因素的影响分析和补偿方法. 然而已有的研究大多是基于固定基座转台的误差模型开展的,未考虑在高速运动或剧烈振动的情况下,PIGA 的输出受到动基座角速度及不稳定干扰的影响.

本文考虑了 PIGA 在线加速度、角速度和角加速度同时作用下对系统输出的影响,基于三轴角速度输入和角加速度信息,推导了 PIGA 理论的完整误差模型,结合仪表结构参数和控制参数,量化了误差系数量级,建立了简化误差模型. 基于动力学仿真模型,分析了 PIGA 在不同角速度组合、不同角速度大小下的动力学输出响应,揭示了动基座角运动输入对 PIGA 输出动态响应的影响规律.

## 1 PIGA 模型的动力学分析

### 1.1 PIGA 工作原理

PIGA 是一种利用陀螺力矩进行反馈的摆式加速度计,其原理图如图 1 所示. PIGA 在结构上与二自由度陀螺仪类似,由高速旋转的陀螺转子、内框架、外框架组成. 内、外框架之间装有一条由角度传感器、放大器与力矩电机等构成的伺服回路. 伺服回路的作用在于抑制外环轴上的干扰力矩,确保 PIGA 的外环轴与转子轴始终保持垂直,并赋予系统应有的静态、动态特性,使 PIGA 能够稳定地工作且能保证自身精度. 沿转子轴  $Oz$  有一偏心质量  $m$ ,其质心离内框架轴的距离为  $l$ ,使得其绕内框架轴形成摆性  $ml$ .

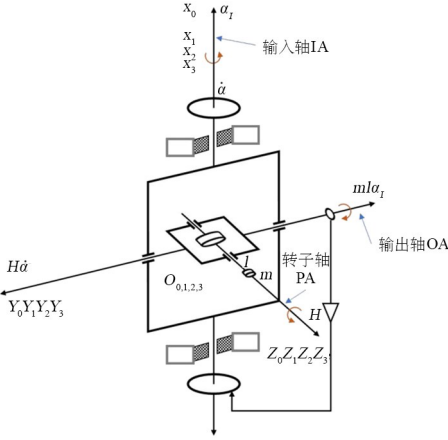


图1 PIGA原理示意

Fig. 1 Schematic diagram of PIGA

其中,  $O-X_1Y_1Z_1$  为与外框架固联的坐标系,  $OX_1$  为输入轴,  $O-X_2Y_2Z_2$  为内框架坐标系,  $OY_2$  为输出轴,  $O-X_3Y_3Z_3$  为莱查坐标系,  $OZ_3$  轴与转子轴重合,  $M_{X_1}$  为外框架干扰力矩,  $a_{X_1}$  为仪表沿外框架轴的输入视加速度,  $ml$  为仪表内框架轴的摆性,  $H$  为仪表的角动量,  $M_D$  为电机力矩. PIGA 能够测量沿其输入轴的加速度, 当其外环轴  $O_1X_1$  即输入轴相对于惯性空间有比力输入  $a_I$  时, 内环轴上将会产生惯性力矩  $mIa_I$ , 根据陀螺仪的进动原理, 此时 PIGA 的转子会绕外环轴  $O_1X_1$  产生进动角速率. 由于陀螺的进动作用, 当转子的旋转角动量

为  $H$  时, PIGA 内环轴上将产生陀螺反作用力矩  $H\alpha$ , 该力矩将与内环轴上产生的惯性力矩相平衡, 即:  $\dot{\alpha} = (ml/H)a_I$ . 在零初始条件下对上式积分, 可得进动角  $\alpha$  为:

$$\alpha = \frac{ml}{H} \int_0^t a_I dt = \frac{ml}{H} V_I \quad (1)$$

## 1.2 PIGA 动力学方程

结合图 1 中所示的 PIGA 的结构特点, 可以在此基础之上简化 PIGA 的各个构件间运动的坐标系, 如图 2 所示.

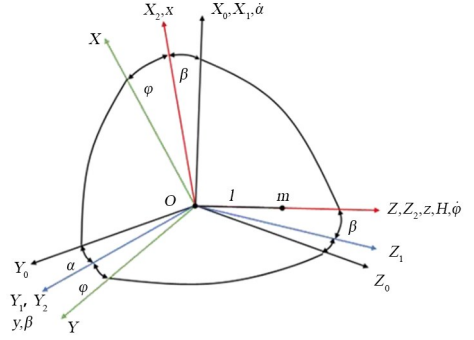


图2 PIGA 坐标系示意图

Fig. 2 Coordinate system diagram of PIGA

考虑基座角运动时, PIGA 的运动学与动力学方程可表示如下<sup>[21]</sup>. 其中, 绕外框架轴的运动方程为:

$$\begin{aligned} & H\dot{\beta}\cos\beta + I_{X_1}\ddot{\alpha} - J_{X_2Z_2}\ddot{\alpha}\sin(2\beta) + [(I_{Z_2} - I_{X_2})\sin(2\beta) - 2J_{X_2Z_2}\cos(2\beta)] \times \\ & \left[ (\dot{\alpha} + \omega_{X_0})\dot{\beta} + \frac{1}{2}\dot{\omega}_{Z_1} + \frac{1}{2}(\dot{\alpha} + \omega_{X_0})\omega_{Y_1} \right] - (J_{Y_2Z_2}\sin\beta + J_{X_2Y_2}\cos\beta) [\ddot{\beta} + \dot{\omega}_{Y_1} - (\dot{\alpha} + \omega_{X_0})\omega_{Z_1}] + \\ & (J_{X_2Y_2}\sin\beta - J_{Y_2Z_2}\cos\beta) [(\dot{\beta} + \dot{\omega}_{Y_1})^2 - \omega_{Z_1}^2] + [I_{X_1} - J_{X_2Z_2}\sin(2\beta)]\dot{\omega}_{X_0} + H\omega_{Y_1}\cos\beta + \\ & [(2J_{X_2Z_2}\sin(2\beta) - I_{Y_2} - (I_{X_2} - I_{Z_2})\cos(2\beta))\omega_{Z_1}\dot{\beta} - [(I_{Y_2} - I_{Z_2})\cos(2\beta) - J_{X_2Z_2}\sin(2\beta)]\omega_{Y_1}\omega_{Z_1} - \\ & (J_{Y_1} - J_{Z_2})\omega_{Y_1}\omega_{Z_1} - J_{X_1Y_1}(\dot{\omega}_{Y_1} - \omega_{X_1}\omega_{Z_1}) - J_{X_1Z_1}(\omega_{X_1}\omega_{Y_1} + \dot{\omega}_{Z_1}) - J_{Y_1Z_1}(\omega_{Y_1}^2 - \omega_{Z_1}^2)] = M_{X_1} \quad (2) \end{aligned}$$

