

含参数不确定的裂纹直齿轮系统振动响应分析^{*}

方萍 杨洋[†] 曾劲 张天恒

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

摘要 针对参数不确定性对齿轮系统的影响,运用一种基于 Chebyshev 多项式的不确定性区间分析方法对含参数不确定性的齿轮系统动力学特性进行分析.本文考虑完整齿廓曲线,采用势能法计算健康齿轮和裂纹齿轮的时变啮合刚度.在此基础上,建立 6 自由度集总参数齿轮系统模型.考虑齿轮质量、轴承支撑刚度以及弹性模量等参数的不确定性,通过数值仿真的方式,分析不同参数不确定性对健康齿轮系统振动响应的影响规律.进一步将裂纹的影响纳入考量,深入研究了含齿根裂纹故障的不确定性齿轮系统的区间响应特性.结果表明:齿轮啮合刚度随裂纹深度的增加而减小,在不确定性参数的影响下,系统会出现“频移”“共振带”等现象,削弱了系统的稳定性.

关键词 时变啮合刚度, 裂纹故障, 参数不确定性, 振动响应

中图分类号:O322

文献标志码:A

Analysis of the Vibration Response of a Cracked Spur Gear System with Parameter Uncertainty^{*}

Fang Ping Yang Yang[†] Zeng Jin Zhang Tianheng

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Aiming at the influence of parameter uncertainty on gear system, an uncertainty interval analysis method based on Chebyshev polynomials is employed to analyze the dynamic characteristics of gear system with parameter uncertainty. In this paper, the complete tooth profile curve is considered, and the potential energy method is employed to calculate the time-varying mesh stiffness of both healthy and cracked tooth. On this basis, a six degree of freedom lumped-parameter gear system model is established. The uncertainties of parameters such as gear mass, bearing support stiffness, and Young's modulus are considered. The influence of these uncertainties on the vibration response of healthy gear system is analyzed through numerical simulation. Furthermore, the interval response of an uncertain gear system with root crack faults is investigated, taking into account the impact of cracks. The results show that the gear meshing stiffness decreases with the increase of crack depth. Under the influence of uncertain parameters, phenomena such as “frequency shift” and “resonance band” will occur in the system, weakening the stability of the system.

Key words time-varying mesh stiffness, tooth crack, parameter uncertainty, vibration response

2025-02-19 收到第 1 稿,2025-04-01 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12172307, 12202368), National Natural Science Foundation of China(12172307, 12202368).

[†] 通信作者 E-mail:181042yy@163.com

引言

齿轮系统作为机械传动的关键部件,其核心功能为精确传递动力与运动,广泛应用于航空航天、能源、机械等领域^[1]. 齿轮副工作时长期承受高强度的冲击载荷,受材料缺陷、制造误差、极端工况,或是达到疲劳极限等影响,齿轮可能出现齿根裂纹、齿面点蚀、轮齿断裂等故障^[2,3]. 这些故障不仅导致传递精度降低,更可能导致齿轮系统失稳而诱发灾难.

在齿轮系统中,刚度激励是引起系统振动的主要因素. 对于一般直齿轮而言,轮齿处于不同的啮合位置时,啮合刚度也不同. 此外,齿轮在运转时存在单齿啮合和双齿啮合的交替转换,啮合刚度会随之产生周期性突变. 当轮齿出现故障时,啮合刚度将受到影响,可能导致齿轮系统出现异常的振动和冲击,甚至引发严重的安全事故. 针对含故障齿轮的时变啮合刚度问题,众多学者进行了深入的研究. Yang 等^[4]首次提出将啮合势能分为弯曲能、轴向压缩能和赫兹接触能,计算了轮齿的啮合刚度. 万志国等^[5]考虑齿轮基圆与齿根圆半径不相等的情况,提出一种改进的时变啮合刚度计算方法. Mohammed 等^[6]采用抛物线代替直线考虑裂纹引起的失效体积,解决了严重裂纹状况下啮合刚度计算误差较大的问题. 冯松等^[7]建立了考虑齿面点蚀与磨损的齿轮啮合刚度计算模型,研究了不同点蚀情况以及不同磨损程度下齿轮啮合刚度的变化情况. Jiang 等^[8]建立了考虑齿轮体挠度的啮合模型,研究了齿根裂纹对裂纹齿及其相邻齿的啮合刚度的影响. 刘杰等^[9]基于齿根裂纹到轮齿中心线的距离,建立了三种裂纹类型下的齿轮啮合模型,计算了不同裂纹深度时齿轮的啮合刚度. 孟宗等^[10]建立了完整的齿廓曲线模型,并分析了多种统计指标随裂纹扩展程度的变化趋势. Yang 等^[11]提出了强调裂纹位置的时变啮合刚度计算方法,以预测同时存在齿根和齿轮表面裂纹的直齿轮副的啮合刚度.

随着工业的发展,齿轮系统的性能和可靠性要求日益提升,这使得模型中的不确定性分析变得至关重要^[12]. 在齿轮系统中,不确定性是客观存在的,其来源是多样的,包括材料特性、边界条件和系统参数等. 针对不确定齿轮系统的动态特性问题,国内外学者开展了一些研究工作. Kumar 等^[13]推

导了直齿轮系统的等效离散方程,并分析了随机传递误差对动载荷系数的影响. 邓绪山等^[14]构建了以齿形为随机变量的系统模型,分析了基于随机误差的齿轮系统幅频响应特性. 陈会涛等^[15]研究了随机误差和外部激励对含时变啮合刚度和齿侧间隙的齿轮系统非线性动态响应的影响. Wen 等^[16]考虑齿轮系统的齿侧间隙非线性,采用路径积分法在概率域中捕捉随机响应. 廖映华等^[17]在啮合刚度的确定性表达式后加入随机分量,利用服从正态分布的随机变量来描述其随机不确定性,分析了两级人字齿轮系统的动态响应特性. Ma 等^[18]提出了一种基于 Chebyshev 展开和模态叠加的边界修正区间分析方法. Wei 等^[19]利用最小二乘法提高了 Chebyshev 区间分析方法的计算效率,并通过试验分析了不同不确定参数对齿轮系统幅频响应的影响. 邱继伟等^[20]提出了一种基于随机一区间混合不确定性的二阶可靠性分析方法,对螺旋锥齿轮结构的可靠性进行了分析.

