

# 偏置转盘对转子系统振动能量特性的影响<sup>\*</sup>

庄可欣<sup>1</sup> 杨永峰<sup>1†</sup> 邓旺群<sup>2</sup> 张显涛<sup>1,3</sup> 刘文魁<sup>2</sup>

(1. 西北工业大学 振动工程研究所, 西安 710072)

(2. 中国航发湖南动力机械研究所, 株洲 412002)

(3. 清华大学 机械系, 北京 100084)

**摘要** 转盘的偏置会影响转子系统的临界转速、振动模式以及振动能量。为了更好地理解和控制由转盘偏置引起的陀螺效应, 提高转子系统的运行安全性和工作性能, 本文以单盘转子系统为对象, 建立偏置转盘转子系统模型, 结合时均功率流, 研究了不同转盘位置所引起的陀螺效应对转子系统能量和振动响应特性的影响。结果表明, 转盘位于不同的节点位置时, 偏置程度越大, 忽略陀螺效应而带来的一阶临界转速、振动幅值以及能量曲线的偏差越大, 转子系统的时均功率流曲线的涨幅越大。

**关键词** 偏置转盘, 时均功率流, 陀螺效应, 能量

中图分类号:TH113

文献标志码:A

## Effect of the Bias Rotor Disc on the Vibration Energy Characteristics of the Rotor System<sup>\*</sup>

Zhuang Kexin<sup>1</sup> Yang Yongfeng<sup>1†</sup> Deng Wangqun<sup>2</sup> Zhang Xiantao<sup>1,3</sup> Liu Wenkui<sup>2</sup>

(1. Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. AECC Hunan Power Machinery Research Institute, Zhuzhou 412002, China)

(3. Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** The bias of the bias rotor disc affects the critical speed, vibration mode, and vibration energy of the rotor system. In order to better understand and control the gyroscopic effect caused by the turntable bias and improve the operation safety and working performance of the rotor system, this paper takes the single-disc rotor system as the object, establishes the model of the bias turntable rotor system, and studies the influence of the gyroscopic effect caused by different turntable positions on the energy and vibration response characteristics of the rotor system in combination with the time-average power flow. The results show that when the turntable is located at different node positions, the greater the bias degree, the greater the deviation of the first-order critical speed, vibration amplitude and energy curve caused by ignoring the gyroscopic effect, and the greater the amplitude of the time-average power flow curve of the rotor system.

**Key words** offset turntable, hourly average power flow, gyroscopic effect, energy

2025-05-07 收到第 1 稿, 2025-06-27 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助项目(12172289), 中国航空发动机振动技术重点实验室开放资助项目(KY-1003-2023-0010), 陕西省自然科学基础研究计划资助项目(2025JC-JCQN-067), National Natural Science Foundation of China (12172289), Open Project of the Key Laboratory of Aero Engine Vibration Technology of China (KY-1003-2023-0010), Natural Science Basic Research Program of Shaanxi Province (2025JC-JCQN-067).

† 通信作者 E-mail:yyf@nwpu.edu.cn

## 引言

旋转机械作为重要的动力设备类型,在工业生产和生活中发挥着不可替代的作用。转子作为旋转机械的核心部件,其动力学特性直接关系到设备的稳定安全运转。陀螺效应是转子动力学研究过程中不可避免的因素,一般情况下陀螺效应会给系统的稳定性、性能和寿命带来不利影响。振动能量是衡量转子系统动力学性能的重要指标之一,通过分析系统的能量变化,可以评估系统的工作状态、效率和稳定性,且可以通过研究能量变化规律优化系统的结构和参数,提高系统的性能和效率。

目前的研究中,尽管已经意识到了陀螺效应的影响,但通常将陀螺效应、转子系统动力学分析和能量分开进行研究,且在许多简化模型中,往往会低估陀螺效应的影响。国内外学者针对转子的振动特性开展了卓有成效的工作,例如,Zhang 等<sup>[1]</sup>考虑陀螺效应建立了含压电陶瓷致动器(PZT)的转子系统动力学模型,提出了用 PZT 主动改变挤压油膜阻尼器油膜间隙的控制方法来抑制转子系统的临界振幅。陈恩利<sup>[2]</sup>基于转子动力学、Hertz 理论和非线性动力学理论,针对一端支座松动的滚动轴承—转子系统的运动特征,研究了滚动轴承—转子系统在支承松动时的分岔和混沌运动及其变化规律,虽然建立了转子动力学模型并进行了动力学分析,却并未考虑到陀螺效应的影响。梁明轩等<sup>[3]</sup>考虑非线性滚动轴承力、不平衡量、碰摩故障及陀螺效应,建立了滚动轴承—柔性对称碰摩转子系统非线性集中质量模型。沈易霏等<sup>[4]</sup>提出了一种针对非对称转子的转速自适应的多通道单边滤波 PIDC 控制方法,这种 PIDC 控制算法可以有效解决高速下陀螺效应导致的转子一端进动和章动模态失稳的问题。Cao 等<sup>[5]</sup>提出了考虑陀螺效应和附加质量效应的数值方法,分别讨论了附加质量、陀螺效应和轴承刚度的影响,发现了模态振型的“传递”现象。王美令<sup>[6]</sup>则以 Jeffcott 转子系统为对象,研究转盘在转轴上不同偏置安装位置所引起的陀螺效应,以及对转子系统固有特性和弯曲振动模式的影响规律。Liang 等<sup>[7]</sup>研究了转子偏移对非线性动力学响应的影响机理,建立了偏置转子的非线性振动模型,得出了圆盘偏移量是导致滚动轴承产生更复杂非线性的重要因素的结论。Dewi 等<sup>[8]</sup>将会引起