绕内框架轴的运动方程为:

$$\begin{aligned} & H\dot{\alpha}\cos\beta = I_{Y_2}\ddot{\beta} - H(\omega_{X_0}\cos\beta - \omega_{Z_1}\sin\beta) + \left[ \frac{1}{2}(I_{X_2} - I_{Z_2})\sin(2\beta) + J_{X_2Z_2}\cos(2\beta) \right] \times [(\dot{\alpha} + \omega_{X_0})^2 - \\ & \omega_{Z_1}^2] - [(I_{Z_2} - I_{X_2})\cos(2\beta) + 2J_{X_2Z_2}\sin(2\beta)] \times [(\dot{\alpha} + \omega_{X_0})\omega_{Z_1}] - (J_{X_2Y_2}\sin\beta - J_{Y_2Z_2}\cos\beta) \times \\ & [(\dot{\alpha} + \omega_{X_0})\omega_{Y_1} - \dot{\omega}_{Z_1}] - (J_{X_2Y_2}\cos\beta + J_{Y_2Z_2}\sin\beta) \times [\omega_{Y_1}\omega_{Z_1} + (\dot{\alpha} + \dot{\omega}_{X_0})] + I_{Y_2}\dot{\omega}_{Y_2} - M_{Y_2} \quad (3) \end{aligned}$$

其中, 各项符号表达式如下:

$$I_{X_2} = J_{X_2} + J_e, \quad I_{Y_2} = J_{Y_2} + J_e, \quad I_{Z_2} = J_{Z_2}, \quad I_{X_1} = J_{X_1} + I_{X_2}\cos^2\beta + I_{Z_2}\sin^2\beta \quad (4)$$

这里, 式(2)~(4)中符号如表 1 所示.

式(2)、式(3)中外力矩  $M_{X_1}$ 、 $M_{Y_2}$  的表达式如下:

$$\begin{aligned} M_{X_1} &= -M_D + M_{X_{1R}} \\ M_{Y_2} &= -mla_{X_1}\cos\beta + M_{Y_{2R}} + \\ & ml(a_{Z_0}\cos\alpha - a_{Y_0}\sin\alpha)\sin\beta \quad (5) \end{aligned}$$

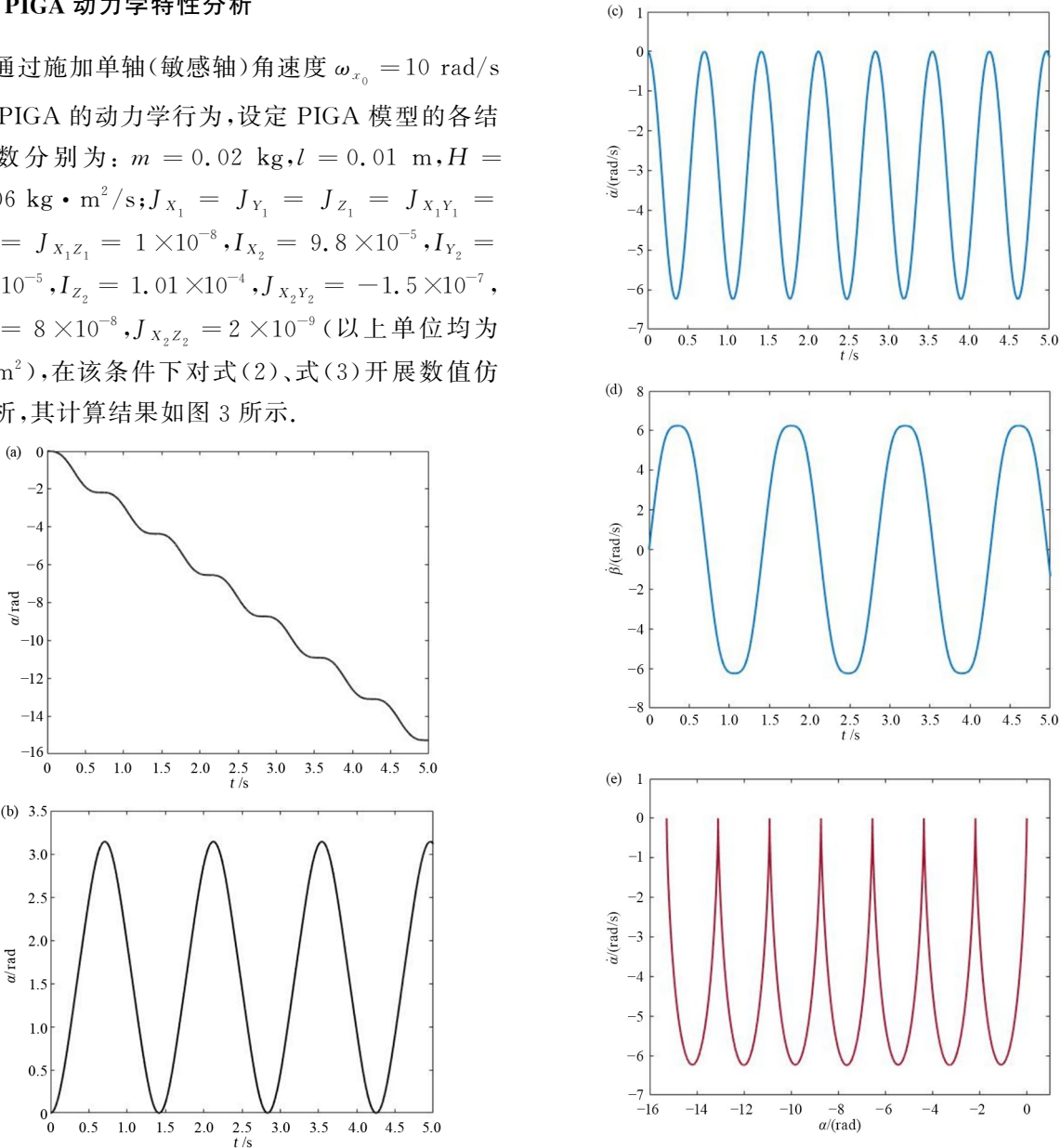
其中,  $M_D$  为电机的控制力矩;  $M_{X_{1R}}$ 、 $M_{Y_{2R}}$  为外框架轴和内框架轴的干扰力矩;  $mIa_{X_1}\cos\beta$  为由加速度  $a_{X_0}$  ( $a_{X_1}$ ) 引起的输入力;  $ml(a_{Z_0}\cos\alpha - a_{Y_0}\sin\alpha)\sin\beta$  是  $a_{Y_0}$ 、 $a_{Z_0}$  通过  $\beta$  角产生的横向交叉耦合力矩.