综上所述,尽管现有研究在裂纹故障分析或不确定性建模方面已取得一定成果,但多数仍聚焦于单一因素的分析,缺乏对二者耦合效应的系统研究. 在齿轮系统不确定性分析中,啮合刚度的建模往往采用简化模型,或直接通过傅里叶级数进行拟合,精度有限. 另一方面,传统的概率模型在统计信息不足的情况下适用性较差. 相比之下, Chebyshev 区间分析方法无需依赖精确的概率分布信息,能够直接给出不确定参数的取值范围,特别适用于实际工程中缺乏统计数据支持的不确定性问题. 该方法在兼顾计算效率与结果稳定性方面展现出良好优势,具有广泛的应用潜力.

本文以 6 自由度直齿轮系统为研究对象,将齿轮轮齿视为以齿根圆为边界的变截面悬臂梁. 考虑完整的齿廓曲线,基于势能法计算出不同裂纹深度下的时变啮合刚度. 进一步地,结合 Chebyshev 区间分析方法建立了不确定性齿轮系统分析模型. 在此基础上,深入探讨了不同的不确定参数对齿轮系统的振动响应的影响,厘清一维不确定和多源不确定情况下齿轮系统区间响应的变化规律. 接着考虑裂纹的影响,研究了含齿根裂纹故障的不确定性齿轮系统的区间响应. 本文的研究结果可以为齿轮系统的振动响应预测提供一定的技术支撑.

1 齿轮时变啮合刚度计算

1.1 健康齿轮时变啮合刚度计算

如图 1 所示,齿轮轮齿被视为以齿根圆为边界的变截面悬臂梁。轮齿齿廓由三部分组成,分别是:过渡曲线 AB 、渐开线曲线 BC 和齿顶曲线 CD 。根据势能法,轮齿啮合过程中的弯曲势能 U_b 、轴向压缩势能 U_a 和剪切势能 U_s 计算如下^[4]:

$$U_b = \frac{F^2}{2k_b} = \int_{x_A}^{x_F} \frac{[F_b(x_F - x) - F_a h]^2}{2EI_x} dx \quad (1)$$

$$U_a = \frac{F^2}{2k_a} = \int_{x_A}^{x_F} \frac{F_a^2}{2EA_x} dx \quad (2)$$

$$U_s = \frac{F^2}{2k_s} = \int_{x_A}^{x_F} \frac{1.2F_b^2}{2GA_x} dx \quad (3)$$

式中, k_b 、 k_a 和 k_s 分别表示弯曲、轴向压缩和剪切刚度, F_a 和 F_b 分别表示啮合力 F 在径向和切向的分力, E 和 G 分别代表弹性模量和剪切模量, I_x 和 A_x 分别代表与 O 点距离为 x 的截面转动惯量和面积。

过渡曲线方程表达式如下

$$\begin{cases} x = R_p \cos \phi - \left(\frac{a_1}{\sin \gamma} + r \right) \sin(\gamma - \phi) \\ y = R_p \sin \phi - \left(\frac{a_1}{\sin \gamma} + r \right) \cos(\gamma - \phi) \end{cases} \quad (4)$$

式中, $r = c^* m / (1 - \sin \alpha_0)$, $a_1 = (h_a^* + c^*)m - r$, $b_1 = \pi m / 4 + h_a^* m \tan \alpha_0 + r \cos \alpha_0$, $\phi = (a_1 / \tan \gamma + b_1) / R_p$, R_p 为分度圆半径, α_0 为压力角, h_a^* 为齿顶高系数, c^* 为齿顶间隙系数。

根据渐开线的性质,其曲线方程可表示如下

$$\begin{cases} x = R_b [(\alpha_2 + \alpha) \sin \alpha + \cos \alpha] \\ y = R_b [(\alpha_2 + \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha] \end{cases} \quad (5)$$

式中, R_b 为齿轮基圆半径。

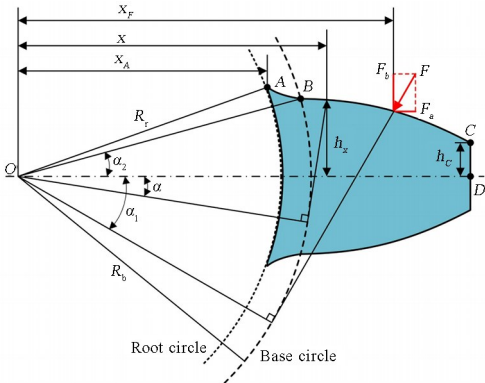


图 1 健康齿轮模型

Fig. 1 Model of a healthy gear tooth

结合过渡曲线方程和渐开线曲线方程, I_x 和 A_x 计算如下

$$I_x = \frac{2}{3} h_x^3 L \quad (6)$$

$$A_x = 2h_x L \quad (7)$$

$$h_x = \begin{cases} h_{x1} = R_p \sin \phi - \left(\frac{a_1}{\sin \gamma} + r \right) \cos(\gamma - \phi), & x_A \leq x \leq x_B \\ h_{x2} = R_b [(\alpha_2 + \alpha) \cos \alpha - \sin \alpha], & x_B < x \leq x_C \end{cases} \quad (8)$$

式中, L 表示轮齿宽度。

考虑齿面接触影响,赫兹接触刚度计算如下

$$\frac{1}{k_h} = \frac{4(1 - \nu^2)}{\pi EL} \quad (9)$$

齿轮基体在齿轮啮合过程中也会产生变形,基体刚度计算如下^[10]

$$\frac{1}{k_f} = \frac{\cos^2 \alpha_1}{EL} \left[L^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right)^2 + M^* \left(\frac{u_f}{S_f} \right) + P^* (1 + Q^* \tan^2 \alpha_1) \right] \quad (10)$$

