

基于 QR 分解的含奇异构型闭环多体系统违约修正^{*}

王天奎¹ 周垂当当¹ 卓英鹏^{2,3} 查旭^{2,3} 张欣刚^{1†} 张树翠¹ 姚文莉¹

(1. 青岛理工大学 理学院, 青岛 266520) (2. 北京空天技术研究所, 北京 100074)

(3. 空天飞行技术全国重点实验室, 雄安 071700)

摘要 针对闭环多体系统程式化建模引入的冗余约束和违约问题,首先采用带列置换的 QR 分解方法识别出独立的约束方程组,并获得约束法空间和切空间的正交基向量。随后,通过对广义坐标和广义速度进行直接修正,使其在形成运动方程之前就满足约束方程,不必在积分步结束后再修正违约。针对多体系统滑入奇异构型后加速度失真但并未违约的问题,识别出偏差放大的方向与约束流形的切空间正交,进而利用广义加速度的切空间分量进行修正,使数值解得到很大的改善。最后,通过数值实验验证了所提方法的实用性和有效性。

关键词 闭环多体系统, 违约修正, 约束独立性, QR 分解, 微分代数方程

中图分类号:O313.7

文献标志码:A

Constraints Violation Correction of Closed-Loop Multibody System with Singular Configuration Based on QR Decomposition^{*}

Wang Tiankui¹ Zhou Chuidangdang¹ Zhuo Yingpeng^{2,3} Zha Xu^{2,3} Zhang Xingang^{1†} Zhang Shucui¹ Yao Wenli¹

(1. School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

(2. Beijing Aerospace Technology Institute, Beijing 100074, China)

(3. National Key Laboratory of Aerospace Flight Technology, Xiong'an 071700, China)

Abstract To address the redundant constraints and constraints violation issues arising from the stylized modeling of closed-loop multibody systems, the QR decomposition method with column permutation is employed to identify the independent constraint equations. This process yields the orthogonal basis vectors for both the constraint normal space and tangent space. Subsequently, by directly adjusting the generalized coordinates and generalized velocity, the constraint equation is satisfied prior to forming the motion equation, eliminating the need for corrections after the integration step. Concerning the issue of distorted acceleration in the multi-body system when entering a singular configuration, the direction of deviation amplification is determined to be orthogonal to the tangent space of the constraint manifold. The tangent space component of the generalized acceleration is then utilized for correction, significantly enhancing the numerical solution. Finally, the practicality and effectiveness of the proposed method are validated through numerical experiments.

Key words closed-loop multibody system, constraint violation correction, constraint independence, QR decomposition, differential-algebraic equations

2024-12-16 收到第 1 稿, 2025-04-10 收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目(12202224, 12272197), 山东省自然科学基金资助项目(ZR2022MA066), National Natural Science Foundation of China(12202224, 12272197), Natural Science Foundation of Shandong Province(ZR2022MA066).

† 通信作者 E-mail:zhangxingang@qut.edu.cn

引言

复杂机械系统的在线实时仿真是实现主动控制和实时控制的重要途径,这些机械系统一般属于闭环多体系统,由切断铰方法派生出的开环多体系统动力学方程是一组微分代数方程(DAEs),由于冗余约束和奇异构型的存在^[1,2],其计算效率和稳定性仍有待提高与改进。随着人工智能技术的发展,数据驱动的动力学模型成为快速预测系统运动学行为的可行途径,这也对训练样本集的精度提出了更高的需求,如何快速、准确且程式化地识别模型中动态变化的独立约束仍然具有切实的研究价值。

目前,Baumgarte 约束稳定化方法被广泛应用于约束多体系统的建模过程中^[3-6],该方法将加速度约束方程改写为位置、速度、加速度约束方程的线性组合,形式简洁、意义明确且便于编程,若组合系数选择得当,则在抑制违约方面极为有效。随着 AI 技术的发展,由机器学习方法生成的动力学模型必然包含冗余约束,系统运动到奇异构型附近时的数值形态也将变得极差,仅依靠约束稳定化方法往往不能有效地抑制违约问题。与抑制违约的思路相反,广义坐标分区方法^[7,8]事先从广义坐标中识别出一组独立的坐标进行单独积分,非独立坐标通过约束方程求得,从而直接消除违约。尽管这类方法成功地解决了一些问题,但系统中独立坐标的数目经常在求解过程中变化,从而给数值求解带来一定的困难。以正交投影修正方法为代表的直接修正方法在每个积分步结束时利用 Newton-Raphson 方法对违约情况进行修正,使其高精度地满足位置和速度约束方程^[9,10]。其中,修正误差的范数可以在欧式空间中度量,或者其度量张量可在质量矩阵描述的黎曼空间中度量^[11,12]。尽管 Eich 等证明了这类方法的收敛性^[13],但在冗余约束存在的情况下(即便消除了第一类冗余约束),约束雅可比矩阵的秩也有可能是亏缺的,通过拉格朗日乘子法获得的系统动力学方程将难以求解。虽然位置、速度及加速度约束方程仍然高精度满足,但广义加速度产生严重失真,如果能有效地识别系统中的独立约束,可以有效地改善数值形态。例如,通过约束雅可比矩阵的行约化阶梯形式(RREF)可以识别独立约束,但极为耗时。一些学者采用质量阵的 Moore-Penrose 广义逆(MPI)方法来获得广义加速度