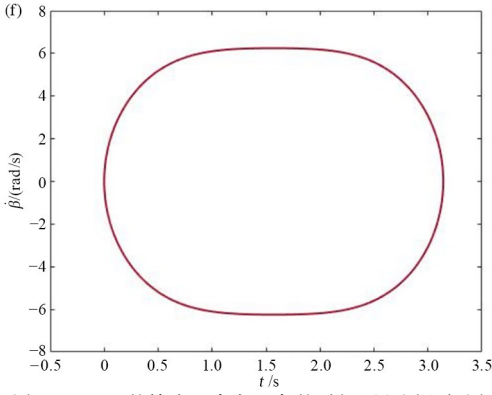
表 1 PIGA 相关符号含义  
Table 1 Meaning of symbols related to PIGA

符号	含义
$\omega_{X_0}, \omega_{Y_0}, \omega_{Z_0}$	基座沿相应轴相对惯性空间的角速度
$\omega_{X_1}, \omega_{Y_1}, \omega_{Z_1}$	外框架沿相应轴的绝对角速度
$\omega_{X_2}, \omega_{Y_2}, \omega_{Z_2}$	内框架沿相应轴的绝对角速度
$\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$	外框架组件绕 $X_1$ 轴相对于基座的角度、角速度、角加速度
$\beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}$	内框架组件绕 $Y_1$ 轴相对于外框架的角度、角速度、角加速度
$J_{X_1}, J_{Y_1}, J_{Z_1}$	外框架组件对坐标系 $X_1Y_1Z_1$ 的转动惯量
$J_{X_1Y_1}, J_{X_1Z_1}, J_{Y_1Z_1}$	外框架组件相对 $X_1$ 轴与 $Y_1$ 轴, $X_1$ 轴与 $Z_1$ 轴, $Y_1$ 轴与 $Z_1$ 轴所属平面的惯性积
$J_{X_2}, J_{Y_2}, J_{Z_2}$	内框架组件绕 $X_2Y_2Z_2$ 轴的转动惯量
$J_{X_2Y_2}, J_{X_2Z_2}, J_{Y_2Z_2}$	外框架组件相对 $X_2$ 轴与 $Y_2$ 轴, $X_2$ 轴与 $Z_2$ 轴, $Y_2$ 轴与 $Z_2$ 轴所属平面的惯性积
$J_e$	转子的赤道转动惯量

1.3 PIGA 动力学特性分析

通过施加单轴(敏感轴)角速度  $\omega_{x_0} = 10 \text{ rad/s}$  探究 PIGA 的动力学行为,设定 PIGA 模型的各结构参数分别为:  $m = 0.02 \text{ kg}$ ,  $l = 0.01 \text{ m}$ ,  $H = 0.0006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ;  $J_{X_1} = J_{Y_1} = J_{Z_1} = J_{X_1Y_1} = J_{Y_1Z_1} = J_{X_1Z_1} = 1 \times 10^{-8}$ ,  $I_{X_2} = 9.8 \times 10^{-5}$ ,  $I_{Y_2} = 5.7 \times 10^{-5}$ ,  $I_{Z_2} = 1.01 \times 10^{-4}$ ,  $J_{X_2Y_2} = -1.5 \times 10^{-7}$ ,  $J_{Y_2Z_2} = 8 \times 10^{-8}$ ,  $J_{X_2Z_2} = 2 \times 10^{-9}$  (以上单位均为  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ ),在该条件下对式(2)、式(3)开展数值仿真分析,其计算结果如图 3 所示。



图3 PIGA的输出 $\alpha$ 角与 $\beta$ 角的时间历程图和相图Fig. 3 Time history and phase trajectory of  $\alpha$  and  $\beta$  angles in PIGA

从图3(a)和3(c)可知, $\alpha$ 角的范围从0 rad开始持续增大,而角速度 $\alpha$ 在 $-6.242 \text{ rad/s}$ 至 $0 \text{ rad/s}$ 范围内呈周期性变化,图3(e)中相应的相轨迹呈现周期性;图3(b)和图3(d)显示转角 $\beta$ 在0至 $\pi$ 范围内周期性波动,这种现象主要由系统章动漂移引起,图3(f)中相应相轨迹呈现闭合状,收敛于周期解。然而,在PIGA的实际应用中,内部通常配置有伺服回路系统以控制内框架转角的幅度 $|\beta| \leq 10^{-3} \text{ rad}$ ,防止其持续增大至碰撞限制器。因此,本文以下研究将在满足 $|\beta| \leq 10^{-3} \text{ rad}$ 的前提下对系统内框架的动力学开展分析。

## 2 PIGA 动态误差解析表达

### 2.1 PIGA 完整误差模型

式(1)是PIGA的理想输出方程,如果仪表没有误差,参数稳定,则 $\dot{\alpha}$ 和 $\alpha$ 严格与输入加速度 $a_{x_1}$ 和视速度 $V_x$ 成比例。但实际上PIGA总是存在误差的。该误差就是在速度为一定时,实际输出值与理想输出值之间的差值。只考虑PIGA基座加速度的简化方法<sup>[7]</sup>,结合PIGA基座角运动条件下的动力学方程,对方程(3)右边的项整理并进行简化,得到考虑基座角运动的PIGA误差模型整理为:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} = & K_0 + K_x a_x + K_y a_y + K_z a_z + K_{xx} a_x^2 + \\ & K_{yy} a_y^2 + K_{zz} a_z^2 + K_{xy} a_x a_y + K_{xz} a_x a_z + \\ & K_{yz} a_y a_z + \Delta_x \omega_{x0} + \Delta_y \omega_{y0} + \Delta_z \omega_{z0} + \Delta_{xx} \omega_{x0}^2 + \\ & \Delta_{yy} \omega_{y0}^2 + \Delta_{zz} \omega_{z0}^2 + \Delta_{xy} \omega_{x0} \omega_{y0} + \Delta_{xz} \omega_{x0} \omega_{z0} + \\ & \Delta_{yz} \omega_{y0} \omega_{z0} + \Delta_x \dot{\omega}_{x0} + \Delta_y \dot{\omega}_{y0} + \Delta_z \dot{\omega}_{z0} + \\ & \delta_x a_x \omega_{x0} + \delta_y a_y \omega_{y0} + \delta_z a_z \omega_{z0} + \epsilon \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 PIGA 动态误差系数数量级分析

对于式(6),各项误差的物理意义、表达式、量

级分析如下:

#### (1) 零偏误差

$$K_0 = \frac{(2\beta)\ddot{I}_{y_2} + M_y R}{H \cos \beta} \quad (7)$$

该项误差为常值误差,主要是由轴承中的摩擦力矩、电磁力矩、阻尼力矩等干扰力矩引起的,与PIGA的输入无关。

#### (2) 输入轴的一次静态误差

$$K_x = \frac{ml}{H} \quad (8)$$

该项为PIGA的比例系数,决定结构在输出轴加速度一定时理想的输出值。

#### (3) 输入轴的二次静态误差

$$K_{xx} = \frac{[(I_{x_2} - I_{z_2}) \sin(2\beta) + 2J_{x_2 z_2} \cos(2\beta)] m^2 l^2}{2H^3 \cos \beta} \quad (9)$$

$K_{xx}$ 项为比力非线性误差,主要有非线性 $\alpha^2$ 引起,在对参数识别的过程中需要控制主惯量积 $I_{x_2}, I_{z_2}$ 尽量相等。

#### (4) 输入轴的一次动态误差

$$\Delta_x = \frac{-H \cos \beta}{H \cos \beta} = -1 \quad (10)$$

该项误差为输入轴角速度产生误差,为定值-1,不能忽略该项误差对PIGA输出精度的影响。

#### (5) 输出轴和转子轴的一次动态误差

$$\begin{aligned} \Delta_y &= -\frac{\sin \beta \sin \alpha}{\cos \beta} \approx \beta \sin \alpha \\ \Delta_z &= \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta} \approx \beta \cos \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

从上式可以看出,输出轴和转子轴的一次动态误差均为 $\alpha$ 的一次谐波项,其量级与 $\beta$ 角度量级可近似相同。PIGA中会配备伺服回路控制 $\beta$ 角,使 $\beta$ 保持在固定范围内。