式中, L^* 、 M^* 、 P^* 、 Q^* 、 u_f 和 S_f 等参数如文献[10]所示。

综上所述,单对轮齿啮合时的刚度计算如下

$$k_1 = \frac{1}{\frac{1}{k_{b1}} + \frac{1}{k_{b2}} + \frac{1}{k_{a1}} + \frac{1}{k_{a2}} + \frac{1}{k_{s1}} + \frac{1}{k_{s2}} + \frac{1}{k_{f1}} + \frac{1}{k_{f2}} + \frac{1}{k_h}} \quad (11)$$

式中,下标 1 和 2 分别表示主动轮和从动轮。

$$k_i = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{k_{b1}^i} + \frac{1}{k_{b2}^i} + \frac{1}{k_{a1}^i} + \frac{1}{k_{a2}^i} + \frac{1}{k_{s1}^i} + \frac{1}{k_{s2}^i} + \frac{1}{k_{f1}^i} + \frac{1}{k_{f2}^i} + \frac{1}{k_h^i} \right)} \quad (12)$$

式中, $i=1,2$, 分别表示第一对啮合轮齿与第二对啮合轮齿。

1.2 裂纹齿轮时变啮合刚度计算

齿根裂纹是齿轮系统最常见的故障形式之一,这是由于轮齿的受力与悬臂梁相似,在啮合过程中齿根部位始终承受最大的弯曲应力和剪切应力。同时,齿根作为轮齿与齿轮基体的连接处,存在显著的应力集中现象。

含齿根裂纹的直齿轮模型如图 2 所示,轮齿的根部存在一个深度为 q 的裂纹,裂纹与轮齿中心线的角度为 ν ,并且 q 和 ν 沿齿宽方向保持不变。裂纹的出现并不会影响轮齿径向承载能力,因此轴向压

缩刚度、赫兹接触刚度和基体刚度仍可以沿用健康齿的计算方式. 但裂纹的出现会导致有效截面惯性矩和截面面积减小, 弯曲和剪切刚度会发生变化. 根据裂纹深度和角度的不同需要考虑以下 3 种情况:

情况 1 $h_B < h_q$

$$I_x = \begin{cases} \frac{L}{12} [h_{x1} + h_q]^3, & x_A < x \leq x_Q \\ \frac{2L}{3} h_{x1}^3, & x_Q < x \leq x_B \\ \frac{2L}{3} h_{x2}^3, & x_B < x \leq x_C \end{cases} \quad (13)$$

$$A_x = \begin{cases} [h_{x1} + h_q]L, & x_A < x \leq x_Q \\ 2h_{x1}L, & x_Q < x \leq x_B \\ 2h_{x2}L, & x_B < x \leq x_C \end{cases} \quad (14)$$

情况 2 $h_C < h_q < h_B$

$$I_x = \begin{cases} \frac{L}{12} [h_{x1} + h_q]^3, & x_A < x \leq x_B \\ \frac{L}{12} [h_{x2} + h_q]^3, & x_B < x \leq x_Q \\ \frac{2L}{3} h_{x2}^3, & x_Q < x < x_C \end{cases} \quad (15)$$

$$A_x = \begin{cases} [h_{x1} + h_q]L, & x_A < x \leq x_B \\ [h_{x2} + h_q]L, & x_B < x \leq x_Q \\ 2h_{x2}L, & x_Q < x \leq x_C \end{cases} \quad (16)$$

情况 3 $h_q < h_C$

$$I_x = \begin{cases} \frac{L}{12} [h_{x1} + h_q]^3, & x_A < x \leq x_B \\ \frac{L}{12} [h_{x2} + h_q]^3, & x_B < x \leq x_C \end{cases} \quad (17)$$

$$A_x = \begin{cases} [h_{x1} + h_q]L, & x_A < x \leq x_B \\ [h_{x2} + h_q]L, & x_B < x \leq x_C \end{cases} \quad (18)$$

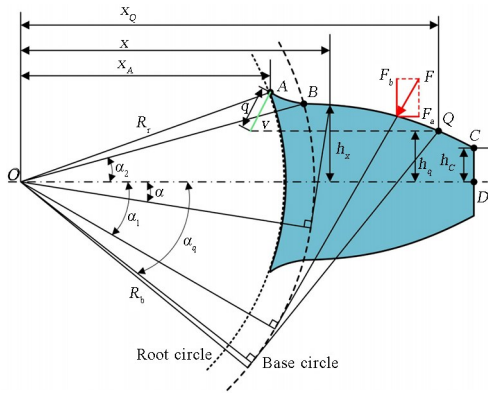


图 2 裂纹齿轮模型
Fig. 2 Model of a cracked gear tooth

综合以上 3 种情况, 将式(13)~(18)代入式(1)和式(3)中可以得到不同裂纹情况下的弯曲刚

度和剪切刚度, 进而可以得到含齿根裂纹的轮齿时变啮合刚度.

1.3 时变啮合刚度求解

根据上文的论述, 利用数值方法计算了齿轮系统的时变啮合刚度, 相关系统参数见表 1. 为了验证本文方法的有效性, 构建了齿轮副的三维有限元模型, 如图 3 所示.

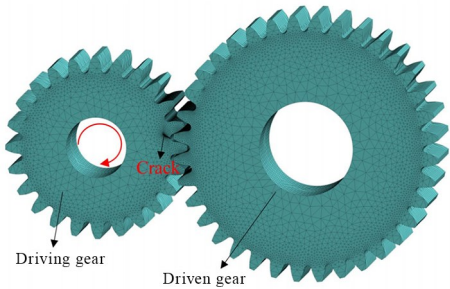


图 3 含裂纹齿轮副有限元模型
Fig. 3 Finite element model of a gear pair with tooth crack

表 1 齿轮系统参数
Table 1 Parameters of the gear system

Parameters	Driving gear/ Driven gear
Young's modulus E /GPa	200
Density ρ /(kg/m ³)	7850
Poisson's ratio ν	0.3
Tooth number	24/36
Module /mm	2
Pressure angle /(°)	20
Teeth width /mm	20
Mass /kg	1/1.8
Support stiffness in x direction /(N/m)	6×10^7
Support stiffness in y direction /(N/m)	6×10^7

为了分析裂纹深度对时变啮合刚度的影响, 将裂纹角度 ν 设定为 45° , 裂纹深度 q 分别取 1.5 mm、2.5 mm、3.5 mm. 图 4(a) 和 4(b) 分别展示了有限元法与势能法在不同裂纹深度下计算得到的齿轮副啮合刚度结果. 可以看出, 两种方法的计算结果吻合良好, 验证了本文所提出啮合刚度计算方法的正确性. 图 4 中的横坐标为主动轮的转动角度, 转动角度增加表示啮合位置从齿根向齿顶移动. 可以看出, 裂纹的产生会导致啮合刚度减小. 当裂纹处于初始阶段, 即裂纹长度较小时, 刚度的变化较小, 而当裂纹扩展后, 刚度减小显著. 并且, 随着转动角度的增大, 刚度的减小量也随之增大.