前向和后向的涡动频率的陀螺效应作为重点,研究了旋转条件下的转子—轴承系统的尺度—全尺度模型。Yang 等<sup>[9]</sup>通过采用所提出的非线性模态分析策略,在分析转子系统的动力学行为时,同时考虑了本质的陀螺效应以及由部件松动引起的干摩擦影响。上述研究表明,转子动力学的研究不仅需要考虑传统的动力学因素,还需要关注陀螺效应,以提高转子系统的稳定性和可靠性。

在转子振动能量方面,运侠伦等<sup>[10]</sup>通过动力学方程证明了加重影响系数实际上是由转子系统结构参数决定,是能够反映转子系统能量传递特性的参数。马英群等<sup>[11]</sup>为了分析在转子不平衡力激励作用下机匣上纵波、剪切波、扭转波以及弯曲波所携带的瞬态与稳态振动能量的分布规律和传递特性,将结构声强法拓展成矩阵的形式应用到航空发动机领域。Ma 等<sup>[12]</sup>从能量控制的角度分析了一阶弯曲模态形状、锥形旋转模态和平移模态形状转子振动能量流的传输、转换和平衡关系。Qiao 等<sup>[13]</sup>采用功率流与振动能量相结合的方法,评估了旋转机械的主动隔振性能,提出了与功率流和振动能量相关的间接测量方法,并建立了相应的联系。Wei 等<sup>[14]</sup>对由具有摩擦界面的子系统组成的非光滑系统进行振动能量流分析,通过调整耦合摩擦接触,以实现理想的振动传递和能量耗散行为,从而增强振动抑制设计。研究转子振动能量的优势在于它提供了一个全面而深入的视角来理解和改进转子系统的性能,对于确保旋转设备的可靠性和效率至关重要。

目前在转子陀螺效应和振动能量方面,大部分学者通过数值方法求解计算陀螺效应的影响,或是利用单一参数研究振动能量的变化。为了更好地理解和服务于转盘偏置引起的振动,提高转子系统的运行安全性和工作性能,基于上述工作,本文建立了考虑偏置转盘引起的陀螺效应的转子系统模型,通过改变转盘偏置的程度,采用有限元分析了时均功率流和不平衡振动响应随偏置程度的变化规律。

## 1 偏置转盘转子系统有限元建模

目前结构动力学分析中运用最普遍的方法为有限元法,其基本思想是将转子系统视为一组有限个且按照一定方式相互联结在一起的单元组合体。

用有限元法建立改进型 Jeffcott 转子模型,该模型继承经典 Jeffcott 转子集中质量弹性支承架构,但将转轴处理为具有分布质量和刚度的 Euler-Bernoulli 梁单元,以更准确表征轴系动力学行为。沿轴线将转子系统划分为圆盘、轴端和轴承座等单元,各单元间彼此在结点处联结。转轴两端为刚性支撑,转轴的长为  $l$ ,转盘距左支点 A 处的距离为  $a$ ,如图 1 所示。

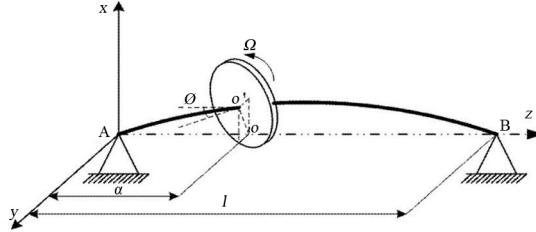


图 1 转盘偏置转子模型图  
Fig. 1 Model of the offset rotor system

## 1.1 刚性圆盘

对于质量和极转动惯量分别为  $m, J_p$  的圆盘,以转盘中心  $O'$  的坐标  $x, y$  和转角  $\theta_x, \theta_y$  表示转盘在运动过程中任意瞬时的位置,具体形式为  $\mathbf{u}_d = [x \ -\theta_x \ y \ \theta_y]$ .