度^[14-16]。事实上,LU 分解、RREF 以及 MPI 方法均可作为约束雅可比矩阵的分解方法,但上述方法均未获得约束超曲面上的法空间和切空间的基底向量,从而给后续的违约修正带来了一定的限制。

针对上述问题,提出一种基于列置换 QR 分解的状态变量空间分解方法,该方法能够在识别系统独立约束的同时获得约束超曲面法空间和切空间的正交基底,并通过广义坐标和广义速度进行预修正使其高精度地满足约束方程。通过建立切断铰处的一般化约束方程,验证了所提方法的有效性。

1 约束多体系统动力学方程

设闭环多体系统的拓扑结构如图 1 所示。将回路在 B4、B6 号物体间切断铰,将非树系统改造为派生树系统,其虚功率方程可表示为

$$\delta \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F}) = 0 \quad (1)$$

式中, \mathbf{M} 为广义质量阵, \mathbf{F} 为广义力向量, \mathbf{q} 是系统的 n 个广义坐标。由切断铰所派生的约束方程应满足该铰链对原系统的运动学约束,进而可将约束方程表示为

$$\Phi(\mathbf{q}, t) = 0 \quad (2)$$

由位置约束方程派生的速度和角速度约束方程为

$$\Phi_q \dot{\mathbf{q}} + \Phi_t = 0 \quad (3)$$

$$\Phi_q \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\Phi}_t = 0 \quad (4)$$

式中, Φ_q 表示约束雅可比矩阵。

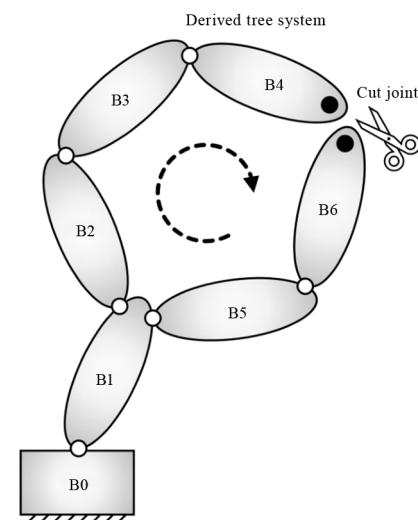


Fig. 1 闭环多体系统与切断铰
Fig. 1 A closed-loop multibody system with cut joint

速度约束方程的虚变分可表示为

$$\Phi_q \delta \dot{\mathbf{q}} = \delta \dot{\mathbf{q}}^T \Phi_q^T = 0 \quad (5)$$

上式表明,广义速度的虚变分与约束雅可比矩阵转

置的每一列均正交.结合公式(1),可将约束系统的动力学方程表示为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{F} = \boldsymbol{\Phi}_q^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6)$$

式中, $\boldsymbol{\lambda}$ 是包含有 m 个拉氏乘子的向量.用加速度约束方程(4)代替位置约束方程(2),从而补齐了与拉氏乘子数目相同的辅助方程.约束多体系统的动力学方程可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \boldsymbol{\Phi}_q^T \\ \boldsymbol{\Phi}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ -\dot{\boldsymbol{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} - \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

上式可解的条件是约束雅可比矩阵满秩.事实上,如果依靠人工智能方法编制一般多体系统的动力学方程,上述条件可能无法直接满足.例如,空间旋转铰有 5 个约束方程,若物体做平面运动,则独立的约束方程仅有 1 个,其他约束方程将自动满足.然而,为了保证系统组装的完整性,这类约束在机器建模过程中不可避免(或被故意引入),也被称为第一类冗余约束^[17,18].除此之外,多体系统还有可能具有奇异构型,独立的约束在求解过程中不断变化,被称为第二类冗余约束.系统在运动到奇异构型附近未必违约,但很有可能造成广义加速度失真,并造成直接修正方法失效.在一些特殊情况下,系统的质量阵也有可能不满秩,需要进一步判断系统中不受约束的独立虚速度.