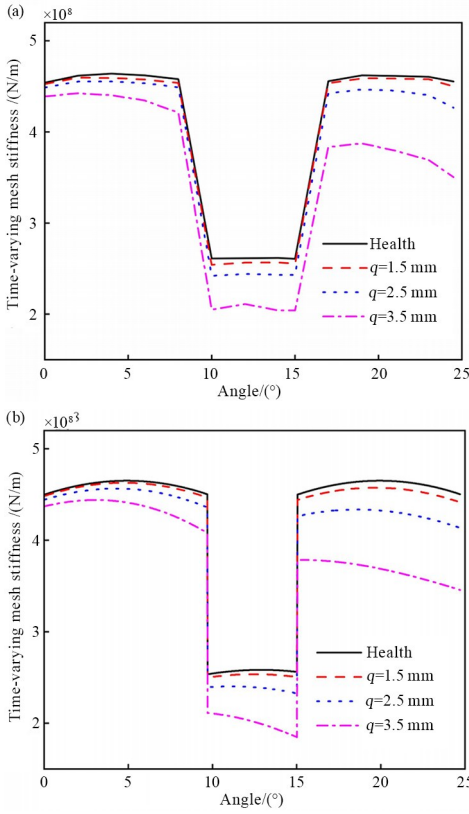


图4 不同裂纹深度下的时变啮合刚度:(a)有限元法;(b)势能法
Fig. 4 Time-varying mesh stiffness at different crack depths:
(a) Finite element method; (b) Potential energy method

1.4 齿轮系统振动方程建立

6 自由度集总参数齿轮系统动力学模型如图5所示。在该模型中,齿轮被视为两个刚性圆盘,主动轮与从动轮通过啮合作用相互耦合。轴承的支撑作用简化为弹簧,传动轴的质量集中到对应的齿轮节点上。同时,为简化建模与计算过程,模型中忽略了质量不平衡、几何偏心等因素对系统动力学响应的影响。该简化模型在降低系统复杂度的同时保留了齿轮系统的主要动力学特征,能够有效反映啮合刚度变化对系统振动响应的影响,使得求解过程更加高效。

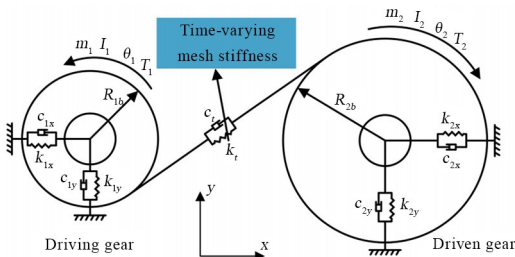


图5 齿轮系统动力学模型
Fig. 5 Dynamic model of the gear system

系统的动力学方程表示为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_{1x} \dot{x}_1 + k_{1x} x_1 + F_t \sin \alpha_0 = 0 \\ m_1 \ddot{y}_1 + c_{1y} \dot{y}_1 + k_{1y} y_1 + F_t \cos \alpha_0 = 0 \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + F_t R_{b1} = T_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_{2x} \dot{x}_2 + k_{2x} x_2 - F_t \sin \alpha_0 = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + c_{2y} \dot{y}_2 + k_{2y} y_2 - F_t \cos \alpha_0 = 0 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 - F_t R_{b2} = -T_2 \end{cases} \quad (19)$$

式中, T_1 、 m_1 和 I_1 分别表示主动轮的扭矩、质量和转动惯量; T_2 、 m_2 和 I_2 分别表示从动轮的扭矩、质量和转动惯量; k_{1x} 和 k_{1y} 为主动轮轴承水平和竖直方向的支撑刚度; k_{2x} 和 k_{2y} 为从动轮轴承水平和竖直方向的支撑刚度; c_{1x} 和 c_{1y} 为主动轮轴承水平和竖直方向的支撑阻尼; c_{2x} 和 c_{2y} 为从动轮轴承水平和竖直方向的支撑阻尼; F_t 是齿轮啮合力表示为

$$F_t = c_t \dot{\delta} + k_t \delta \quad (20)$$

式中, δ 定义为传递误差, c_t 是时变啮合阻尼, 可分别表示成

$$\delta = (x_1 - x_2) \sin \alpha_0 + (y_1 - y_2) \cos \alpha_0 + \theta_1 R_{b1} - \theta_2 R_{b2} \quad (21)$$

$$c_t = 2\zeta \sqrt{\frac{k_t}{R_{b1}^2/I_2 + R_{b2}^2/I_1}} \quad (22)$$

式中, ζ 表示阻尼比。

2 含参数不确定性齿轮系统动力学分析

2.1 区间不确定性描述

齿轮系统中的不确定性参数为不确定但有界的变量。可以用区间的形式表示为

$$\chi^1 = [\underline{\chi}, \bar{\chi}] = [\chi^c - \beta \chi^c, \chi^c + \beta \chi^c] \quad (23)$$

式中, χ^1 表示区间参数, $\underline{\chi}$ 和 $\bar{\chi}$ 分别表示区间参数的下界和上界。 $\chi^c = (\underline{\chi} + \bar{\chi})/2$ 表示区间参数的中间值, β 为定义不确定程度的不确定系数。扩展到多维时, 式(23)改写为矩阵的形式

$$\chi^1 = [\underline{\chi}, \bar{\chi}] = [\chi^c - \beta \chi^c, \chi^c + \beta \chi^c] \quad (24)$$