基于 Lagrange 方程,可以得到刚性圆盘单元的运动微分方程为:

$$\mathbf{M}_d \ddot{\mathbf{u}}_d + \Omega \mathbf{J}_p \dot{\mathbf{u}}_d = \mathbf{F}_d \quad (1)$$

其中质量矩阵  $\mathbf{M}_d$ 、回转陀螺矩阵  $\mathbf{J}_p$  以及广义集中力  $\mathbf{F}_d$  分别为:

$$\mathbf{M}_d = \frac{\mu l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & 22l & 54 & 0 & 0 & -13l \\ 0 & 4l^2 & 22l & 0 & 0 & -3l^2 & 13l & 0 \\ 0 & 22l & 156 & 0 & 0 & -13l & 54 & 0 \\ 22l & 0 & 0 & 4l^2 & 13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & 13l & 156 & 0 & 0 & -22l \\ 0 & -3l^2 & -13l & 0 & 0 & 4l^2 & -22l & 0 \\ 0 & 13l & 54 & 0 & 0 & -22l & 156 & 0 \\ -13l & 0 & 0 & -3l^2 & -22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} m\omega^2 e \cos(\omega t + \varphi) \\ 0 \\ m\omega^2 e \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中,  $\omega$  为等刚性圆盘单元的转速,  $J_d$  为直径转动惯量,  $e$  为质量偏心距。

## 1.2 轴段单元

忽略轴的轴向力和扭转的影响,将轴划分为多个忽略剪切变形的欧拉-伯努利梁单元,如图 2 所示。对各轴段单元进行建模,通过各单元之间相互联结的关系组装总矩阵。设一单元的广义坐标为两端点的位移,即

$$\mathbf{u}_1 = [x_1 \ -\theta_{x1} \ y_1 \ \theta_{y1}] \quad (3)$$

$$\mathbf{u}_2 = [x_2 \ -\theta_{x2} \ y_2 \ \theta_{y2}] \quad (4)$$

令

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2] \quad (5)$$

则根据 Lagrange 方程,可以得到轴段单元的运动方程为:

$$\mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{u}} + \Omega \mathbf{J}_z \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_z \mathbf{u} = \mathbf{Q}_z \quad (6)$$

式中,一致质量矩阵  $\mathbf{M}_z$  为移动惯性矩阵  $\mathbf{M}_{zT}$  与转动惯性矩阵  $\mathbf{M}_{zR}$  之和。其中移动惯性矩阵、转动惯性矩阵、刚度矩阵、回转陀螺矩阵表达式分别如下:

$$\mathbf{M}_{zT} = \frac{\mu l}{120l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & 4l^2 & -3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 & -3l & 0 \\ 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l & 36 & 0 \\ 3l & 0 & 0 & -l^2 & -3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_z = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 4l^2 & 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 & 0 & 2l^2 \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 2l^2 & 6l & 0 & 0 & 4l^2 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2 & -6l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_z = 2\mathbf{M}_{zR} \quad (10)$$

式(7)~(10)中,  $\mu$  为等截面轴的横截面积,  $l$  为等截面轴的长度,  $r$  为等截面轴单元的外径,  $EI$  为等截面轴的弯曲刚度.

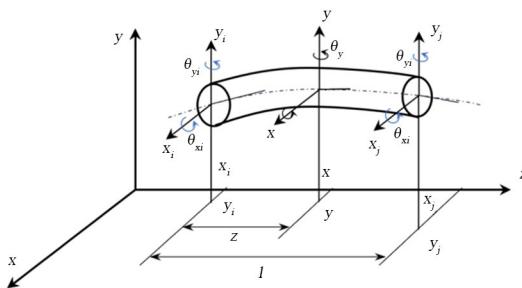


图 2 弹性轴端示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the elastic shaft end

### 1.3 支承约束单元

支承约束单元一般简化为各项异性的弹簧—质量—阻尼器模型, 将支承考虑为轴承与弹性支承的串联关系, 则其刚度大小为  $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$ , 其中  $k_1$  和  $k_2$  分别为轴承与弹性支承的刚度. 在计算中, 支承约束单元只考虑对系统的位移进行约束, 不考虑轴承座的质量, 则支承处的动力学方程为:

$$\mathbf{C}_b \dot{\mathbf{u}}_b + \mathbf{K}_b \mathbf{u}_b = 0 \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{u}_b = [x_i \ x_j \ y_i \ y_j]^T$ , 下标  $i$  和  $j$  分别代表支承左右两端连接的节点编号. 那么支承处的刚度矩阵与阻尼矩阵分别为:

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} k_x & -k_x & 0 & 0 \\ -k_x & k_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_y & -k_y \\ 0 & 0 & -k_y & k_y \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} c_x & & & \\ & c_x & & \\ & & c_y & \\ & & & c_y \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,  $k_x$  和  $k_y$  分别为支承在  $x$  和  $y$  方向上的支承

刚度,  $-k_x$  和  $-k_y$  分别为支承两方向上的耦合刚度,  $c_x$  和  $c_y$  则为两方向上的阻尼. 当一端支承为基础或地面时, 由于基础视为刚度无穷大, 即基础处的位移恒为 0, 而当支承为各向同性时则沿着两个方向的刚度将变为一致, 即  $k_x = k_y$ ,  $c_x = c_y$ .