2 基于 QR 分解的 DAEs 数值方法

2.1 独立约束的识别

在程式化生成的多体系统动力学方程中,两类冗余约束可能伴随出现.为了判断系统中独立的约束,确定约束雅可比矩阵中独立的行向量是非常必要的,该过程可通过对转置矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_q^T$ 做列置换的 QR 分解^[19] 来获得,即

$$\boldsymbol{\Phi}_q^T = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{P}^T \quad (8)$$

式中, \mathbf{Q} 表示 $n \times n$ 维正交矩阵, \mathbf{R} 表示 $n \times m$ 维上三角矩阵, \mathbf{P} 表示 $m \times m$ 维置换矩阵,该矩阵由单位矩阵互换行列组成,每一行(列)仅有一个非零元素 1,满足

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^T = \mathbf{I}_{m \times m} \quad (9)$$

式中, \mathbf{I} 为 m 阶单位矩阵.在矩阵 \mathbf{R} 中,对角元素按照绝对值从大到小排列,可写为如下分块形式

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n & \mathbf{R}_t \\ \mathbf{0}_{(n-\tilde{m}) \times \tilde{m}} & \mathbf{0}_{(n-\tilde{m}) \times (n-\tilde{m})} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中, \tilde{m} 表示独立约束的数目,子矩阵 \mathbf{R}_n 是一个可逆的 $\tilde{m} \times \tilde{m}$ 维上三角矩阵.与公式(10)相应,正交矩阵 \mathbf{Q} 和置换矩阵 \mathbf{P} 亦可划分为如下分块形式

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_n \quad \mathbf{Q}_t] \quad (11)$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_n \quad \mathbf{P}_t] \quad (12)$$

式中, \mathbf{Q}_n 由 \mathbf{Q} 的前 \tilde{m} 个列向量组成.

将公式(10)~(12)代入到公式(8),可将约束雅可比矩阵的转置矩阵改写为

$$\boldsymbol{\Phi}_q^T = \mathbf{Q}_n (\mathbf{R}_n \mathbf{P}_n^T + \mathbf{R}_t \mathbf{P}_t^T) \quad (13)$$

根据约束的几何意义:满足约束方程的广义坐标在 n 维位形空间内组成一张超曲面,在该超曲面的每一个点处,超曲面将位形空间分成两部分,即由约束雅可比矩阵的行向量作为基底的法空间,以及与法空间正交的切空间.而公式(13)表明,约束法空间内任意向量都可视为子矩阵 \mathbf{Q}_n 的线性组合,这意味着 \mathbf{Q}_n 可作为约束法空间的基底,而 \mathbf{Q}_t 可作为约束切空间的基底.这两个子矩阵具有如下性质

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^T + \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^T = \mathbf{I}_{n \times n} \\ \mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_t = \mathbf{0}_{\tilde{m} \times (n-\tilde{m})} \\ \mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_n = \mathbf{I}_{\tilde{m} \times \tilde{m}} \\ \mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}_t = \mathbf{I}_{(n-\tilde{m}) \times (n-\tilde{m})} \end{cases} \quad (14)$$

公式(13)可进一步改写为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{qn} \\ \boldsymbol{\Phi}_{qt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_n^T \boldsymbol{\Phi}_q \\ \mathbf{P}_t^T \boldsymbol{\Phi}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n^T \mathbf{Q}_n^T \\ \mathbf{R}_t^T \mathbf{Q}_n^T \end{bmatrix} \quad (15)$$

上式通过行置换手段,将约束雅可比矩阵变换为前 \tilde{m} 行线性无关的子矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{qn}$ 和后 $m - \tilde{m}$ 行子矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{qt}$,进而可将速度、加速度约束方程改写为

$$\begin{cases} \mathbf{R}_n^T \mathbf{Q}_n^T \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{P}_n^T \boldsymbol{\Phi}_t = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{vn} \\ \mathbf{R}_n^T \mathbf{Q}_n^T \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{P}_n^T (\dot{\boldsymbol{\Phi}}_q \dot{\mathbf{q}} + \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t) = \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{an} \end{cases} \quad (16)$$

以及

$$\begin{cases} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{P}_n^T \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_n^T \dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{R}_n^T)^{-1} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{vn} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}_v \\ \mathbf{Q}_n^T \ddot{\mathbf{q}} = (\mathbf{R}_n^T)^{-1} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{an} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}_a \end{cases} \quad (17)$$

式中, $\boldsymbol{\Phi}_v$ 、 $\boldsymbol{\Phi}_a$ 分别是广义速度和广义加速度在法空间中的分量.

2.2 状态变量分解

结合公式(14)和公式(17),可将广义速度和广义加速度在切空间和法空间分解为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{v}_t + \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_v \\ \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^T \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_n \mathbf{Q}_n^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{a}_t + \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_a \end{cases} \quad (18)$$

式中, $\mathbf{v}_t = \mathbf{Q}_t^T \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{a}_t = \mathbf{Q}_t^T \ddot{\mathbf{q}}$.

