

基于积分不等式的时滞扭转振动系统稳定性分析^{*}

陈锦华 刘一凡 刘锦鹏 李旭^{1†}

(大连理工大学 机械工程学院, 大连 116086)

摘要 为了在分析时滞扭转振动系统稳定性时得到保守性更好的结果, 利用积分不等式的方法研究时滞系统, 并且将该方法推导得出的定理应用于分析中立型时滞动力吸振器抑制线性强迫扭转振动系统的稳定性. 结果表明, 使用该定理, 可以得到不同参数下的保守性较好的时滞上界, 数值模拟也证实了解析结果的正确性并且为采用中立型时滞动力吸振器抑制线性强迫扭转振动系统的设计提供参数选取的依据.

关键词 积分不等式, 中立型, 动力吸振器, 稳定性, 减振

中图分类号: TH113.1

文献标志码: A

Stability Analysis of Time-Delay Torsional Vibration Systems Based on Integral Inequalities^{*}

Chen Jinhua Liu Yifan Liu Jinpeng Li Xu[†]

(School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116086, China)

Abstract In order to obtain more conservative results in the analysis of the stability of the time-delayed torsional vibration system, the integral inequality method is used to study the stability of the system, and the derived theorem is used to analyze the stability of the system inhibited by the neutral time-delayed dynamic vibration absorber. The results show that the conservative upper bound of time delay under different parameters can be obtained by using this theorem. The numerical simulation also confirms the correctness of the analytical results and provides guidance for the designs of the systems using neutral time-delay dynamic vibration absorber to suppress linear forced torsional vibration.

Key words integral inequality, neutral type, dynamic absorber, stability, vibration reduction

引言

工程领域的旋转设备应用广泛, 作为其核心部分的转子系统在周期性激励力矩作用下会产生扭转振动, 其危害不容忽视, 它们对机械设备、生产过程和人员安全都可能造成严重影响^[1,2]. 首先, 转子扭转振动可能导致机械设备的结构损坏和故障; 其

次, 转子扭转振动还会对生产过程产生不利影响, 可能导致设备的运行不稳定, 降低生产效率, 增加生产成本; 此外, 转子扭转振动还可能对人员安全造成威胁. 因此, 出于抑制其扭转振动的目的, 动力吸振器被广泛研究^[3-8]. 目前许多动力吸振器往往不考虑时滞的作用, 但实际上, 时滞是许多物理过程(比如对机械系统采用主动控制后, 传感器信号

2024-08-19 收到第 1 稿, 2024-09-16 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(62476043), National Natural Science Foundation of China (62476043).

[†] 通信作者 E-mail: imlixu@dlut.edu.cn

的采集和传输过程,以及作动器的作动过程等)中不可避免的现象,它可能导致系统不稳定或性能下降,而中立型时滞反馈控制系统通过引入时滞反馈环节,能够补偿时滞对系统性能造成的负面影响,提高系统的稳定性和鲁棒性,因此引入时滞减振技术是有必要的。

出于调节动力吸振器的反馈增益系数和时滞量来达到减小主系统振动的目的,美国学者 Olgac^[9]于 1996 年首次提出带有时滞状态反馈的动力吸振器。Olgac 等经过大量研究取得了时滞减振技术的理论依据和实验结果。贾安兵^[10]研究了时滞动力吸振在电动汽车减振上的应用,研究结果表明振动能量作为目标函数因为更加直接,与时域响应联系更加密切所以获得的减振效果最佳。刘铭^[11]发现通过引入中立型反馈可以扩大时滞量的可调节范围,提高动力吸振器的实用性。代晗等^[12]提出一种含接地负刚度弹簧的时滞动力吸振器的优化方法,证明了接地负刚度时滞动力吸振器减振效果相对于其他等峰优化的吸振器模型的优越性。杨柳青等^[13]通过对含惯容的接地刚度时滞反馈动力吸振器系统进行多目标优化设计,实现了对主系统的有效控制。

尽管理论研究表明时滞动力吸振器对主系统的振动具有很好的减振效果,但是找到合适的时滞量和反馈增益却并不容易,原因在于时滞量的可调节范围比较小,工程中实践起来比较困难。本文基于积分不等式分析中立型时滞反馈扭转控制系统,改善以往分析方法的保守性,扩大时滞量的可调节范围,提高动力吸振器的实用性,从而为设计该系统的控制器中时滞大小提供取值的依据。