## 2 偏置转盘转子系统能量计算

振动的传播使结构偏离平衡位置, 从而导致动能和势能发生改变, 机械能的改变是振动携带的振动能量在结构中传递的微观表现. 因此, 可以从机械能的角度来理解振动所带来传递的振动能量, 借助振动能量的变化分析整个系统的动力学特性.

对于某一轴端单元的截面位移可以用该单元结点的位移来表示, 同样的该单元的动能  $T_s$  和弯曲弹性势能  $V_s$  也可以表示为结点位移及结点速度的函数. 距离结点 A 的轴向距离  $a$  处, 截取一个厚度为  $da$  的微元, 可以得到微元的动能和弯曲弹性势能, 进而对于长为  $l$  的圆截面轴, 对上式沿单元进行全长积分, 可以得到该单元的动能和弹性势能, 如式(14)~(17):

$$dT_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^T (\mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} + j_d \dot{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{N}}) \dot{\mathbf{u}}_1 da + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_2^T (\mu \mathbf{N}^T \mathbf{N} + j_d \dot{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{N}}) \dot{\mathbf{u}}_2 da + j_p \Omega \dot{\mathbf{u}}_1^T \dot{\mathbf{N}}^T \dot{\mathbf{N}} \mathbf{u}_2 da + \frac{1}{2} j_p \Omega da \quad (14)$$

$$dV_s = \frac{1}{2} EI (\mathbf{u}_1^T \ddot{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{N}} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2^T \ddot{\mathbf{N}}^T \ddot{\mathbf{N}} \mathbf{u}_2) da \quad (15)$$

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^T (\mathbf{M}_{zT} + \mathbf{M}_{zR}) \dot{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_2^T (\mathbf{M}_{zT} + \mathbf{M}_{zR}) \dot{\mathbf{u}}_2 + \Omega \dot{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{J}_z \mathbf{u}_2 + \frac{1}{2} j_{ps} \Omega^2 \quad (16)$$

$$V_s = \frac{1}{2} \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_z \mathbf{u}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_z \mathbf{u}_2 \quad (17)$$

其中,  $j_{ps} = j_p l$ .

转子系统的振动能量为动能与势能,对于不计陀螺力矩时,即  $J_z = 0$ ,动能  $T_s$  化为:

$$T_s = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_1^T (\mathbf{M}_{zT} + \mathbf{M}_{zR}) \dot{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_2^T (\mathbf{M}_{zT} + \mathbf{M}_{zR}) \dot{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{2} j_{ps} \Omega^2 \quad (18)$$

由此可见,在相同的条件下,考虑陀螺力矩的情况与忽略陀螺力矩的情况,转子系统的振动能量是存在差异的。根据转盘偏置所引起的陀螺效应对转子系统的振动能量的差异,分析整个系统的动力学特性,可以优化设计参数,改善系统的能量转换效率,提高系统性能。

### 3 陀螺效应对偏置转盘转子系统动力学的影响

#### 3.1 陀螺效应对偏置转盘转子系统一阶临界转速的影响

为研究转盘偏置引起的陀螺效应对转子系统动力学特性的影响,选取如表 1 所示的仿真参数。建模过程中,转轴分为 14 个单元、15 个节点,模型两端的两支点 A、B 分别位于节点 1 和节点 15 处,同时自左支点 A 开始为原点,如图 3 所示。同时定义转盘偏置率  $\beta$  为:

$$\beta = \left| 1 - \frac{2x}{l} \right| \times 100\% \quad (19)$$

式中,  $x$  为转盘的位置,  $l$  为转轴的长度。

表 1 偏置转盘转子系统的参数  
Table 1 Parameters of the offset turntable rotor system

Structural parameters	Turntable quality/kg	Turntable diameter/m	Hinge radius/m	Hinge length/m	Support stiffness/(N/m)	Elastic modulus/Pa	$e/m$	Bending stiffness/(N/m)
Value	0.85	$8.2 \times 10^{-2}$	0.01	0.5	$5 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{11}$	$5 \times 10^{-4}$	$6.5 \times 10^6$