广义速度的虚变分将由切空间分量表示为

$$\delta \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \delta \mathbf{v}_t \quad (19)$$

从而可将虚功率方程(1)改写为

$$\delta \mathbf{v}_t^T (\mathbf{M} \mathbf{a}_t - \mathbf{F}) = 0 \quad (20)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{M} \mathbf{Q}_t \\ \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t^T (\mathbf{F} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_a) \end{cases} \quad (21)$$

由于切空间分量 $\delta \mathbf{v}_t$ 是独立的虚变分,因此有

$$\bar{\mathbf{M}} \mathbf{a}_t = \bar{\mathbf{F}} \quad (22)$$

进而可将广义加速度表示为

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}_t \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_a \quad (23)$$

由上述过程可见,列置换 QR 分解方法给出了独立约束的识别方法,且能够同时获取约束法空间和切空间的基底.图 2 给出了不同分解方法的耗时情况,横坐标表示方阵的维度.从中可见,LU 分解与 QR 分解在相同规模下的耗时相当, MPI 方法略高,RREF 方法的耗时相比最大.

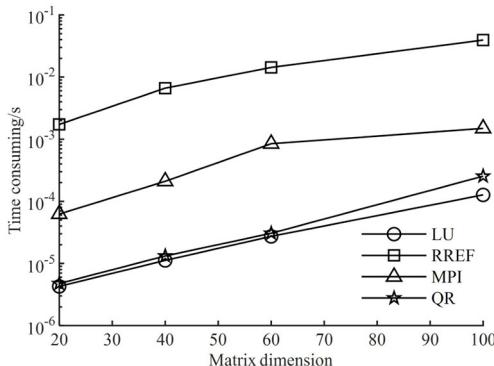


图 2 不同分解方法耗时

Fig. 2 Time-consuming of different decomposition method

2.3 违约修正

2.2 小节所述的 QR 分解方法识别了系统中独立的约束,这种方法可以有效地抑制速度违约,但不能保证位置约束方程也能高精度的满足.为抑制误差的积累,假设广义坐标和广义速度不能精确满足约束方程(17)

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(\mathbf{q}, t) \neq 0 \\ \mathbf{Q}_n^T \dot{\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_v \neq 0 \end{cases} \quad (24)$$

可以通过修正相应的法空间分量 $\mathbf{q}_{\text{new}} = \mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}$,使

修正后的广义坐标满足约束方程.首先,将修正量用法空间基底线性表示

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{Q}_n \xi \quad (25)$$

将其代入线性化约束方程

$$\Phi + \mathbf{R}_n^T \mathbf{Q}_n^T \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (26)$$

从而可将广义坐标修正为

$$\mathbf{q}_{\text{new}} = \mathbf{q} - \mathbf{Q}_n (\mathbf{R}_n^T)^{-1} \bar{\Phi} \quad (27)$$

如果广义坐标修正量较大,广义速度可能随之发生变化,可将广义速度替换为如下格式

$$\dot{\mathbf{q}}_{\text{new}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^T \mathbf{q} + \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_v \quad (28)$$

结合公式(14),使其满足

$$\mathbf{Q}_n^T \dot{\mathbf{q}}_{\text{new}} = (\mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_t) \mathbf{Q}_t^T \mathbf{q} + \mathbf{Q}_n^T \mathbf{Q}_n \dot{\Phi}_v = \dot{\Phi}_v \quad (29)$$

在奇异构型处消除第二类冗余约束后,公式(16)中的加速度约束方程仍被高精度满足,但原始加速度约束方程(4)可能违约,进而造成广义加速度失真.一种直接的方法是令

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\text{new}} = \ddot{\mathbf{q}} - \Phi_q^T (\Phi_q \Phi_q^T)^{-1} \Delta \ddot{\Phi} \quad (30)$$

但利用公式(30)进行加速度违约修正时,经常遇到修正后的加速度约束方程高精度的满足,但仍然失真的情况.任辉等^[20]研究发现,速度变量误差并非沿所有方向都会被放大,误差真正被放大的方向与约束流形的切空间正交.此时,可以依据公式(18),将广义加速度用其切空间的分量修正为

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\text{new}} = \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^T \ddot{\mathbf{q}} \quad (31)$$

上述违约修正方法的流程如图 3 所示.

3 数值算例

3.1 平面四连杆机构

如图 4 所示,平面四连杆机构由三根等长度杆件通过旋转铰相连.各杆长度均为 $L=1$ m,质量均为 1 kg.在杆 2 和杆 3 的连接处切断铰,选取 3 根杆件轴线与水平方向的夹角为广义坐标,从而将其从闭环多体系统变为派生树系统.初始时刻,系统的广义坐标取 $\theta_1=\theta_3=\pi/4$ rad, $\theta_2=0$ rad.系统在重力的作用下做往复运动.其约束雅可比矩阵为

$$\Phi_q = \begin{bmatrix} -L \sin \theta_1 & -L \sin \theta_2 & L \sin \theta_3 \\ L \cos \theta_1 & L \cos \theta_2 & -L \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

系统运动到 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=0$ rad 或 $\theta_1=\theta_3=-\pi$ rad, $\theta_2=0$ rad 时为奇异构型,约束雅可比矩阵