#### (6) 二次动态误差

可将输入角速度的二次项系数 $\Delta_{yy}, \Delta_{zz}$ 视为离心力误差,利用三角函数变换,其表达式如下:

$$\Delta_{yy} = A_{\Delta_{yy}} \sin \alpha \sin(\alpha + \varphi_{\Delta_{yy}}) \quad (12)$$

$$\Delta_{zz} = A_{\Delta_{zz}} \cos \alpha \sin(\alpha + \varphi_{\Delta_{zz}}) \quad (13)$$

其中:

$$A_{\Delta_{yy}} = \frac{\sqrt{[(I_{z_2} - I_{x_2})\beta - J_{x_2 z_2}]^2 + (J_{x_2 y_2} + J_{y_2 z_2} \beta)^2}}{H},$$

$$\varphi_{\Delta_{yy}} = \arctan \left[ \frac{J_{x_2 y_2} + J_{y_2 z_2} \beta}{[(I_{z_2} - I_{x_2})\beta - J_{x_2 z_2}]} \right],$$



$$A_{\Delta_{zz}} = \frac{\sqrt{[(I_{z_2} - I_{x_2})\beta - J_{x_2z_2}]^2 + (J_{x_2y_2} + J_{y_2z_2}\beta)^2}}{H},$$

$$\varphi_{\Delta_{zz}} = \arctan \left[ -\frac{(I_{z_2} - I_{x_2})\beta - J_{x_2z_2}}{J_{x_2y_2} + J_{y_2z_2}\beta} \right].$$

根据式(12)、式(13),图4展示了误差系数 $\Delta_{yy}$ 和 $\Delta_{zz}$ 在不同 $\beta$ 角下随系统主惯量积参数差值 $I_{x_2} - I_{z_2}$ 的变化趋势.从整体来看,误差值分别位于 $[1.1 \times 10^{-5}, 1.18 \times 10^{-5}]$ 和 $[1.08 \times 10^{-5}, 1.11 \times 10^{-5}]$ 范围内,随着 $|I_{x_2} - I_{z_2}|$ 的增大,误差系数 $\Delta_{yy}$ 和 $\Delta_{zz}$ 均呈递增趋势,说明惯量积的差值越大,系统在角运动响应中积累的误差越明显.

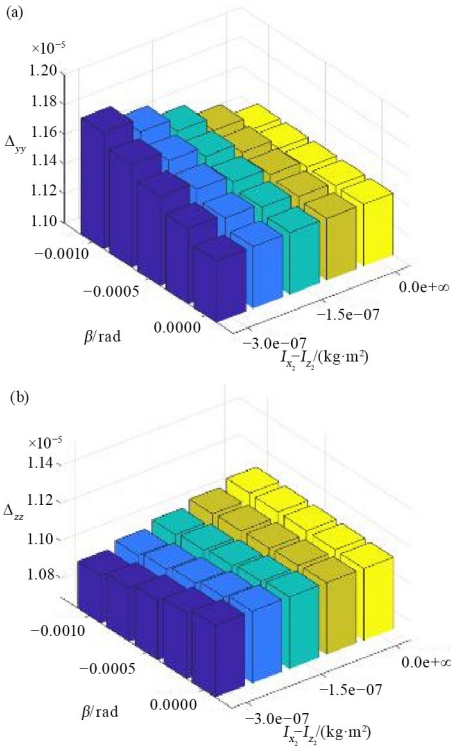


图4 系统参数 $I_{x_2} - I_{z_2}$ 对误差系数数量级分析

Fig.4 Magnitude analysis of error coefficients of system parameter  $I_{x_2} - I_{z_2}$

### (7)交叉耦合二次动态误差

交叉耦合二次项系数也可视为离心力误差,其表达式如下:

$$\Delta_{xy} \approx \frac{(J_{x_2y_2}\beta - J_{y_2z_2})\cos\alpha}{H} \quad (14)$$

$$\Delta_{xz} \approx -\frac{(J_{y_2z_2} - J_{x_2y_2}\beta)\sin\alpha}{H} \quad (15)$$

$$\Delta_{yz} \approx A_{\Delta_{yz}} \sin(2\alpha + \varphi_{\Delta_{yz}}) \quad (16)$$

其中:

$$A_{\Delta_{yz}} = \frac{\sqrt{(J_{x_2y_2} + J_{y_2z_2}\beta)^2 + [(I_{x_2} - I_{z_2})\beta + J_{x_2z_2}]^2}}{H},$$

$$\varphi_{\Delta_{yz}} = \arctan \left[ \frac{J_{x_2y_2} + J_{y_2z_2}\beta}{(I_{x_2} - I_{z_2})\beta + J_{x_2z_2}} \right].$$

根据式(14)~(16),图5(a)和图5(b)展示了二次耦合误差系数 $\Delta_{xy}$ 和 $\Delta_{xz}$ 随 $\alpha$ 和 $\beta$ 的变化情况. $\Delta_{xy}$ 和 $\Delta_{xz}$ 在 $\alpha$ 方向呈现周期性波动,而在 $\beta$ 方向则呈线性变化.图5(c)表示误差系数 $\Delta_{yz}$ 随 $\alpha$ 和 $\beta$ 的变化情况,相较 $\Delta_{xy}$ 和 $\Delta_{xz}$ , $\Delta_{yz}$ 在 $\alpha$ 方向的周期波动频率明显增大,约为图5(a)和5(b)中波动的2倍,而在 $\beta$ 方向呈线性变化,说明 $\Delta_{yz}$ 对 $\alpha$ 的变化更敏感.

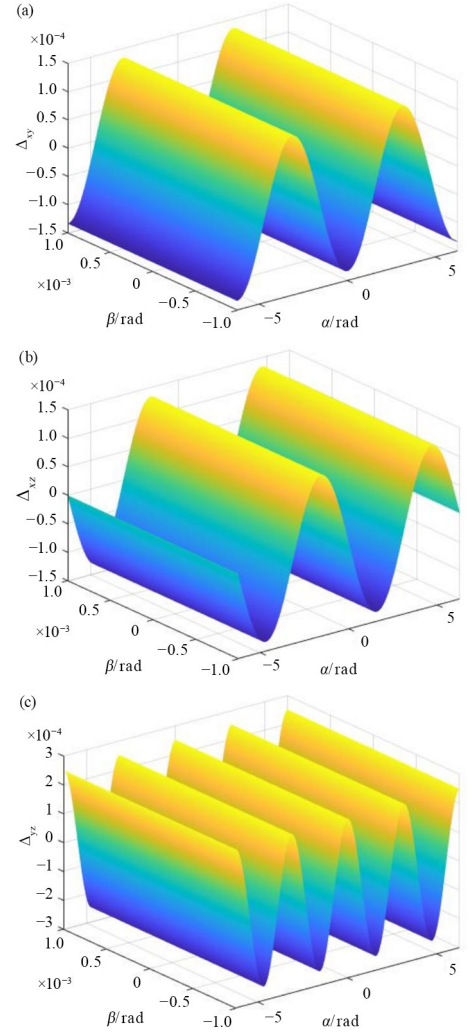


图5 系统输出 $\alpha, \beta$ 对交叉耦合二次动态误差系数数量级影响  
Fig.5 Magnitude analysis of cross-coupled quadratic dynamic error coefficients affected by system output  $\alpha, \beta$