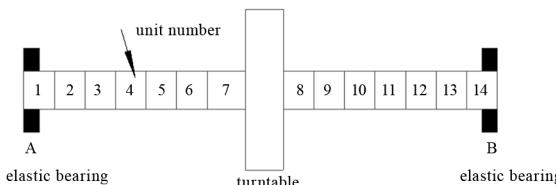
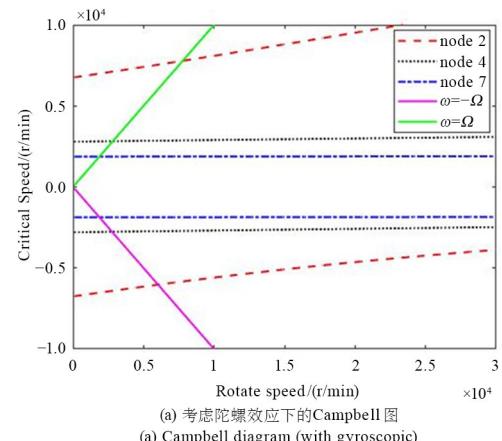


图 3 转子系统有限元模型

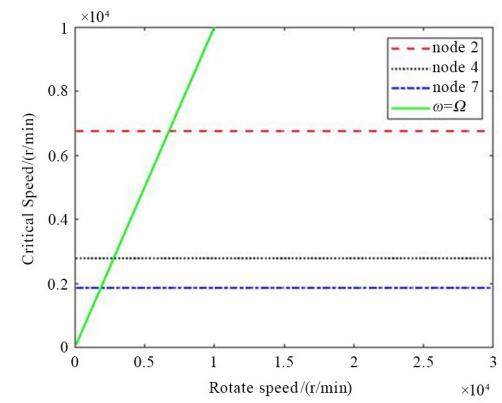
Fig. 3 Finite element model of the rotor system

利用以上参数对转子系统进行建模计算,分别选取转盘位于节点 2、节点 4 以及节点 7 的位置,分别作出这三种位置情况下的 Campbell 图,如图 4 所示,其中图 4(a)的 Y 轴以上为考虑陀螺效应时转子系统同步正向涡动一阶临界转速,Y 轴以下为转子系统反向同步涡动一阶临界转速;图 4(b)为不考虑陀螺效应时转子系统的一阶临界转速。当转盘位于节点 2 时,不考虑陀螺效应时转子系统的一阶临界转速为 7268.7 r/min,考虑陀螺效应时转子系统反向同步涡动一阶临界转速为 6489.5 r/min,转子系统同步正向涡动一阶临界转速为 8367.7 r/min。当转盘位于节点 4 时,不考虑陀螺效应时转子系统的一阶临界转速为 3045.1 r/min,考虑陀螺效应时转子系统反向同步涡动一阶临界转速为 3015.7 r/min,转子系统同步正向涡动临界转速为 3074.7 r/min。当转盘位于节点 7 时,不考虑陀螺效应时转子系统的一阶临界转速为 2103.3 r/min,考虑陀螺效应时转子系统反向同步涡动一阶临界转速为

2102.7 r/min,转子系统同步正向涡动临界转速为 2103.9 r/min。由此可以得知转盘偏置的位置不



(a) 考虑陀螺效应下的Campbell图  
(a) Campbell diagram (with gyroscopic)



(b) 不考虑陀螺效应下的Campbell图  
(b) Campbell diagram (without gyroscopic)

图 4 转盘在不同位置下的 Campbell 图  
Fig. 4 Campbell diagram under turntable in different positions

同,由此引起的陀螺效应对转子系统一阶临界转速的影响不同,考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的一阶临界转速的偏差存在不同.

同时计算考虑陀螺效应时转子系统的正向涡

动一阶临界转速和反向涡动一阶临界转速以及忽略陀螺效应时转子系统的一阶临界转速,所得到的数据如表2所示,表中考虑陀螺效应的一阶临界转速为正向涡动一阶临界转速.

表2 陀螺效应对一阶临界转速的影响  
Table 2 Effect of the gyroscopic effect on the first-order critical speed

Node	Bias rate	First-order critical speed (with Gyroscopic effect)/(r/min)	First-order critical speed (without Gyroscopic effect)/(r/min)	Relative rate of change
2	85.7%	8367.7	7268.7	13.130%
4	57.1%	3074.7	3045.1	0.962%
7	14.2%	2103.9	2103.3	0.028%

根据计算的结果研究,转盘偏置所引起的陀螺效应对转子系统一阶临界转速影响规律如图5所示.转盘偏置程度越大,转盘偏置所引起的陀螺效应对转子系统一阶临界转速影响越大.当转盘位于转轴中央时偏置率为0,也就是节点8时,式(13)退化为式(15),忽略陀螺效应与考虑陀螺效应的一阶临界转速相对变化率为0,即转盘位于转轴中央时陀螺效应对一阶临界转速没有影响.当转盘位于节点1~8之间时考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的一阶临界转速相对变化率逐渐减小,而转盘位于节点8~15之间时考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的一阶临界转速相对变化率逐渐增大,转盘位于节点1~15之间时,一阶临界转速相对变化率呈现以转轴中央对称分布的现象.从图5可知,当偏置率小于60%时,固有频率变化不大,只有大于60%时才急剧上升.