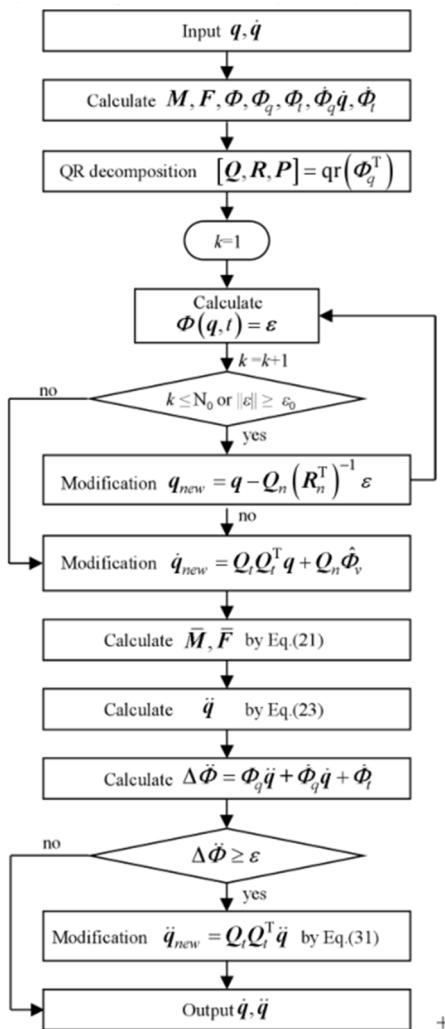
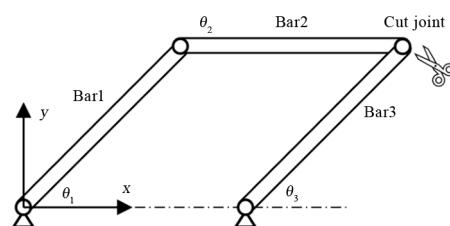


图3 违约修正流程图

Fig.3 Flowchart for elimination of constraint violations

图4 平面四连杆机构
Fig.4 Planar four-bar linkage

的第一行趋近零向量。利用 MATLAB ode45 进行仿真, 误差控制取“ $\text{Abstol}=\text{Reltol}=1e-6$ ”, 违约控制的精度取 $\epsilon=1e-8$, 广义坐标修正迭代次数 $N_0=3$. QR 分解的精度控制对求解过程具有直接影响。若阈值取值较大(如 10^{-4} 数量级), 则约束雅可比矩阵在远离奇异构型时就被识别出奇异, 导致修正量较大, 必须终止积分器进行重新求解, 否则将导致求解失败。将阈值进一步降低到 10^{-5} 数量级后, 上述现象得到缓解, 故后续算例 QR 分解的阈值均取 5×10^{-5} .

依据虚功率等效原则, 切断铰处的拉氏乘子为外接铰作用在内接铰上的约束力。由于杆 2 质心做圆周运动, 因此在奇异构型处仍然受到向心力的作用, 该向心力由杆 1 和杆 2 的铰约束力提供。在图 5 (a) 中, 奇异构型附近的水平约束力非零, 但此时约束雅可比矩阵的第一行已经趋于零。在利用 QR 分解方法识别出独立的约束后, 水平约束力的贡献仍在, 此时, 约束方程(16)仍然满足, 但广义加速度已经失真, 例如 $\ddot{\theta}_2 = \Delta\ddot{\theta}, \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3 = \Delta\ddot{\theta}$ 仍然是高精度满足加速度约束方程的一组解。显然, 这组解在奇异构型处高精度的满足加速度约束方程, 无法通过违约修正来抑制, 进而使广义速度产生失真, 使 $\dot{\theta}_2 = \Delta\dot{\theta}, \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 = \Delta\dot{\theta}$ 。按照公式(31)进行修正后, 切断铰的拉氏乘子与参考解的误差如图 6 所示, 均保持在 10^{-10} 数量级。

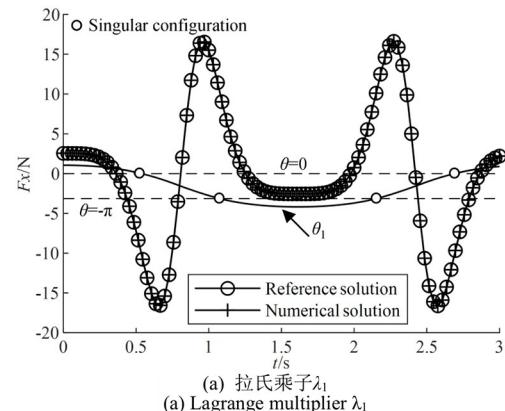
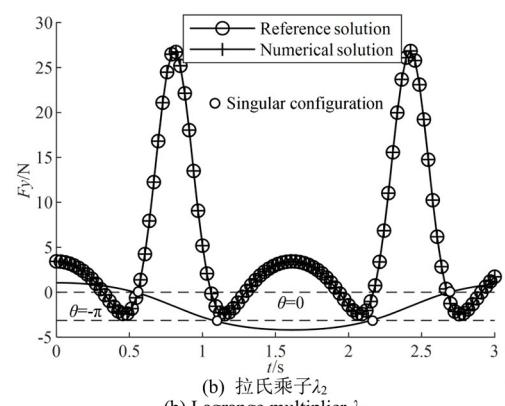
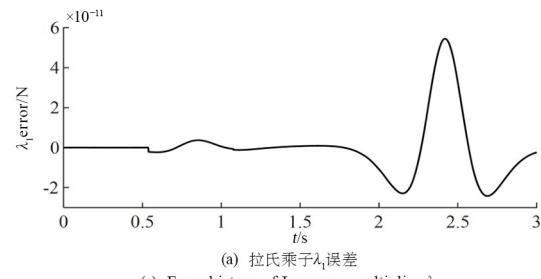
(a) 拉氏乘子 λ_1 (b) 拉氏乘子 λ_2