### (8)角加速度误差

与敏感轴角加速度相关的误差项的表达形式如下所示:

$$\dot{\Delta}_x = -\frac{(J_{x_2y_2}\cos\beta + J_{y_2z_2}\sin\beta)}{H\cos\beta} \quad (17)$$

从上式可以看出,该项仅与系统参数和内框架

的进动角度  $\beta$  相关,在  $\beta$  保持不变的情况下为定值。

与角加速度相关的误差项  $\dot{\Delta}_y, \dot{\Delta}_z$  的表达形式如下所示,均可展开为  $\alpha$  的一次谐波函数:

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}_y &\approx A_{\dot{\Delta}_y} \sin(\alpha + \varphi_{\dot{\Delta}_y}), \\ \dot{\Delta}_z &\approx A_{\dot{\Delta}_z} \sin(\alpha + \varphi_{\dot{\Delta}_z})\end{aligned}\quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned}A_{\dot{\Delta}_y} &= \frac{\sqrt{(J_{x_2 y_2} \beta - J_{y_2 z_2})^2 + I_{y_2}^2}}{H}, \\ \varphi_{\dot{\Delta}_y} &= \arctan\left(\frac{I_{y_2}}{J_{y_2 z_2} - J_{x_2 y_2} \beta}\right), \\ A_{\dot{\Delta}_z} &= \frac{\sqrt{(J_{x_2 y_2} \beta - J_{y_2 z_2})^2 + I_{y_2}^2}}{H}, \\ \varphi_{\dot{\Delta}_z} &= \arctan\left(\frac{I_{y_2}}{J_{x_2 y_2} \beta - J_{y_2 z_2}}\right).\end{aligned}$$

### (9) 静态—动态耦合误差

静态—动态耦合误差是在 PIGA 同时存在比力和角速度输入时,由于垂直度、相交度及内框架的进动角度引起的内外框架不等惯量和内框架惯量积的牵连运动产生的误差。

$$\begin{aligned}\delta_y &\approx \frac{-2(J_{x_2 y_2} \beta - J_{y_2 z_2}) ml}{H^2} \cos \alpha + \\ &\quad \frac{[(I_{z_2} - I_{x_2}) + 4J_{x_2 z_2} \beta - I_{y_2}] ml}{H^2} \sin \alpha\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\delta_z &\approx \frac{-2(J_{x_2 y_2} \beta - J_{y_2 z_2}) ml}{H^2} \sin \alpha + \\ &\quad \frac{[I_{y_2} - (I_{z_2} - I_{x_2}) - 4J_{x_2 z_2} \beta] ml}{H^2} \cos \alpha\end{aligned}\quad (20)$$

## 3 PIGA 基座角运动影响分析

基于 PIGA 误差模型(6),本节研究基座角速度输入对 PIGA 动态响应特性的影响机制。

### 3.1 输入轴角速度的影响

图 6(a)与 6(b)分别展示了在不同的基座  $x$  轴角速度输入  $\omega_{x_0} = \{-10, -5, -2, 0, 2, 5, 10\}$  rad/s 下,PIGA 的输出角度  $\alpha(t)$  与角速度  $\dot{\alpha}(t)$  的演化规律。其中,基座  $x$  轴线性加速度设定为  $a_{x_0} = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。

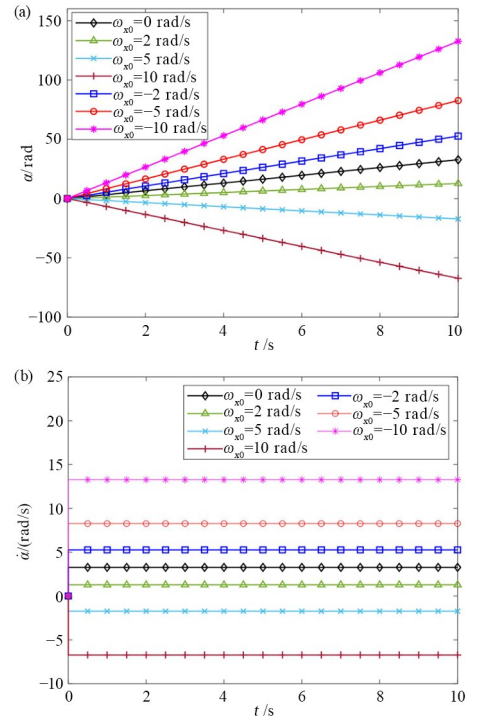
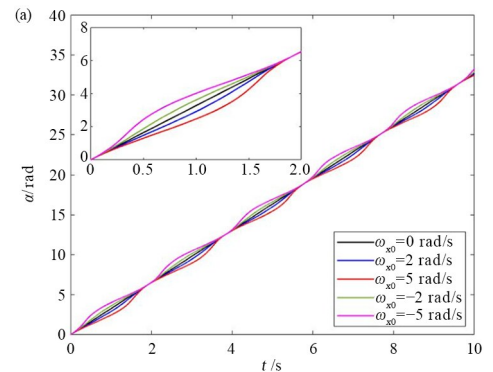


图 6 基座  $x$  轴角速度  $\omega_{x_0}$  对 PIGA 输出的影响  
Fig. 6 Response of the PIGA output to base  $x$ -axis angular velocity  $\omega_{x_0}$

由图 6(a)可见,  $\alpha(t)$  随时间线性变化,且斜率随输入角速度的增大而增加,同时表现出典型的积分效应,即角速度越大,积分时间越长,角度偏移越明显。图 6(b)说明了该角速度  $\omega_{x_0}$  对响应影响的恒定性,各曲线在全时域内保持恒定,与图 6(a)中的线性角度变化趋势相一致,表明 PIGA 在恒定角速度输入下具有稳定的积分能力。

### 3.2 输出轴角速度的影响

为分析 PIGA 的方向敏感特性,图 7(a)与 7(b)分别展示了在基座绕  $y$  轴以不同恒定角速度  $\omega_{y_0} = \{-5, -2, 0, 2, 5\}$  rad/s 旋转时,  $\alpha(t)$  与  $\dot{\alpha}(t)$  的变化规律。此处基座  $x$  轴线性加速度仍然保持为  $a_{x_0} = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。



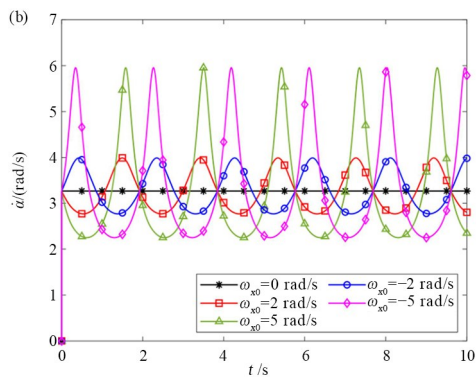


图 7 基座  $y$  轴角速度  $\omega_{y_0}$  对 PIGA 输出的影响  
Fig. 7 Response of the PIGA output to base  $y$ -axis angular velocity  $\omega_{y_0}$

与图 6 中绕  $x$  轴角速度输入导致的明显线性增长不同,此处所有角速度工况输入下,角度响应均呈现周期性振荡特征,振荡幅度相对较小.在图 7(a)中,所有曲线均以近似相同的速率线性上升,上升趋势均与不施任何加加速度的工况一致,但在此基础上叠加周期性小幅振荡,图 7(a)中的局部放大图揭示了不同角速度输入所引发的微弱响应差异.尽管存在扰动,角度主趋势保持稳定线性,说明系统对  $y$  轴输入并未产生明显、有效的积分作用,表明 PIGA 对非敏感轴的响应显著减弱.