考虑不确定参数的影响, 齿轮系统的动力学方程可表示为

$$\mathbf{M}(\chi^1) \ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}(\chi^1) \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}(\chi^1) \mathbf{z} = \mathbf{F}(\chi^1) \quad (25)$$

式中, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 分别表示系统的质量、阻尼、刚度和激励矩阵。

根据 Weierstrass 定理, 存在多项式 $g(x)$ 收敛

于在闭区间内连续的函数 $f(x)$, 即

$$\|f(x) - g(x)\|_{\infty} < \varepsilon, \quad x \in [a, b] \quad (26)$$

$g_k(x)$ 表示最高阶次为 k 的多项式集合

$$g_k(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \quad (27)$$

式中, $a_0, \dots, a_k$ 表示多项式系数.

在 $g_k(x)$ 中, 存在唯一多项式满足下式

$$\begin{aligned} \|f(x) - g(x)\|_{\infty} &\geq \|f(x) - g_k^*(x)\|_{\infty} \\ &= E_k(f), \quad x \in [a, b] \end{aligned} \quad (28)$$

式中, $g_k^*(x)$ 被称为关于 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 的 k 阶最佳一致逼近多项式.

由于 Chebyshev 级数接近最佳一致逼近多项式, 可以用 Chebyshev 级数有效地近似原函数.

对于一维不确定性问题, Chebyshev 级数用 A_k 表示为

$$A_k(x) = \cos[k \arccos(x)], \quad x \in [-1, 1] \quad (29)$$

当 $x \in [a, b]$, 则将 A_k 线性变化为 $A_k(x) = \cos\left\{k \arccos\left[\frac{2x - (b+a)}{b-a}\right]\right\}$. $A_k(x)$ 存在以下递推关系

$$\begin{cases} A_0(x) = 1; \\ A_1(x) = x; \\ \dots \\ A_k(x) = 2xA_{k-1}(x) - A_{k-2}(x) \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

$A_k(x)$ 在 $x \in [-1, 1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ 正交, 即

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{A_k(x)A_p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos[k \arccos(x)] \cos[p \arccos(x)] dx \\ &= \begin{cases} \pi, & k=p=0 \\ \frac{\pi}{2}, & k=p \neq 0 \\ 0, & k \neq p \end{cases} \end{aligned} \quad (31)$$

函数 $f(x)$ 可近似为基于 Chebyshev 级数的 k 阶多项式

$$f(x) \approx A_k(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{i=1}^k f_i A_i(x) \quad (32)$$

式中, f_i 为常系数, 可由以下积分计算

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)A_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\begin{aligned} &\approx \int_{-1}^1 \frac{A_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{f_0}{2} + \sum_{i=1}^k f_i A_i(x) \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f_0 A_k(x)}{2\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{i=1}^k \frac{f_i A_i(x) A_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned} \quad (33)$$

结合式(31)可得

$$f_i = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)A_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (34)$$

通过 Gauss-Chebyshev 数值积分公式对上式插值积分可得

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)A_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &\approx \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) A_i(x_j) \end{aligned} \quad (35)$$

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (36)$$

式中, n 表示插值点数, x_j 表示插值点. 值得注意的是, 为了保证逼近的精度, 插值点数必须大于逼近方程的阶数, 即 $n \geq k+1$.

综上所述, $f(x)$ 的 k 阶多项式为

$$\begin{aligned} f(x) &\approx g_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(x_j) + \\ &\frac{2}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n f(x_j) A_i(x_j) A_i(x) \end{aligned} \quad (37)$$

对于多维不确定性问题, r 维 Chebyshev 多项式是每个不确定参数的一维 Chebyshev 多项式的张量积, 即

$$\begin{aligned} &A_{k_1, k_2, \dots, k_r}(x_1, x_2, \dots, x_r) \\ &= \cos[k_1 \arccos(x_1)] \cos[k_2 \arccos(x_2)] \cdots \\ &\cos[k_r \arccos(x_r)] \end{aligned} \quad (38)$$

具有 r 个不确定参数的函数 $f(\mathbf{x})$ 近似为

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{i_1=0}^k \cdots \sum_{i_r=0}^k \left(\frac{1}{2}\right)^m f_{i_1, \dots, i_r} A_{i_1, \dots, i_r}(\mathbf{x}) \quad (39)$$

式中, m 表示下标 $i_1, \dots, i_r$ 中 0 的个数. 常系数 $f_{i_1, \dots, i_r}$ 可以计算为

$$\begin{aligned} f_{i_1, \dots, i_r} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^r \int_{-1}^1 \cdots \\ &\int_{-1}^1 \frac{f(\mathbf{x}) A_{i_1, \dots, i_r}(\mathbf{x})}{\sqrt{1-x_1^2} \cdots \sqrt{1-x_r^2}} dx_1 \cdots dx_r \\ &\approx \left(\frac{2}{k}\right)^r \sum_{i_1=1}^k \cdots \sum_{i_r=1}^k f(x_{i_1}, \dots, x_{i_r}) A_{i_1}(x_{i_1}) \cdots \\ &A_{i_r}(x_{i_r}) \end{aligned} \quad (40)$$

将具有区间型参数不确定的齿轮系统的动态响应视为连续可微函数. 通过对插值点处的确定性响应进行数值计算, 可以确定该不确定齿轮系统的响应边界, 计算流程如图 6 所示.