图5 切断铰处的拉氏乘子

Fig.5 Lagrange multiplier at cut joint

(a) 拉氏乘子 λ_1 误差(a) Error history of Lagrange multiplier λ_1

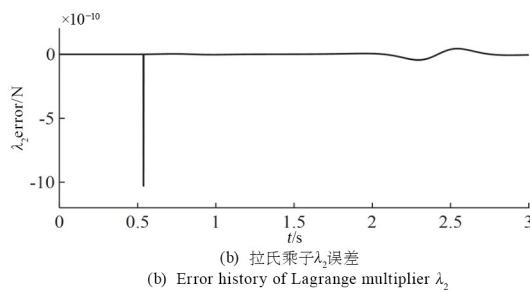


Fig. 6 切断铰拉氏乘子误差分析
Fig. 6 Error analysis for Lagrange multiplier of cut joint

3.2 空间四连杆机构

空间四连杆机构如图7(a)所示,其2、3号铰为万向节,由于其铰坐标在空间中定义,在切断4号铰之后,铰点在平面内运动的约束方程并非自然满足,因此需要给4号铰提供5组完整的位置和姿态约束方程,因此引入了3组冗余约束。系统运行到水平附近,独立的约束方程瞬时变化,也存在奇异构型问题。

按照图7(b)的方式程式化定义铰坐标系,在万向节处,内接铰坐标系的第一根轴与十字节的第一根轴重合,外接铰坐标系的第二根轴与十字节的第二根轴重合。各杆的长度为 $L = 0.5$ m,质量为1 kg。杆1以恒角速度124.8 rad/s运动^[15]。按照上

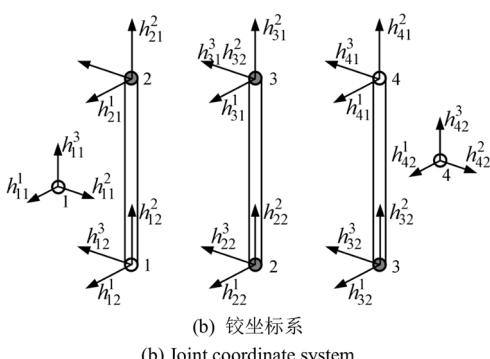
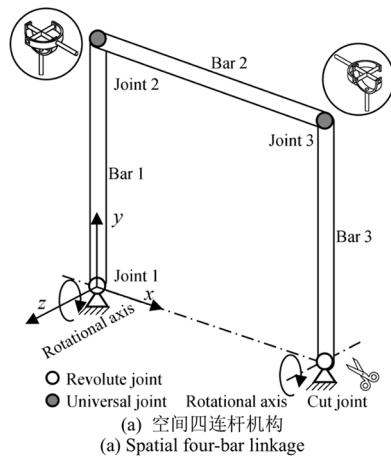


Fig. 7 空间四连杆机构及坐标系
Fig. 7 Spatial four-bar linkage and the coordinate system

述方式定义的铰坐标为 α_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)。其中, α_1 是1号旋转铰的铰坐标, (α_2, α_3) 和 (α_4, α_5) 分别是2号万向节和3号万向节的铰坐标。

由于杆1绕转轴做匀速运动,因此各铰坐标的解析解可表示为

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}\pi - 124.8t, & \alpha_2 = -\frac{1}{2}\pi + 124.8t \\ \alpha_3 = \alpha_5 = 0, & \alpha_4 = -\frac{3}{2}\pi - 124.8t \end{cases} \quad (33)$$

对上式求导,并代入到杆的动力学方程中,可得到切断铰的约束力随时间的变化情况。解析解和数值解的对比如图8所示。NR迭代的收敛容差取 1×10^{-8} ,冗余约束的判别容差为 5×10^{-4} 。