1 针对中立型时滞反馈扭转控制系统建立的物理模型

在文献[14-15]的模型基础上可以得到如图 1 所示的引入了中立型时滞动力吸振器的抑制线性扭转振动系统的物理模型(1)。图 1 所示系统的运动微分方程为:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + c_1 \dot{\theta}_1 + c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_1 \theta_1 + k_2 (\theta_1 - \theta_2) - p\theta_2[t-d(t)] - q\dot{\theta}_2(t-\tau) = F(t) \quad (1)$$

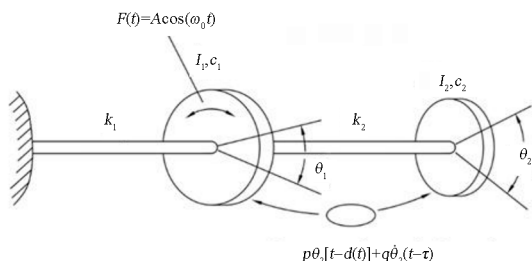


图 1 中立型时滞动力吸振器抑制扭转振动系统模型

Fig. 1 A model of vibrating suppression for torsional vibrating system with delayed vibration absorber of neutral

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_2 (\theta_1 - \theta_2) + p\theta_2[t-d(t)] + q\dot{\theta}_2(t-\tau) = 0 \quad (2)$$

其中, k_1 和 k_2 分别为主系统和吸振器的线性弹簧的刚度系数, I_1 和 I_2 分别为主系统和吸振器的质量惯性矩, θ_1 和 θ_2 分别为主系统和吸振器的扭转角位移, $F(t)$ 为外激励项, p 和 q 为反馈增益系数且都大于 0, c_1 和 c_2 分别为主系统和吸振器的线性阻尼系数, τ 为时滞, $p\theta_2[t-d(t)] + q\dot{\theta}_2(t-\tau)$ 为中立型时滞反馈控制项。

将该物理模型的微分方程进行变形:

$$F(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

令

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

由于线性系统的稳定性与输入无关,不妨令 $F(t) = 0$

由(1)得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2 = \ddot{\theta}_1 = & -\frac{c_1}{I_1} \mathbf{x}_2 - \frac{c_2}{I_1} \mathbf{x}_2 + \frac{c_2}{I_1} \mathbf{x}_4 - \frac{k_1}{I_1} \mathbf{x}_1 - \\ & \frac{k_2}{I_1} \mathbf{x}_1 + \frac{k_2}{I_1} \mathbf{x}_3 + \frac{p}{I_1} \mathbf{x}_3[t-d(t)] + \\ & \frac{q}{I_1} \dot{\mathbf{x}}_3(t-\tau) \end{aligned} \quad (4)$$

由(2)得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_4 = \ddot{\theta}_2 = & -\frac{c_2}{I_2} \mathbf{x}_4 - \frac{c_2}{I_2} \mathbf{x}_2 + \frac{k_2}{I_2} \mathbf{x}_4 - \frac{k_2}{I_2} \mathbf{x}_3 - \\ & \frac{p}{I_2} \mathbf{x}_3[t-d(t)] + \frac{q}{I_2} \dot{\mathbf{x}}_3(t-\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

又因为

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad \dot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_4$$

所以有

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \\ a \\ \mathbf{x}_4 \\ b \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{A}_d \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1[t-d(t)] \\ \mathbf{x}_2[t-d(t)] \\ \mathbf{x}_3[t-d(t)] \\ \mathbf{x}_4[t-d(t)] \end{bmatrix} + \mathbf{C} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t-\tau) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t-\tau) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t-\tau) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t-\tau) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}[t-d(t)] + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t-\tau)\end{aligned}\quad (6)$$