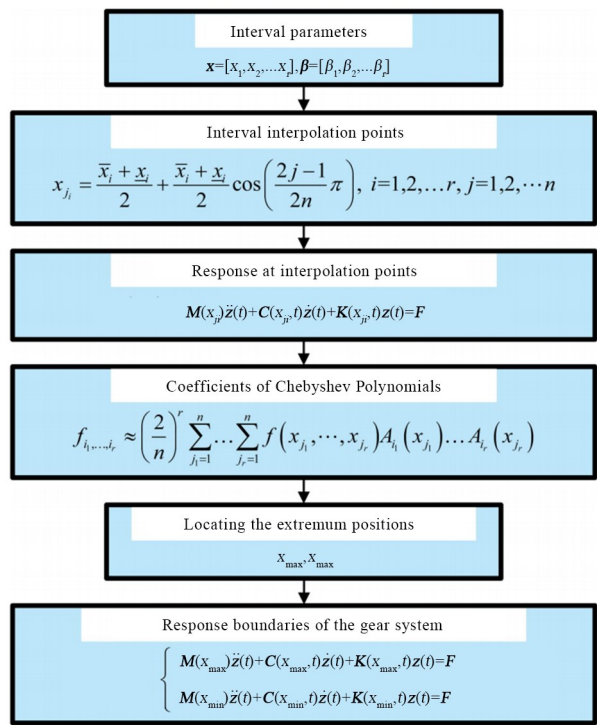


图 6 不确定性齿轮系统响应计算流程图
Fig. 6 Flowchart for calculating the response of the uncertain gear system

2.2 参数不确定影响下齿轮系统动力学特性

不同不确定参数定义为相互独立并且不含任何概率模型的区间变量, 区间的中点值为表 1 所示的确定性参数, 区间的上下边界由不确定系数决定. 值得注意的是, 在不确定区间内, 区间参数对齿轮系统的影响并不是简单的线性映射, 区间的上界不一定导致严重的振动响应, 同理, 振型响应的下边界也不一定由区间参数的下界确定.

首先, 考虑一维参数不确定的影响, 对被动轮在竖直方向的位移 y_2 进行研究. 分别取 Chebyshev 多项式阶数 $k=4$, 插值点数 $n=5$ 和阶数 $k=7$, 插值点数 $n=10$, 在质量的不确定系数为 5% 时, 对系统的幅频响应进行了分析, 如图 7 所示. 从结果可以看出, 在 $k=4, n=5$ 系统响应区间已趋于收敛, 波动较小. 进一步提高阶数与插值点数后, 系统响应变化不明显. 因此, 本文在后续不确定性分析中采用 $k=4, n=5$ 作为 Chebyshev 方法的配置, 以兼顾计算精度与效率.

具有不确定质量的齿轮系统幅频响应如图 8 所示, 不确定系数依次取 5% 和 10%. 可以看出, 确定性系统的幅频响应始终位于不确定性系统的响应区间之内. 随着不确定系数增大, 系统幅频响应区间进一步扩大, 特别是在共振区域. 质量的不确定导致系统原本的单一共振频率扩展为一个频率范围, 形成了共振带, 这意味着在确定性共振频率附近的一个范围内, 系统的振动幅值可能都很严重. 与确定性齿轮系统相比, 不确定性齿轮系统的最大幅值对应频率产生了频移现象. 这种现象说明质量不确定对齿轮系统的固有属性有较大影响.

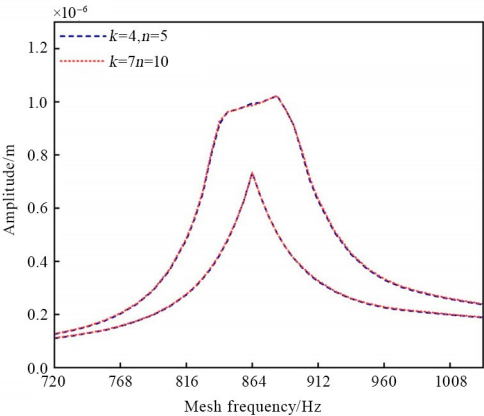


图 7 不同 Chebyshev 多项式阶数与插值点下的响应结果
Fig. 7 Response results under different Chebyshev polynomial orders and interpolation points

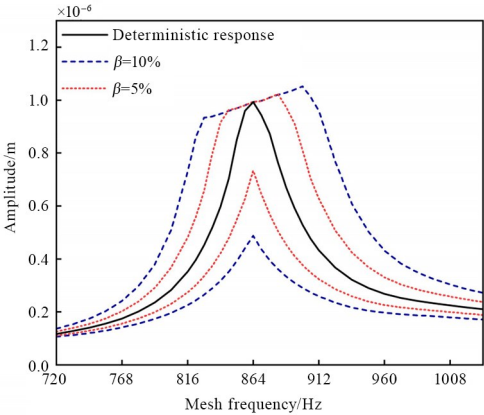


图 8 质量 m_2 不确定时健康齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 8 Amplitude-frequency response of y_2 in the healthy gear system under mass m_2 uncertainty

图 9 给出了具有不确定支撑刚度齿轮系统的幅频响应. 与质量不确定不同的是, 支撑刚度不确定形成的共振带的频率范围主要位于小于确定性系统共振频率的区域. 由频移现象可知, 支撑刚度不确定对齿轮系统的固有属性也有较大影响.

具有不确定弹性模量的齿轮系统幅频响应如图 10 所示. 从图中可以观察到, 弹性模量不确定对

共振峰具有显著影响,而对其他区域的振动幅值影响较小. 齿轮系统并未发生频移现象,说明在弹性模量不确定的影响下,系统本质上仍是线性系统,其固有频率仅与质量和刚度有关.

为了研究裂纹的影响,将裂纹角度设定为 45° , 裂纹深度设定为 3.5 mm . 相比于图 8~10,裂纹的产生不会改变幅频曲线的包络形式,但会提升整个区域的振动响应,如图 11~13 所示. 在一些区域内,

裂纹齿轮系统振动响应的下边界甚至已经超过健康齿轮系统响应的上边界.