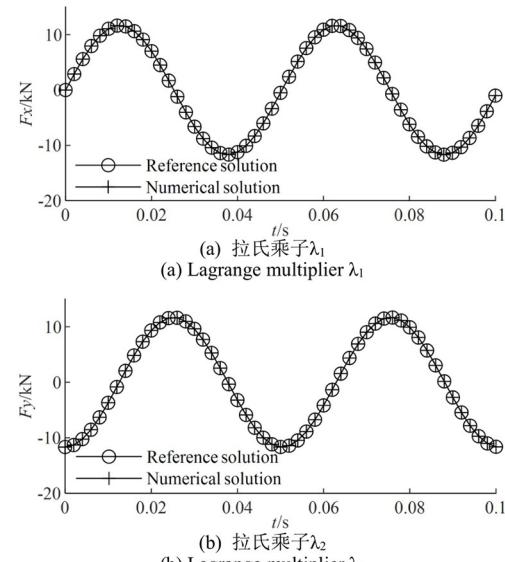


图8 切断铰处的拉氏乘子
Fig. 8 Lagrange multiplier at cut joint

3.3 七刚体机构

七刚体模型是多刚体系统动力学的标准测试程序,结构参数见文献[20],结构简图如图9。定常驱动力矩作用在杆1,C点连接有弹簧。

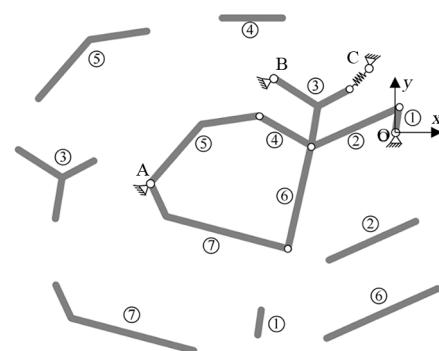


图9 七刚体机构系统
Fig. 9 Schematic of the seven body mechanism

采用 MATLAB ode15s 积分器并打开 BDF-3 开关进行求解, 相对误差取 10^{-4} . 图 10 给出了杆 1 在运动过程中的角速度和角加速度时间历程, 并与 ADAMS 仿真结果进行了对比, 验证其准确性.

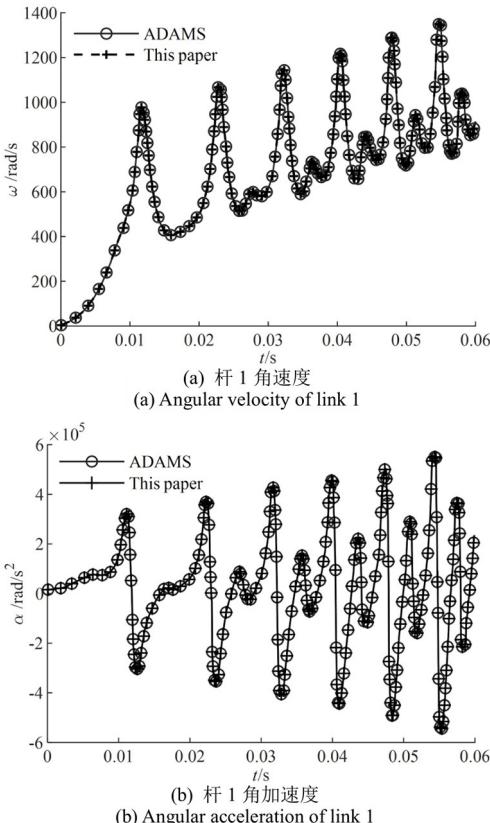


图 10 七刚体机构仿真时程曲线

Fig. 10 Time history for the simulation results of the seven-body mechanism

综合上述算例: 在算例 1 中, 允余约束完全来自奇异构型; 在算例 2 中, 尽管系统实际上做平面运动, 但由于系统中包含有万向节, 因此在程式化建模过程中故意引入冗余约束来保证系统方程组装的完整性, 使其同时存在有第一类和第二类冗余约束. 目前, 商业软件分析冗余约束的主要方法是对约束雅可比矩阵进行全选主元的 LU 分解, 并挑选出独立的约束方程组, 舍弃冗余约束^[20]. 实际仿真发现, 由于舍入误差的存在, 多体系统滑入奇异位形的可能性较小, 一般不需专门处理, 仅需要对违约进行修正即可. 但通过算例 1 和 2 分析可见, 满足约束方程的广义加速度在奇异构型处具有多解性. 在消除冗余约束后, 广义加速度容易漂移到另一组解, 但仍然高精度地满足约束方程, 从而使基于约束流形投影修正(包括位置修正和速度修正)的方法失效, 广义速度的失真不断增长, 但并不违背约束. 本文基于投影滤波法^[20, 21]的思想, 发现

数值解的失真被放大的方向与约束流形的切空间正交, 从而将广义加速度投影到约束流形的切空间进行修正, 收到了较好的效果.