图 7(b)中  $\dot{\alpha}(t)$  呈现出明显的周期性波动,波形近似正弦,振荡频率基本一致,表明系统内部存在一个与结构特性相关的固有频率.随着输入角速度幅值的增大,角速度响应的振幅也同步增大,其中  $\omega_{y_0} = \pm 5 \text{ rad/s}$  条件下振荡最为剧烈,且在波峰处出现明显尖峰响应.尽管角速度响应存在明显扰动,但其均值始终维持在  $\omega_{y_0} = 0 \text{ rad/s}$  处的数值水平,由于累积效应的抵消未对角度主趋势产生显著偏移.因此,PIGA 对绕  $y$  轴的恒定角速度输入响应主要表现为输出角度在主趋势附近的谐波振动形式,系统未将此类输入转化为主要的积分输出.

### 3.3 转子轴角速度的影响

图 8(a)与 8(b)给出了在动基座绕  $z$  轴施加恒定角速度输入  $\omega_{z_0} = \{-5, -2, 0, 2, 5\} \text{ rad/s}$  条件下,PIGA 的角度  $\alpha(t)$  与角速度  $\dot{\alpha}(t)$  响应情况.从图 8(a)可见,系统整体呈现稳定线性上升趋势,不同输入角速度下输出曲线几乎重合,说明绕  $z$  轴角速度输入对角度主趋势影响甚微.但在其放大图中可观察到轻微的扰动差异,表明系统对该方向仍存在一定程度的动态响应,与  $y$  轴输入情况下的角

度响应类似,但扰动幅度与叠加特征略有不同,与  $y$  轴、 $z$  轴的二次动态误差项的表达式差异有关.图 8(b)中  $\dot{\alpha}(t)$  呈现典型周期性振荡,振荡频率与  $y$  轴扰动情况一致,正负角速度输入下的相位有差异,尤其在  $\omega_{z_0} = \pm 5 \text{ rad/s}$  时表现较为明显.因此,角速度扰动主要体现为结构的谐波振荡,未导致角度的显著偏移,系统依然保持良好的方向选择性,仅对设定敏感轴( $x$  轴)产生有效积分响应.

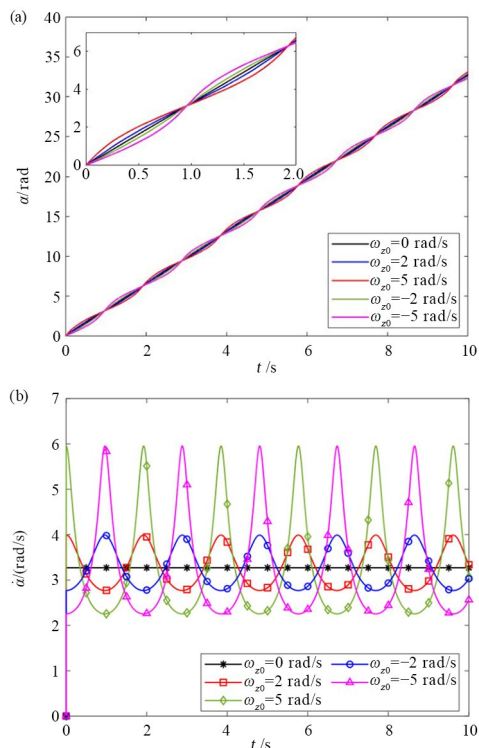


图 8 基座  $z$  轴角速度  $\omega_{z_0}$  对 PIGA 输出的影响  
Fig. 8 Response of the PIGA output to base  $z$ -axis angular velocity  $\omega_{z_0}$

### 3.4 双轴交叉耦合角速度的影响

在不同角速度输入条件下,图 9(a)和 9(b)分别给出了  $\alpha(t)$  及  $\dot{\alpha}(t)$  随时间的响应特性.三组仿真对比包括:仅存在  $x$  轴角速度、仅存在  $y$  轴角速度,以及  $x$  轴与  $y$  轴角速度同时存在的情形.在图 9(a)中,当仅施加  $x$  轴角速度时( $\omega_{x_0} = 2 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{y_0} = 0 \text{ rad/s}$ ),角度随时间线性增长,曲线斜率明显小于仅存在  $y$  轴角速度的情形( $\omega_{x_0} = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{y_0} = 2 \text{ rad/s}$ ),与双轴角速度同时存在  $\omega_{x_0} = 2 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{y_0} = 2 \text{ rad/s}$  的情形保持相对一致,表明  $x$  轴角速度主要决定了系统的角度变化速率,其存在降低了系统输出角速度.而在仅施加  $y$  轴角速度时( $\omega_{x_0} = 0 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_{y_0} = 2 \text{ rad/s}$ ), $\alpha(t)$  增长更快且呈现周期性起伏,说明  $y$  轴角速度引入了明显的动



态扰动.当 $x$ 轴与 $y$ 轴角速度同时存在时( $\omega_{x_0}=2\text{ rad/s},\omega_{y_0}=2\text{ rad/s}$ ),角度曲线在保持缓慢增长的基础上出现轻微波动,表明两个方向的耦合导致了输出数量级变化和动态扰动的叠加效应.

图9(b)给出了 $\dot{\alpha}(t)$ 随时间的变化情况.当 $x$ 轴角速度单独作用时,系统输出几乎保持恒定,未引发显著波动响应;而 $y$ 轴角速度的施加导致 $\dot{\alpha}(t)$ 在较低水平上呈现波动效应;当两个方向的角速度同时存在时, $\dot{\alpha}(t)$ 在中等幅值附近产生明显波动,证明了 $x$ 轴角速度对输出值大小的主导作用以及 $y$ 轴角速度对输出波动性的贡献.综上, $x$ 轴角速度主要影响系统输出的幅值,而 $y$ 轴角速度主要引入周期性的动态扰动;二者共同作用时会在系统响应中表现为数值增大与波动性增强的叠加特性.

图10展示了仅存在 $x$ 轴角速度或 $z$ 轴角速度,以及 $x$ 轴与 $z$ 轴角速度同时存在三种工况下,PIGA输出随时间的变化情况.与图9中 $x$ 轴与 $y$ 轴角速度叠加情况下的响应特性类似, $x$ 轴角速度主要影响输出数值水平, $z$ 轴角速度引入周期性波动,二者共同作用时系统输出呈现幅值变化与波动性耦合的复合效应.