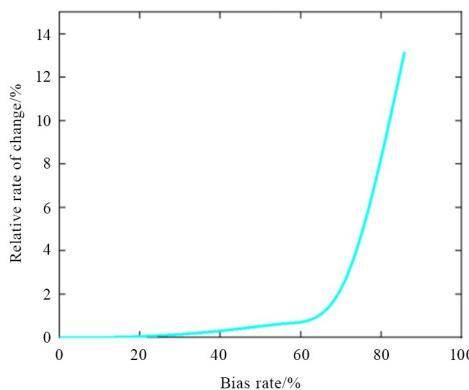


图5 不同节点位置,忽略与考虑陀螺效应的一阶临界转速的相对变化率

Fig. 5 The relative rate of change of the first-order critical speed at different node positions is ignored and the gyroscopic effect is considered

### 3.2 陀螺效应对偏置转盘转子系统不平衡响应的影响

在转子系统不平衡振动响应计算时,要考虑到

阻尼因素的存在,引入系统阻尼和转盘质量的不平衡力,转子系统的运动方程式可以改写为如下形式:

$$\mathbf{M}_z \ddot{\mathbf{u}} + \Omega \mathbf{J}_z \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \mathbf{u} + \mathbf{K}_z \mathbf{u} = \mathbf{Q}_z \quad (20)$$

其中  $\mathbf{C}$  为系统阻尼矩阵. 系统阻尼矩阵  $\mathbf{C}$  采用瑞利阻尼来假设计算,即

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (21)$$

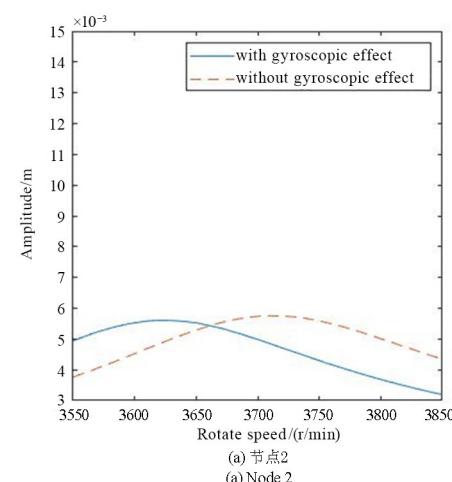
式中

$$\alpha = 2 \left( \frac{\xi_2}{\omega_2} - \frac{\xi_1}{\omega_1} \right) / \left( \frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right) \quad (22)$$

$$\beta = 2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1) / (\omega_2^2 - \omega_1^2) \quad (23)$$

式中,  $\omega_1, \omega_2$  分别是转子系统不计陀螺效应时的第一、第二固有频率,  $\xi_1, \xi_2$  分别对应两个固有频率的阻尼系数,在这里可以分别取作 0.05、0.08<sup>[6]</sup>.

选取偏心距为  $5 \times 10^{-4}$  的转盘,针对转盘位于节点2、节点4以及节点7的三种情况,分别作出转子系统的转速—幅值图,如图6所示.当转盘的位置从节点2变化到节点7时,考虑陀螺效应与忽略陀螺效应时的转速—幅值曲线有不同程度的变化,转盘偏置的程度越大,振动响应的幅值—转速曲线



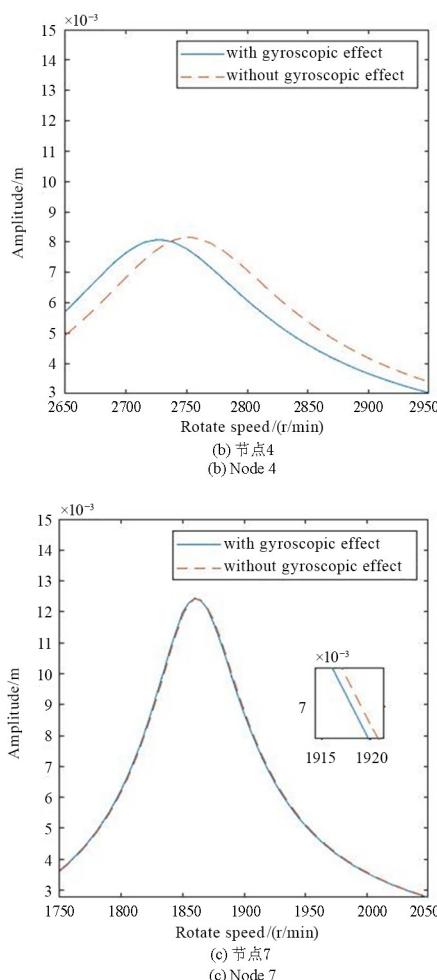


图 6 转盘位于不同节点位置转速—幅值

Fig. 6 The turntable is located at different node positions, and the speed-amplitude