其中:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{I_1} & -\frac{c_1+c_2}{I_1} & \frac{k_2}{I_1} & \frac{c_2}{I_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{I_2} & \frac{c_2}{I_2} & -\frac{k_2}{I_2} & -\frac{c_2}{I_2} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p_2}{I_2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{q}{I_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{q}{I_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = -\frac{c_1}{I_1}\mathbf{x}_2 - \frac{c_2}{I_1}\mathbf{x}_2 + \frac{c_2}{I_1}\mathbf{x}_4 - \frac{k_1}{I_1}\mathbf{x}_1 - \frac{k_2}{I_1}\mathbf{x}_1 + \frac{k_2}{I_1}\mathbf{x}_3 + \frac{p}{I_1}\mathbf{x}_3[t-d(t)] + \frac{q}{I_1}\dot{\mathbf{x}}_3(t-\tau)$$

$$b = -\frac{c_2}{I_2}\mathbf{x}_4 + \frac{c_2}{I_2}\mathbf{x}_2 + \frac{k_2}{I_2}\mathbf{x}_4 - \frac{k_2}{I_2}\mathbf{x}_3 - \frac{p}{I_2}\mathbf{x}_3[t-d(t)] + \frac{q}{I_2}\dot{\mathbf{x}}_3(t-\tau)$$

2 针对物理模型建立的数学模型

考虑如下中立型系统^[16]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t-\tau) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \\ \mathbf{A}_d\mathbf{x}[t-d(t)], \quad t > 0 \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t), \quad t \in [-r, 0] \end{cases} \quad (7)$$

其中状态向量 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$. 矩阵 $\mathbf{C}$ 的所有特征值都位于单位圆内, $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{A}$ 以及 $\mathbf{A}_d$ 是合适维数的常数矩阵, 时滞 $d(t)$ 满足如下条件:

$$0 \leq d(t) \leq h \quad (8)$$

且

$$\dot{d}(t) \leq \mu \leq 1 \quad (9)$$

其中 h 和 μ 是常数, 初始条件中 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 表示 $[-r, 0]$ 上的连续初始向量函数, 并且令 $r = \max\{h, \tau\}$.

设 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 并且具有一阶连续导数, 则对任意正定矩阵 $\mathbf{R} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $h \geq 0$, 以及 $\mathbf{Y} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2] \in \mathbf{R}^{n \times 2n}$, (其中 $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$) 有以下积分不等式成立^[17]:

$$\begin{aligned} & -\int_{t-h}^t \dot{\mathbf{x}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{x}}(s) ds \\ & \leq \boldsymbol{\xi}^T(t) \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^T + \mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_1^T + \mathbf{M}_2 \\ * & -\mathbf{M}_2^T - \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \\ & h \boldsymbol{\xi}^T(t) \mathbf{Y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y} \boldsymbol{\xi}(t) \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\boldsymbol{\xi}(t) := \text{col}\{\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-h)\}$$

由此可得到:

定理 1 给定标量 $h > 0$ 和 $\mu < 1$, 如果存在 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0, \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \geq 0, \mathbf{R} = \mathbf{R}^T > 0, \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T > 0$, 和合适维数的矩阵 $\mathbf{M}_i (i = 1, 2)$, 使得如下的 LMI 成立:

$$\boldsymbol{\Xi}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{13} & \mathbf{Z}_{14} & h_1 \mathbf{M}_1^T \\ * & \mathbf{X}_{22} & \mathbf{X}_{23} & 0 & 0 \\ * & * & \mathbf{X}_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & \mathbf{Z}_{44} & h_2 \mathbf{M}_2^T \\ * & * & * & * & -h \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}_{11} = \mathbf{X}_{11} + \mathbf{M}_1^T + \mathbf{M}_1 + h \mathbf{M}_1^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{Z}_{14} = -\mathbf{M}_1^T + \mathbf{M}_2$$

$$\mathbf{Z}_{44} = -\mathbf{M}_2^T - \mathbf{M}_2$$

则满足(8)和(9)的中立型时滞系统(7)是渐近稳定的.

证明:

对于标称系统(7), 构造如下的李亚普诺夫泛函:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{X}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{X}(t) + \int_{t-d(t)}^t \mathbf{X}^T(s) \mathbf{Q} \mathbf{X}(s) ds + \\ & \int_{t-\tau}^t \dot{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{R} \dot{\mathbf{X}}(s) ds + \int_{-h}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{X}}(s) ds d\theta \end{aligned}$$

求导并代入系统方程得

$$\dot{\mathbf{V}}(t) \leq \boldsymbol{\eta}_1^T \boldsymbol{\Xi}_1 \boldsymbol{\eta}_1 - \int_{t-h}^t \dot{\mathbf{X}}^T(s) \mathbf{Z} \dot{\mathbf{X}}(s) ds$$