在单参数不确定性分析的基础上,进一步考虑多源不确定性参数对 y_2 响应的影响. 如图 14 所示,当齿轮质量、轴承刚度及弹性模量等参数同时存在区间不确定性时,齿轮系统的振动响应不是简单的线性叠加,确定性的分析方法已无法准确有效地

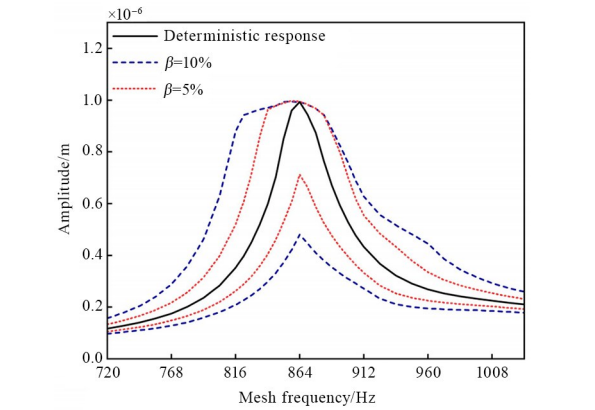


图 9 支撑刚度 k_{2y} 不确定时健康齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 9 Amplitude-frequency response of y_2 in the healthy gear system under support stiffness k_{2y} uncertainty

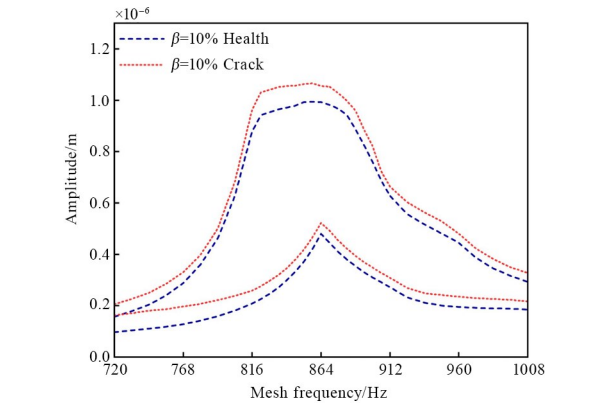


图 12 支撑刚度 k_{2y} 不确定时裂纹齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 12 Amplitude-frequency response of y_2 in the gear system with tooth cracks under support stiffness k_{2y} uncertainty

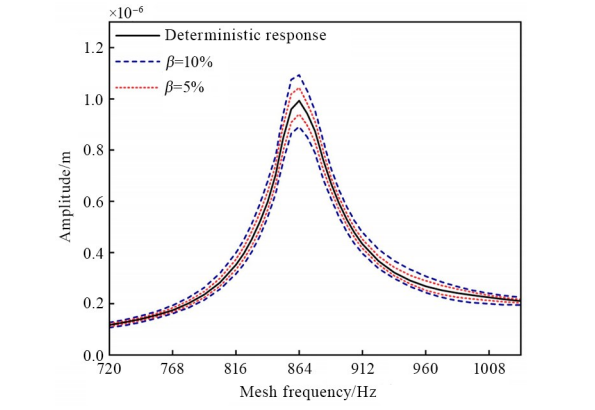


图 10 弹性模量 E 不确定时健康齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 10 Amplitude-frequency response of y_2 in the healthy gear system under Young's modulus E uncertainty

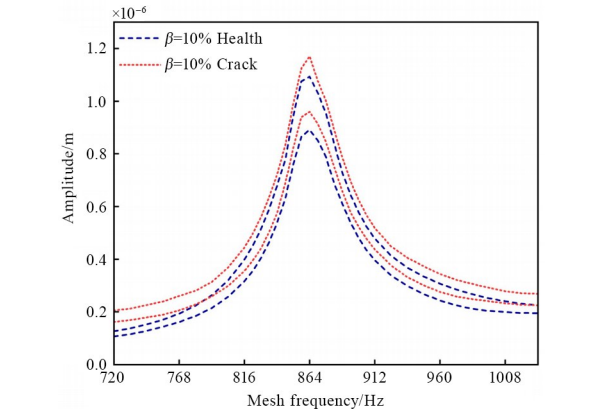


图 13 弹性模量 E 不确定时裂纹齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 13 Amplitude-frequency response of y_2 in the gear system with tooth cracks under Young's modulus E uncertainty

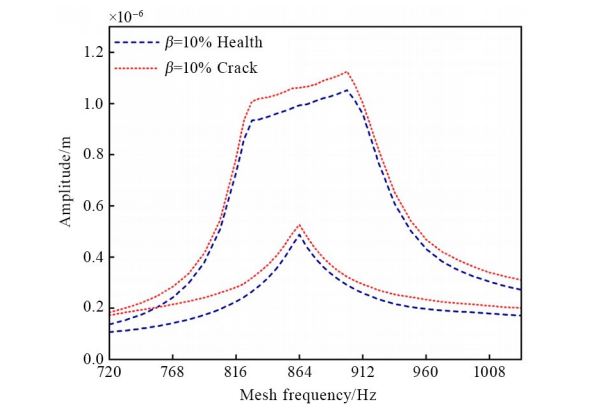


图 11 质量 m_2 不确定时裂纹齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 11 Amplitude-frequency response of y_2 in the gear system with tooth cracks under mass m_2 uncertainty

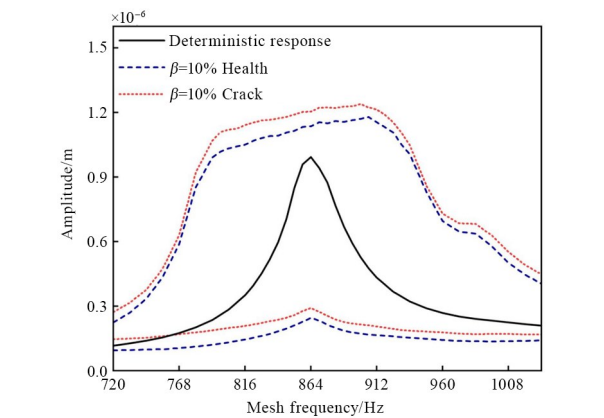


图 14 多源参数不确定时裂纹齿轮系统 y_2 的幅频响应
Fig. 14 Amplitude-frequency response of y_2 in the gear system with tooth cracks under multi-source parameter uncertainties

体现齿轮系统的振动行为. 在多源不确定性参数的影响下, 齿轮系统的幅频响应区间包含了单个参数不确定时的特征, 包括频移, 共振带等特性. 当裂纹产生时, 振动响应被进一步放大, 齿轮每旋转一圈都会受到一次巨大的冲击, 这显然危害到齿轮系统的可靠性和安全性.