的偏置程度也就越大,即转盘偏置所引起的陀螺效应对转子系统的振动响应越大。同时,随着转速的增大,当转速超过某一值时,忽略陀螺效应的情况下幅值相比于考虑陀螺效应的情况下的幅值较大,且两者的幅值随着转速的增加相互靠近。

## 4 陀螺效应对偏置转盘转子系统能量的影响

### 4.1 陀螺效应对偏置转子系统的应变能的影响

由上节的图例分析可知,转盘偏置所引起的陀螺效应对转子系统的动力学特性具有一定的影响,但可见的差异不大。而系统的动力学响应与能量的转换之间存在一定的关系,例如,当转子系统受到外部载荷作用时,其动力学响应会影响能量的转移和消耗。为此,可以引入能量方法来研究陀螺效应对转子系统的影响。转子系统的应变能会因为转轴的变形而变形,这意味着结构应变能包含了整个振

动过程的动态信息,因此可以利用应变能来研究陀螺效应对转子系统的影响。

根据材料力学相关理论,对于弯曲应变能,在受到外力  $F$  的作用下产生变形,结构内部的弯曲变形能量的表达式为

$$V_b = \frac{1}{2} k \Delta l^2 \quad (24)$$

式中,  $\Delta l$  为单元在受力状态下的变形量,  $k$  为对应的结构单元的弯曲刚度。

本文的转子模型主要承受弯曲变形,因此根据以上表达式中各分量对应的意义,转子系统的弯曲应变能表达式的矩阵形式为

$$\mathbf{E}_b = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K}_b \mathbf{u} \quad (25)$$

式中  $\mathbf{u}$  为转子单元的横向位移,  $\mathbf{K}_b$  为单元横向刚度。

定义应变能变化率函数  $y$  为

$$y = \frac{y_i}{y_j} = \epsilon f(x) \quad (26)$$

式中,  $y_i$  与  $y_j$  分别为在不同转速下考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的应变能变化率,  $i, j$  为转速浮动的范围,  $|i| < |j|$ ,  $x$  为转盘的偏置率,  $f(x)$  是与  $x$  有关的函数,  $\epsilon$  为应变能变化率因子。

分别作出转盘不同偏置率时,不同转速下,考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的应变能变化率曲线,根据上文结果,可选择分别为考虑陀螺效应时转盘位于各偏置率位置时的一阶临界转速(下文简称为一阶临界转速)浮动±5%和±10%的转速,  $y_1$  与  $y_2$  分别为一阶临界转速浮动−5%和+5%时的应变能变化率曲线,  $y_3$  与  $y_4$  分别为一阶临界转速浮动−10%和+10%时的应变能变化率曲线。

以方程  $y = a e^{(bx+c)}$  为模型拟合该四条曲线,拟合结果如表 3 所示。根据表中数据计算可得,取  $y_1$  与  $y_3$  两条曲线,  $y_i$  与  $y_j$  转速小于一阶临界转速时,

$$f(x) = e^{0.02(8-7x)}, \quad \epsilon \in (1.28, 1.44) \quad (27)$$

取  $y_2$  与  $y_4$  两条曲线,  $y_i$  与  $y_j$  转速大于一阶临界转速时,

$$f(x) = e^{-0.055(8-7x)}, \quad \epsilon \in (1.92, 2.02) \quad (28)$$

过大的应变能可能导致转子系统的结构失效风险增加,特别是在高负荷或频繁振动的工况下,可能导致材料疲劳、裂纹扩展或变形超过允许范

围,最终导致转子系统的损坏或失效.因此可以利用该函数来计算,当转速在一阶临界转速浮动

±5%和±10%变化时,由于转盘偏置而引起的陀螺效应对应变能的具体影响.

表3 一阶临界转速浮动±5%和±10%时的曲线拟合结果

Table 3 The curve fitting results of the first order critical speed when the speed floating ±5% and ±10%

Fit parameters	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$a$	0.121 ± 0.003	-0.682 ± 0.008	0.089 ± 0.003	-0.345 ± 0.005
$b$	0.725	0.975	0.705	1.030
$c$	0	-3	0	-3
Reduced Chi-Sqr	1.03	0.99	1.01	1.06
$R^2$	0.99	0.99	0.98	0.99
Adjusted $R^2$	0.99	0.99	0.98	0.99

同时由图7可定性分析,当转速小于一阶临界转速时,考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的应变能变化率大于0,即考虑陀螺效应的应变能大于忽略陀螺效应的应变能,转速大于一阶临界转速时,情况反之;而偏置程度越大,偏离一阶临界转速的程度越小,考虑陀螺效应与忽略陀螺效应的应变能变化率越大.