其中: $\boldsymbol{\eta}_1 = \text{col}\{\mathbf{X}(t) \mathbf{X}[t-d(t)] \dot{\mathbf{X}}(t-\tau)\}$

$$\boldsymbol{\Xi}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} & \mathbf{X}_{13} \\ * & \mathbf{X}_{22} & \mathbf{X}_{23} \\ * & * & \mathbf{X}_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_{11} &= Q + PA + A^T P + hA^T ZA + A^T RA \\ X_{12} &= hA^T ZAd + PAd + A^T RAd \\ X_{13} &= PC + hA^T ZC + A^T RC \\ X_{22} &= (\mu - 1)Q + hAd^T ZAd + Ad^T RAd \\ X_{23} &= hAd^T ZC + Ad^T RC \\ X_{33} &= -R + hC^T ZC + C^T RC - \\ &\int_{t-h}^t X^T(\dot{s})Z\dot{X}(s)ds \leq -\int_{t-d(t)}^t X^T(\dot{s})Z\dot{X}(s)ds \end{aligned}$$

对该不等式右侧的结果使用积分不等式,得

$$\dot{V}(t) \leq \boldsymbol{\eta}_2^T \boldsymbol{\Xi}_2 \boldsymbol{\eta}_2$$

其中:

$$\boldsymbol{\eta}_2 = \text{col}\{X(t)X[t-d(t)]X(t-\tau)X(t-h)\}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_2 = \begin{bmatrix} Y_{11} & X_{12} & X_{13} & Y_{14} \\ * & X_{22} & X_{23} & 0 \\ * & * & X_{33} & 0 \\ * & * & * & Y_{44} \end{bmatrix}$$

$$Y_{11} = X_{11} + M_1^T + M_1 + hM_1^T Z^{-1} M_1$$

$$Y_{14} = -M_1^T + M_2 + hM_1^T Z^{-1} M_2$$

$$Y_{44} = -M_2^T - M_2 + hM_2^T Z^{-1} M_2$$

由 Schur 补^[18]可知 $\boldsymbol{\Xi}_2 < 0$ 等价于 $\boldsymbol{\Xi}_3 < 0$. 若

$\boldsymbol{\Xi}_3 < 0$, 则对于充分小的 ϵ , 有 $\dot{V}(x_t) < -\epsilon \cdot \|x(t)\|^2$, 这样就可以保证了系统(7)的渐近稳定性^[19].

3 关于数学模型的数值例子

在本节中,为了说明本文方法相比已有结果的优越性,给出三个数值实例.

例子 1:分析中立型时滞系统(7)的稳定性,其中:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

在表 1 列出的是针对不同的 μ ,使中立型系统(7)稳定的时滞上界 h .

表 1 例子 1 下系统(7)的时滞上界

Table 1 Upper bound of time delay for system (7) in example 1

使用的计算方法	μ		
	0.3	0.5	0.7
毛维杰等 ^[20]	0.964	0.954	0.954
封昭准定理 3.1 ^[21]	1.102	1.003	1.003
定理 1	1.423	1.316	1.196

例子 2:分析中立型系统(7)的稳定性,其中:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.9 \end{bmatrix}, \\ A_d &= \begin{bmatrix} -1.1 & -0.2 \\ -0.1 & -1.1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

时滞上界 h 在表 2 列出.

表 2 例子 2 下系统(7)的时滞上界

Table 2 Upper bound of time delay for system (7) in example 2

使用的计算方法	μ				
	0	0.1	0.3	0.5	0.7
邱金学定理 3.1 ^[22]	1.4290	1.3036	1.0593	0.8270	0.5927
定理 1	1.4350	1.3721	1.2505	1.1315	1.0119

分析中立型系统(7)的稳定性,其中:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_d &= \begin{bmatrix} -0.9 & 0 \\ -1 & -0.7 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

时滞上界 h 在表 3 中列出.

表 3 例子 3 下系统(7)的时滞上界

Table 3 Upper bound of time delay for system (7) in example 3

使用的计算方法	μ					
	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
沈长春定理 2.2 ^[23]	1.19	0.95	0.75	0.58	0.41	0.25
定理 1	1.38	1.32	1.26	1.20	1.13	1.07

4 数值模拟

本节利用上述数学模型对中立型时滞反馈扭转控制系统进行稳定性分析,并利用计算软件验证该分析方法的有效性.