3 结论

本文将齿轮轮齿视为以齿根圆为边界的变截面悬臂梁, 利用势能法建立了健康轮齿和裂纹轮齿理论模型, 研究了裂纹深度对时变啮合刚度的影响. 在此基础上, 结合 Chebyshev 区间分析方法构建了不确定齿轮系统分析模型. 分析了不同不确定参数对齿轮系统动态特性的影响. 主要结论如下:

(1) 在参数不确定的影响下, 齿轮系统的幅频响呈现包络形式, 包络形状与不确定参数密切相关, 多源不确定性导致系统响应比单源不确定性偏差更明显.

(2) 随着裂纹深度的增加, 时变啮合刚度逐渐减小. 在裂纹的影响下, 具有不确定性参数直齿轮系统的振动影响被进一步放大, 大大削弱了系统的稳定性和可靠性.

参考文献

- [1] LIU F H, ZHANG L, JIANG H J, et al. Nonlinear dynamic analysis of two external excitations for the gear system using an original computational algorithm [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 144: 106823.
- [2] 雷亚国, 罗希, 刘宗尧, 等. 行星轮系动力学新模型及其故障响应特性研究[J]. *机械工程学报*, 2016, 52(13): 111—122.
LEI Y G, LUO X, LIU Z Y, et al. A new dynamic model of planetary gear sets and research on fault response characteristics [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2016, 52(13): 111—122. (in Chinese)
- [3] MOHAMMED O D, RANTATALO M. Dynamic response and time-frequency analysis for gear tooth crack detection [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 66: 612—624.
- [4] YANG D C H, LIN J Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics [J]. *Journal of Mechanical Design*, 1987, 109(2): 189—196.
- [5] 万志国, 瞿艳阳, 曹宏瑞, 等. 时变啮合刚度算法修正与齿根裂纹动力学建模[J]. *机械工程学报*, 2013, 49(11): 153—160.
WAN Z G, ZI Y Y, CAO H R, et al. Time-varying mesh stiffness algorithm correction and tooth crack dynamic modeling [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2013, 49(11): 153—160. (in Chinese)
- [6] MOHAMMED O D, RANTATALO M, AIDANPÄÄ J O. Improving mesh stiffness calculation of cracked gears for the purpose of vibration-based fault analysis [J]. *Engineering Failure Analysis*, 2013, 34: 235—251.
- [7] 冯松, 毛军红, 谢友柏. 齿面磨损对齿轮啮合刚度影响的计算与分析[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(15): 27—32.
FENG S, MAO J H, XIE Y B. Analysis and calculation of gear mesh stiffness with tooth wear [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(15): 27—32. (in Chinese)
- [8] JIANG H J, LIU F H. Analytical models of mesh stiffness for cracked spur gears considering gear body deflection and dynamic simulation [J]. *Mechanica*, 2019, 54(11): 1889—1909.
- [9] 刘杰, 孙玉凤, 李环宇. 不同齿根裂纹深度的啮合刚度与振动响应分析[J]. *振动测试与诊断*, 2021, 41(2): 275—282, 410.
LIU J, SUN Y F, LI H Y. Analysis of meshing stiffness and vibration response of tooth with root crack in different depth [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2021, 41(2): 275—282, 410. (in Chinese)
- [10] 孟宗, 石桂霞, 王福林, 等. 基于时变啮合刚度的裂纹故障齿轮振动特征分析[J]. *机械工程学报*, 2020, 56(17): 108—115.
MENG Z, SHI G X, WANG F L, et al. Vibration characteristic analysis of cracked gear based on time-varying meshing stiffness [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2020, 56(17): 108—115. (in Chinese)
- [11] YANG Y, TANG J Y, HU N Q, et al. Research on the time-varying mesh stiffness method and dynamic analysis of cracked spur gear system considering the crack position [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2023, 548: 117505.
- [12] SOIZE C. Uncertainty quantification: An

- accelerated course with advanced applications in computational engineering [M]. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2017: 9–11.
- [13] KUMAR A S, OSMAN M O M, SANKAR T X. On statistical analysis of gear dynamic loads [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1986, 108(3): 362–368.
- [14] 邓绪山, 杨兵, 刘增民. 基于轮齿随机误差的齿轮系统动力学分析[J]. *机械传动*, 2011, 35(10): 31–34.
- DENG X S, YANG B, LIU Z M. Dynamic analysis of gear system based on the random gear errors [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2011, 35(10): 31–34. (in Chinese)
- [15] 陈会涛, 吴晓铃, 秦大同, 等. 随机内外激励对齿轮系统动态特性的影响分析[J]. *中国机械工程*, 2013, 24(4): 533–537.
- CHEN H T, WU X L, QIN D T, et al. Dynamic characteristics of gear transmission system subjected to random internal and external excitation [J]. *China Mechanical Engineering*, 2013, 24(4): 533–537. (in Chinese)
- [16] WEN Y B, YANG J M, WANG S Y. Random dynamics of a nonlinear spur gear pair in probabilistic domain [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(20): 5030–5041.
- [17] 廖映华, 秦大同, 刘长钊. 考虑内部激励随机性的两级分流式人字齿轮传动动力学特性[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(1): 206–212.
- LIAO Y H, QIN D T, LIU C Z. Dynamic characteristics of two-stage split herringbone gear trains considering the randomness of internal excitations [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(1): 206–212. (in Chinese)
- [18] MA Y H, WANG Y F, WANG C, et al. Interval analysis of rotor dynamic response based on Chebyshev polynomials [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(9): 2342–2356.
- [19] WEI S, CHU F L, DING H, et al. Dynamic analysis of uncertain spur gear systems [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 150: 107280.
- [20] 邱继伟, 罗海胜. 基于混合不确定性的螺旋锥齿轮结构可靠性分析 [J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2022, 52(2): 466–473.
- QIU J W, LUO H S. Structure reliability analysis of spiral bevel gear based on hybrid uncertainties [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2022, 52(2): 466–473. (in Chinese)