4 结论

多体系统程式化建模需自动引入冗余约束来保证系统组装的完整性. 若系统包含奇异构型, 还将使系统同时包含第一类和第二类冗余约束. 为克服上述问题, 本文采用带列置换的 QR 分解方法识别出独立的约束方程, 并获得了约束流形的法空间基底和切空间基底, 进而在组装运动学方程之前就对广义坐标和广义速度进行修正, 使其高精度满足约束方程, 不必在检测到违约之后再中断积分器进行修正. 系统在奇异构型附近产生的数值病态将造成广义加速度失真, 但约束方程被高精度满足. 由于广义加速度的偏差放大方向与约束流形的切空间正交, 因此采用广义加速度在约束流形的切空间投影进行校正, 使数值解得到了大幅改善.

参考文献

- [1] 齐朝晖, 许永生, 方慧青. 多体系统中的冗余约束[J]. 力学学报, 2011, 43(2): 390—399.
- [2] QI Z H, XU Y S, FANG H Q. Study on redundant constraints in multibody systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(2): 390—399. (in Chinese)
- [3] 李亚男, 李博文, 丁洁玉, 等. 多体系统动力学 Lie 群微分一代数方程约束稳定方法[J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(2): 97—101.
- [4] LI Y N, LI B W, DING J Y, et al. Constraints stabilization method for daes on Lie group of multibody system dynamics [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(2): 97—101. (in Chinese)
- [5] FULTON J, SCHAUER H. Forward dynamics analysis of origami-folded deployable spacecraft structures [J]. Acta Astronautica, 2021, 186: 549—561.
- [6] ZHANG J T, SONG Y M, LIANG D. Mathematical modeling and dynamic characteristic analysis of a novel parallel tracking mechanism for inter-satellite link antenna [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 93: 618—643.
- [7] KITAMURA K, YAMADA K, SHIMA T. Quasi-time-optimal steering law for low-thrust orbit trans-

- fer considering angular momentum and torque constraints [J]. *Acta Astronautica*, 2021, 182: 332–349.
- [6] GUO X, ZHANG D G, LI L, et al. Application of the two-loop procedure in multibody dynamics with contact and constraint [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, 427: 15–27.
- [7] AGÜÑDEZ A G, GARCÍA-VALLEJO D, FREIRE E, et al. The dependent coordinates in the linearization of constrained multibody systems: Handling and elimination [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 268: 109036.
- [8] WEHAGE K T, WEHAGE R A, RAVANI B. Generalized coordinate partitioning for complex mechanisms based on kinematic substructuring [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2015, 92: 464–483.
- [9] LAULUSA A, BAUCHAU O A. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2008, 3(1): 011004.
- [10] BAUCHAU O A. A self-stabilized algorithm for enforcing constraints in multibody systems [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40(13/14): 3253–3271.
- [11] YU Q, CHEN I M. A direct violation correction method in numerical simulation of constrained multibody systems [J]. *Computational Mechanics*, 2000, 26(1): 52–57.
- [12] ZHANG J, LIU D H, LIU Y H. A constraint violation suppressing formulation for spatial multibody dynamics with singular mass matrix [J]. *Multibody System Dynamics*, 2016, 36(1): 87–110.
- [13] EICH E. Convergence results for a coordinate projection method applied to mechanical systems with algebraic constraints [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1993, 30(5): 1467–1482.
- [14] 马秀腾, 翟彦博, 谢守勇. 多体系统指标 2 运动方程 HHT 方法违约校正 [J]. *力学学报*, 2017, 49(1): 175–181.
- MA X T, ZHAI Y B, XIE S Y. Hht method with constraints violation correction in the index 2 equations of motion for multibody systems [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, 49(1): 175–181. (in Chinese)
- [15] NETO M A, AMBRÓSIO J. Stabilization methods for the integration of DAE in the presence of redundant constraints [J]. *Multibody System Dynamics*, 2003, 10(1): 81–105.
- [16] LIU W L, XU Y D, YAO J T, et al. The weighted Moore-Penrose generalized inverse and the force analysis of overconstrained parallel mechanisms [J]. *Multibody System Dynamics*, 2017, 39(4): 363–383.
- [17] RUGGIU M, GONZÁLEZ F. A benchmark problem with singularities for multibody system dynamics formulations with constraints [J]. *Multibody System Dynamics*, 2023, 58(2): 181–196.
- [18] MASARATI P, QURO M J U, ZANONI A. Projection continuation for minimal coordinate set formulation and singularity detection of redundantly constrained system dynamics [J]. *Multibody System Dynamics*, 2024, 61(4): 453–480.
- [19] KIM S S, VANDERPLOEG M J. QR decomposition for state space representation of constrained mechanical dynamic systems [J]. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1986, 108(2): 183–188.
- [20] 任辉, 周平. 多体系统动力学的常用积分器算法 [J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(1): 1–28.
- REN H, ZHOU P. Implementation details of DAE integrators for multibody system dynamics [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(1): 1–28. (in Chinese)
- [21] PETZOLD L, LÖTSTEDT P. Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II: Practical implications [J]. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 1986, 7(3): 720–733.