对线性扭转振动系统(6)应用定理 1,为考虑具有实际意义的工程实例,取与文献[14]中相同的系统参数以及初始条件,即:

$$\begin{aligned} F(t) &= 0.10 \cos(15.70t) \text{ N} \cdot \text{m}, \\ c_1 &= c_2 = 0.20 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s/rad}, \\ I_1 &= I_2 = 0.04 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, \\ k_1 &= 1.00 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, k_2 = 3.00 \text{ N} \cdot \text{m/rad}, \\ \dot{\theta}_1(0) &= \dot{\theta}_2(0) = 0 \text{ rad/s}, \end{aligned}$$

$\theta_1(0)=\theta_2(0)=0\text{ rad}.$

令 $\mu=0.5$,利用计算软件计算,得到的部分数据如表4所示.

表4 $\mu=0.5$ 时的 p,q,h 关系表
Table 4 p,q,h relation for $\mu=0.5$

$q/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad})$	$p/(\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad})$			
	3.5	9.0	9.5	10.0
0.0351	0.3664	0.1273	0.1225	0.1181
0.1000	0.2694	0.1135	0.1091	0.1052
0.1500	0.2200	0.1022	0.0982	0.0946
0.2000	0.1874	0.0903	0.0897	0.0834
0.3000	0.1346	0.0635	0.0608	0.0584
0.4527	0.0321	0.0289	0.0272	0.0257

注:当 p 和 q 取值都充分小时, h 趋向正无穷,系统稳定,所以这里主要展示由于 p 和 q 的取值导致 h 较小的部分.

利用计算软件插值作图,由图2、图3和表4可知:

- (1)当 p 和 q 都充分大时,系统不稳定, h 无解;
- (2)当 p 和 q 都充分小时 h 趋于正无穷;
- (3)当 p 和 q 取值合适时, h 有有限正值解.

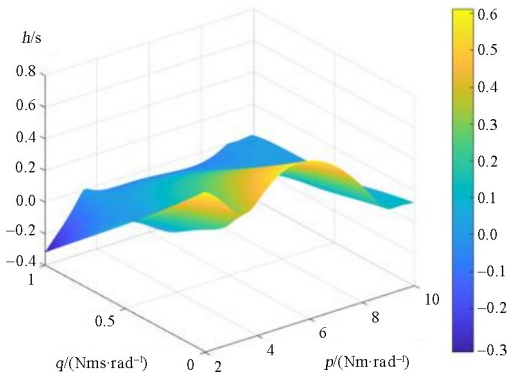


图2 中立型时滞反馈扭转控制系统 p,q,h 关系
Fig. 2 The relationship between p,q and h in neutral time-delay feedback torsional control systems

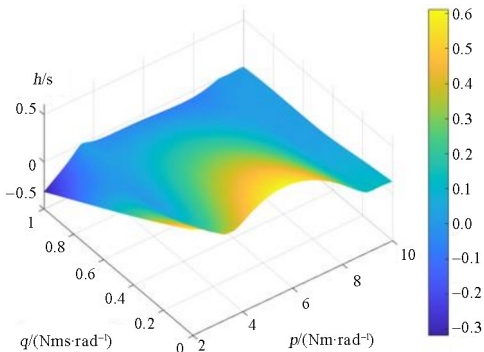
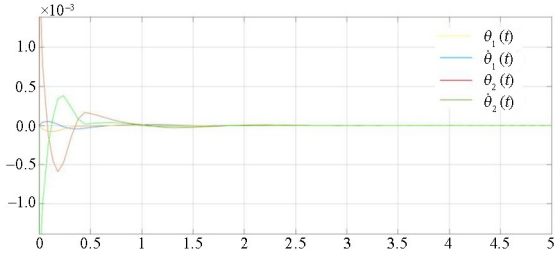


图3 中立型时滞反馈扭转控制系统 p,q,h 关系(俯视)
Fig. 3 The relationship between p,q and h in neutral time-delay feedback torsional control systems(planform)

注: h 应为正数,而图像中取负数的 h 表示该条件下系统无法稳定

图4 系统(10)在计算软件中的模拟结果

Fig. 4 Simulation results of system (10)



现在取 $p=3.5\text{ N}\cdot\text{m}/\text{rad},q=0.4257\text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$,由上述计算得到 $h=0.0321\text{ s},0\leq d(t)\leq h$,且 $\dot{d}(t)\leq\mu$,不妨令 $d(t)=h\sin(\mu t/h)+h\in[0,h]$,则 $\dot{d}(t)=\mu\cos(\mu t/h)\leq\mu$.