图11展示了仅存在 $y$ 轴角速度或 $z$ 轴角速度,以及 $y$ 轴与 $z$ 轴角速度同时存在三种工况下,

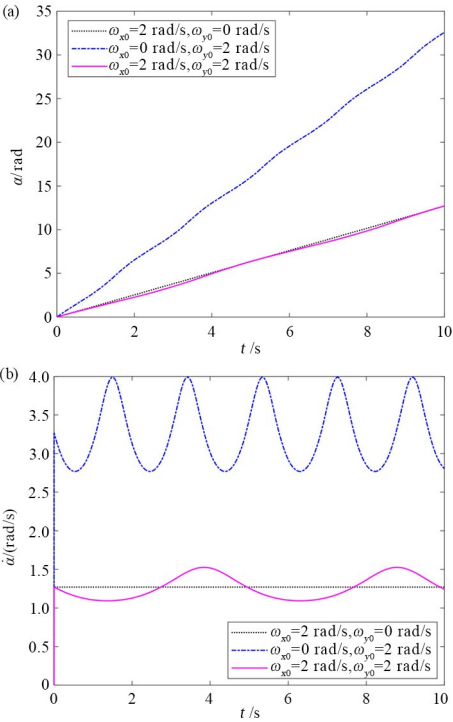


图9 基座 $x$ 轴和 $y$ 轴同时存在角速度对PIGA输出的影响  
Fig.9 Effect of simultaneous  $x$ -axis and  $y$ -axis angular velocities on PIGA output

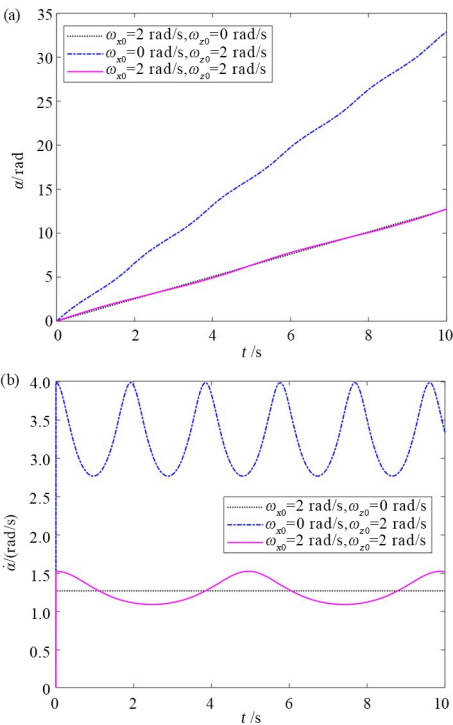


图10 基座 $x$ 轴和 $z$ 轴同时存在角速度对PIGA输出的影响  
Fig.10 Effect of simultaneous  $x$ -axis and  $z$ -axis angular velocities on PIGA output

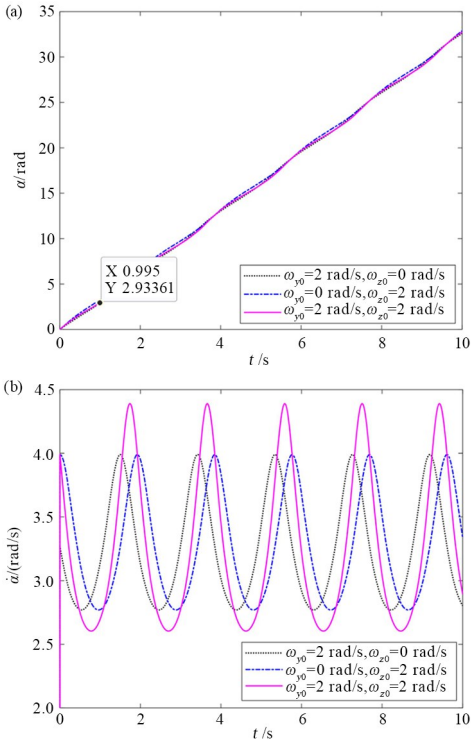


图11 基座 $y$ 轴和 $z$ 轴同时存在角速度对PIGA输出的影响  
Fig.11 Effect of simultaneous  $y$ -axis and  $z$ -axis angular velocities on PIGA output

PIGA输出随时间的变化情况.与图9和图10比较,发现 $y$ 轴和 $z$ 轴角速度对系统输出主要引发的是不同相位的周期性扰动.两者单独作用时系统输出分别呈现具有特定相位的谐波响应,而当二者同

时存在时,输出信号仍表现为周期性波动,其整体波形相位和幅值由两者的耦合叠加决定,体现出典型的多频谐波叠加效应。

### 3.5 三轴交叉耦合角速度的影响

图 12 给出了在三轴同时存在角速度、仅存在敏感轴( $x$  轴)和其他一条坐标轴角速度三种工况下,PIGA 输出随时间的变化特性。与图 11 类似,三种工况均表现为周期性波动,但由于三轴角速度同时作用时, $x$  轴角速度的存在抑制了  $\alpha(t)$  的上升,因此  $\alpha(t)$  相较于图 11 有所减小。三轴同时存在角速度也表现出典型的耦合谐波现象,即角速度对输出的影响仍然是通过两个频率的谐波叠加来表现的。

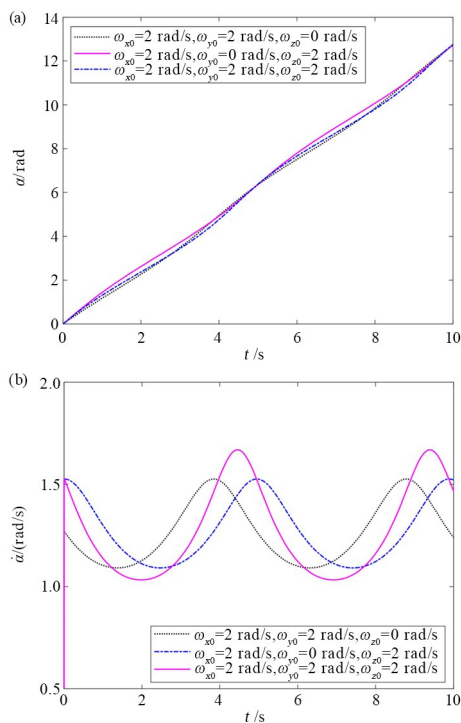


图 12 基座  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴同时存在角速度对 PIGA 输出的影响  
Fig. 12 Effect of simultaneous  $x$ -axis,  $y$ -axis,  $z$ -axis angular velocities on PIGA output

## 4 结论

本文在考虑基座角运动条件下研究 PIGA 的误差特性与动态响应,通过建立系统的动力学模型,推导了多源耦合下的 PIGA 误差模型表达式,来反映静态误差、动态误差以及交叉耦合误差的演化机制。通过对主要误差项的物理含义与数量级展开定量评估,指出不同误差源对系统输出精度的影响程度。同时,基于构建的仿真模型,分析了基座绕各轴旋转时对 PIGA 输出的影响规律。研究发现,

$x$  轴角速度作为 PIGA 的敏感方向,主要决定输出角度的增长趋势与整体数值水平;而  $y$  轴与  $z$  轴角速度则主要引发周期性扰动,影响输出的波动性。特别是在多轴角速度输入条件下,系统表现出明显的谐波叠加特征,输出响应的频率结构与相位特性密切相关于各轴角速度的组合方式。