令 $\mu=0.5$,则 $d(t)=0.0321\sin(15.58t)+0.0321$ 代入计算软件验证上述分析方法的有效性.

由计算软件模拟的图像可知,该系统各状态量最终归于稳定,可见上述分析方法有效.

5 结论

利用积分不等式(10)可以对时变离散时滞的中立型系统(7)得到保守性较好的结果,在保证系统稳定的情况下,可以在结合计算软件的情况下有效得到更大的时滞上界 h .

通过定理1分析采用中立型时滞动力吸振器抑制线性强迫扭转振动系统的集中质量模型(1),可以近似得到不同参数(如 p 和 q)下的时滞上界 h ,为采用中立型时滞动力吸振器抑制线性强迫扭转振动系统的设计表提供参数选取的指导,比如选取参数时 p 和 q 不可以过大,否则系统无法稳定,以及即使选择了合适的参数,系统的时滞也不可超过上界值 h .

参考文献

[1] 王欣宇. 钢帘线扭转控制系统探讨[J]. 内燃机与配件, 2021(7): 82–83.
WANG X Y. Steel cord torsion control system analysis [J]. Internal Combustion Engine & Parts, 2021(7): 82–83. (in Chinese)

[2] 姜寅令, 张周, 张强, 等. 柔性钻柱扭转振动及控制研究[J]. 石油矿场机械, 2024, 53(4): 18–27.
JIANG Y L, ZHANG Z, ZHANG Q, et al. Research on coupled vibration and control of flexible drill strings [J]. Oil Field Equipment, 2024, 53

- (4): 18—27. (in Chinese)
- [3] 陈浩, 马小艳, 王之瑞. 动力吸振器在直升机减振上的应用及效果验证[J]. 直升机技术, 2024(2): 1—4.
- CHEN H, MA X Y, WANG Z R. Application and effect verification of dynamic vibration absorber in helicopter vibration reduction [J]. Helicopter Technique, 2024(2): 1—4. (in Chinese)
- [4] 陈潇雨, 范胜波, 朱贝宁, 等. 三磁铁磁性动力吸振器的宽频减振研究 [J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2024, 42(6): 52—57, 124.
- CHEN X Y, FAN S B, ZHU B N, et al. Research on broad band vibration reduction of a triple-magnet magnetic dynamic vibration absorber [J]. Journal of Jiamusi University (Natural Science Edition), 2024, 42(6): 52—57, 124. (in Chinese)
- [5] 卢学礼, 邢海军, 阮子悦. 含分段阻尼特性动力吸振器的吸振性能[J]. 振动工程学报, 2024, 37(6): 945—953.
- LU X L, XING H J, RUAN Z Y. Vibration absorption characteristics of dynamic vibration absorber with piecewise damping characteristics [J]. Journal of Vibration Engineering, 2024, 37(6): 945—953. (in Chinese)
- [6] 刘欢, 尹宜勇, 王通, 等. 基于动力吸振器的微耕机扶手架减振设计[J]. 农机化研究, 2024, 46(3): 92—97.
- LIU H, YIN Y Y, WANG T, et al. Vibration reduction design micro-tiller handrail based on dynamic vibration absorber [J]. Journal of Agricultural Mechanization Research, 2024, 46(3): 92—97. (in Chinese)
- [7] 周强, 郑雨豪, 何超, 等. 可调频动力吸振器在立式泵减振中的应用[J]. 设备管理与维修, 2024(15): 38—41.
- ZHOU Q, ZHENG Y H, HE C, et al. Application of tunable vibration absorber in vibration damping of vertical pumps [J]. Plant Maintenance Engineering, 2024(15): 38—41. (in Chinese)
- [8] 许孝堂, 蒲黔辉, 尹学军, 等. 宽频式钢轨动力吸振器对波磨的影响分析[J]. 地震工程与工程振动, 2024, 44(2): 147—159.
- XU X T, PU Q H, YIN X J, et al. Study on the influence of wide-frequency tuned mass damper on rail corrugation [J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2024, 44(2): 147—159. (in Chinese)
- [9] OLGAC N, HOLM-HANSEN B T. A novel active vibration absorption technique: delayed resonator [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 176(1): 93—104.
- [10] 贾安兵. 电动汽车减振方法研究[D]. 淄博: 山东理工大学, 2015.
- JIA A B. Research on vibration reduction methods for electric vehicles [D]. Zibo: Shandong University of Technology, 2015. (in Chinese)
- [11] 刘铭, 徐晓峰, 张春蕊. 中立型时滞反馈扭转控制系统的稳定性分析[J]. 动力学与控制学报, 2015, 13(6): 449—453.
- LIU M, XU X F, ZHANG C R. Stability analysis of delayed torsional vibration system of neutral type [J]. Journal of Dynamics and Control, 2015, 13(6): 449—453. (in Chinese)
- [12] 代晗, 赵艳影. 负刚度时滞反馈控制动力吸振器的反共振优化[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 4—13, 35.
- DAI H, ZHAO Y Y. Anti-resonance optimization of dynamic vibration absorbers with negative stiffness and delay feedback control [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 4—13, 35. (in Chinese)
- [13] 杨柳青, 赵艳影. 一种含惯容的接地刚度时滞反馈动力吸振器的多目标优化设计[J]. 振动与冲击, 2023, 42(23): 133—143.
- YANG L Q, ZHAO Y Y. Multi-objective optimization design of a grounded stiffness time delay feedback dynamic vibration absorber with inerter [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(23): 133—143. (in Chinese)
- [14] 赵艳影, 李昌爱. 时滞动力吸振器抑制扭转系统的振动[J]. 动力学与控制学报, 2013, 11(1): 36—41.
- ZHAO Y Y, Li C A. Vibration suppression of torsional vibration system by using the delayed vibration absorber [J]. Journal of Dynamics and Control, 2013, 11(1): 36—41. (in Chinese)
- [15] EL-BASSIOUNY A F. Vibration and chaos control of non-linear torsional vibrating systems [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2006, 366: 167—186.
- [16] 何勇. 基于自由权矩阵的时滞相关鲁棒稳定与镇定[D]. 长沙: 中南大学, 2004.
- HE Y. Delay-dependent robust stability and stabilization based on free-weighting matrices [D].

- Changsha: Central South University, 2004. (in Chinese)
- [17] 张先明. 基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究 [D]. 长沙: 中南大学, 2006.
ZHANG X M. Study on delay-dependent robust control based on an integral inequality method [D]. Changsha: Central South University, 2006. (in Chinese)
- [18] 孙文娜. 两类非线性系统的故障估计问题[D]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2023.
SUN W N. Fault estimation problem of two kinds of nonlinear systems [D]. Qufu: Qufu Normal University, 2023. (in Chinese)
- [19] 孔志宏. 李雅普诺夫第二方法的合理性暨证明[J]. 理论数学, 2022(7): 1132—1135.
KONG Z H. The rationality and proof of Lyapunov's second method [J]. Pure Mathematics, 2022(7): 1132—1135. (in Chinese)
- [20] 毛维杰, 张媛媛. 具有区间时变时滞的中立型系统稳定性分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2012, 46(5): 848—852.
MAO W J, ZHANG Y Y. Stability analysis for neutral systems with interval time-varying delays [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2012, 46(5): 848—852. (in Chinese)
- [21] 封昭准. 基于三次函数不等式的时滞系统稳定性分析[D]. 株洲: 湖南工业大学, 2023.
FENG Z Z. Stability analysis of time delay systems based on cubic function inequality [D]. Zhuzhou: Hunan University of Technology, 2023. (in Chinese)
- [22] 邱金学. 时变时滞中立型系统的稳定性分析与控制器设计[D]. 杭州: 杭州电子科技大学, 2013.
QIU J X. The stability analysis and controllers design of neutral systems with time-varying delay [D]. Hangzhou: Hangzhou Dianzi University, 2013. (in Chinese)
- [23] 沈长春. 时滞中立型系统的动力学问题研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2012.
SHEN C C. Dynamic problems researches of neutral systems with delays [D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2012. (in Chinese)