通过本文的研究发现,传统静态误差模型在动基座环境下难以有效描述 PIGA 的实际输出特性,而构建包含三轴角运动激励的动态误差模型,可实现对各误差项的定量分离,为补偿提供理论依据。特别是明确了角速度二次项、交叉耦合项及角加速度项的具体表达形式,使得针对性地补偿这些动态误差成为可能。在后续的研究中,将提出本文建立的误差模型的实时补偿算法,设计基于模型预测或神经网络的自适应补偿器,并通过仿真与实验验证其有效性。因此,PIGA 作为一种重要的惯性测量装置,其误差模型理论经历了从简单到复杂、从静态到动态、从单一到多源耦合的研究过程。

## 参考文献

- [1] 王巍,孙文利,李亮,等. 摆式积分陀螺加速度计技术发展综述[J]. 导航与控制, 2023, 22(5): 12—15, 103.  
WANG W, SUN W L, LI L, et al. Review on the development of pendulous integrating gyro accelerometer technology [J]. Navigation and Control, 2023, 22(5): 12—15, 103. (in Chinese)
- [2] PAN J Y, ZHANG C X, CAI Q Z. An accurate calibration method for accelerometer nonlinear scale factor on a low-cost three-axis turn-table [J]. Measurement Science and Technology, 2014, 25(2): 025102.
- [3] Zhou Y, Zhang J Y, Yan L, et al. Directional multi-position calibration of PIGA of inertial platform system [C]//22nd Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, New York: IEEE, 2015.
- [4] REN S Q, SUN C. A new method for calibrating nonlinear coefficients of PIGA on linear vibrator [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2019, 68(8): 2898—2906.
- [5] 吴嘉琦,赖丽燕,李以贵. 基于 MEMS 工艺的微热加速度计和微热陀螺仪的制备[J]. 微纳电子技术, 2024, 61(7): 116—125.

- WU J Q, LAI L Y, LI Y G. Preparation of micro-thermal accelerometer and micro-thermal gyroscope based on MEMS process [J]. *Micronanoelectronic Technology*, 2024, 61(7): 116—125. (in Chinese)
- [6] 严恭敏, 陈浩然, 李静, 等. 一种基于实测飞行轨迹的惯导误差分析方法研究[J]. *导航定位与授时*, 2024, 11(3): 58—65.
- YAN G M, CHEN H R, LI J, et al. Covariance analysis for INS errors based on in-field measured flight trajectory [J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2024, 11(3): 58—65. (in Chinese)
- [7] 魏宗康, 高荣荣. 陀螺加速度计交叉耦合误差参数标定及补偿方法[J]. *导弹与航天运载技术*, 2024(5): 56—63.
- WEI Z K, GAO R R. A calibration and compensation method for PIGA's cross coupling error [J]. *Missiles and Space Vehicles*, 2024(5): 56—63. (in Chinese)
- [8] WANG L X, XU J H, LIU J Y. Test data processing scheme of inertial system based on rocket sled [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2008, 16(3): 364—367
- [1] 王常虹, 任顺清, 陈希军. 惯性仪表测试技术[J]. *导航定位与授时*, 2016, 3(5): 1—4.
- WANG C H, REN S Q, CHEN X J. Measurement technology for inertial instrument [J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2016, 3(5): 1—4. (in Chinese)
- [10] ZHANG Y S, GUO Y J, LI K, et al. Error-compensation method for inclination measurement under the influence of the dynamic interference [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(3): 734—741.
- [11] 孙闯, 任顺清. 陀螺加速度计交叉二次项的线振动台测试方法[J]. *导航定位与授时*, 2017, 4(5): 105—110.
- SUN C, REN S Q. Measurement method for cross-quadratic coefficient of PIGA on linear vibration table [J]. *Navigation Positioning and Timing*, 2017, 4(5): 105—110. (in Chinese)
- [12] SUN C, REN S Q, WANG C H. Revised error calibration model of linear accelerometer on precision centrifuge [J]. *Review of Scientific Instruments*, 2019, 90(8): 085002.
- [13] 徐风霞, 赵学增. 三轴台伺服陀螺加速度计闭环控制系统设计[J]. *航天控制*, 2011, 29(1): 10—14.
- XU F X, ZHAO X Z. Design of closed loop control system for three-axes turntable servo PIGA [J]. *Aerospace Control*, 2011, 29(1): 10—14. (in Chinese)
- [14] 徐风霞, 夏刚, 苏宝库, 等. 总体最小二乘辨识陀螺加速度计误差模型研究 [J]. *传感器与微系统*, 2007, 26(9): 20—22, 28.
- XU F X, XIA G, SU B K, et al. Study on identifying error model of PIGA by total least squares method [J]. *Transducer and Microsystem Technologies*, 2007, 26(9): 20—22, 28. (in Chinese)
- [15] 贺宇, 孙文利, 冯毅博. 三浮陀螺加速度计浮子六自由度运动分析[J]. *导航与控制*, 2021, 20(6): 45—52, 103.
- HE Y, SUN W L, FENG Y B. 6-DOF motion analysis of PIGA floater [J]. *Navigation and Control*, 2021, 20(6): 45—52, 103. (in Chinese)
- [16] 周晓俊, 凌林本, 杨功流, 等. 基于结构设计的陀螺加速度计温度系数补偿方法[J]. *中国惯性技术学报*, 2023, 31(2): 207—212.
- ZHOU X J, LING L B, YANG G L, et al. Temperature coefficient compensation method of gyro accelerometer based on structure design [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2023, 31(2): 207—212. (in Chinese)
- [17] 高庆丰, 夏群力, 方蜀州, 等. 安装误差和动不平衡对旋转导弹惯性器件输出的影响及补偿[J]. *北京理工大学学报*, 2010, 30(7): 765—770.
- GAO Q F, XIA Q L, FANG S Z, et al. Influence of installation error and dynamic imbalance on the output of inertia devices in rolling missiles and its compensation [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2010, 30(7): 765—770. (in Chinese)
- [18] 荣吉利, 杨梓航, 周晓俊, 等. 陀螺加速度计精细化建模仿真方法研究[J]. *北京理工大学学报*, 2024, 44(12): 1233—1240.
- RONG J L, YANG Z H, ZHOU X J, et al. Study on the refined modeling and simulation method for pendulous integrating gyro accelerometer [J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2024, 44(12): 1233—1240. (in Chinese)
- [19] 王子超, 范会迎, 谢元平, 等. 捷联惯导系统复杂误差参数系统级标定方法[J]. *红外与激光工程*, 2022, 51(7): 285—295.
- WANG Z C, FAN H Y, XIE Y P, et al. System-level calibration method for complex error coefficients of strapdown inertial navigation system [J].

Infrared and Laser Engineering, 2022, 51 (7): 285—295. (in Chinese)

[20] 王国栋,甄新帅,王延辰,等. 高加速度条件下的 MEMS IMU 陀螺仪误差标定方法[J]. 中国惯性技术学报, 2023, 31(5): 523—530.

WANG G D, ZHEN X S, WANG Y C, et al. Error calibration method of MEMS IMU gyroscope under

high acceleration [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2023, 31(5): 523—530. (in Chinese)

[21] 陆元九. 惯性器件(上)[M]. 北京: 中国宇航出版社, 1990

LU Y J. Inertial devices (I) [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 1990. (in Chinese)