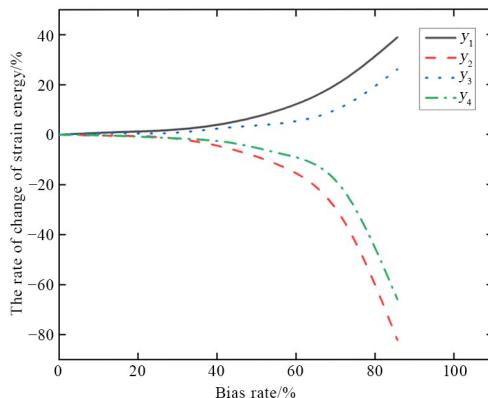


图7 考虑陀螺效应与忽略陀螺效应时,  
不同节点位置的应变能变化率

Fig. 7 When considering the gyroscopic effect and ignoring  
the gyroscopic effect, the strain energy change rate at  
different node positions

#### 4.2 陀螺效应对偏置转盘转子系统时均功率流的影响

通过应变能分析可以计算出不同转速下,转盘偏置引起的陀螺效应对转子系统的影响,但不够直观.在数值计算和工程实践中,对研究对象的振动水平的定量评估大多以振动加速度、位移等单一结构响应参量表示.实际上,结构的振动以波的形式存在并传播,振动波携带了力、位移和相位等信息,力和速度的变化导致了结构振动的改变,可见振动波在结构中的传播的本质是振动能量的传递.近年

来,部分学者们将物理学中的功率的概念移植到振动分析领域,提出了一种振动功率流方法.因此引入此方法进行能量的分析.

功率即单位时间所做的功,在多自由度的系统中,目标位置处受力定义为  $F_i$ ,用公式可以表示为<sup>[15]</sup>:

$$P_i = F_i \cdot V_i \cdot \cos(\omega t) \quad (29)$$

则功率流表达式可以表示为:

$$P_i = \frac{1}{T} \int_0^T F \cdot V \cdot \cos(\omega t) dt \quad (30)$$

同样地,在有限元分析中,通过各单元的求解,平均功率流(时均功率流)可以表示为<sup>[16]</sup>:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{i=1}^n P_i(t) dt \quad (31)$$

时均功率流描述了在系统中能量的平均传递速率,当时均功率流较大时,系统中能量的转移和利用更为频繁和密集.根据上文分析,转盘偏置所引起的陀螺效应对影响转子系统振动响应特性,而功率流分析方法对系统的结构或参数的改变十分敏感,基于此,本节设置不同的转盘偏置程度,计算对应的时均功率流曲线来分析转盘偏置所引起的陀螺效应对系统振动响应特性的影响.

根据以上分析可知,转盘偏置所引起的陀螺效应对转子的能量有所影响.在转子结构参数不变的情况下,分析不同的转盘偏置程度所引起的陀螺效应对转子系统时均功率流的具体影响,作出不同偏置率的转子系统时均功率流曲线,如图8所示.通过时均功率流曲线的对比,转子系统的时均功率流响应都在其一阶临界转速处出现峰值,这是由于共振情况下系统会出现大幅度的振动,这时的振动能

量也出现极大值。偏置程度不同,时均功率流曲线出现不同程度的偏移。当转盘的位置逐渐靠近转轴中央,转子系统的时均功率流与一阶临界转速逐渐减小,在转速 2000 r/min 以内,时均功率流对转盘偏置引起的陀螺效应更加敏感。当转盘位于节点 2 和节点 3 时,转子系统的时均功率流的幅值较其他节点的时均功率流曲线的幅值增大 1 倍以上;当转盘位于节点 4 时,转子系统的时均功率流的幅值较节点 7、节点 6 以及节点 5 的时均功率流曲线的幅值的增大均小于 1 倍,且涨幅随着转盘偏置的程度的增大而增大,说明转盘偏置程度越大,陀螺效应所引起能量变化越大。在转速较小的情况下,适当的偏置设置可以改善转子系统的振动能量。

综合 4.1 和 4.2 节可知,应变能变化率可以反映转子弹性变形对转盘偏置的敏感度,时均功率流变化率可以反映系统能量传输效率对转盘偏置的敏感度,通过对图 7 和图 8(b)可知,随着转盘偏置程度的增大,时均功率流变化率高达 600%,由此可以得出时均功率流对转盘偏置程度更为敏感。

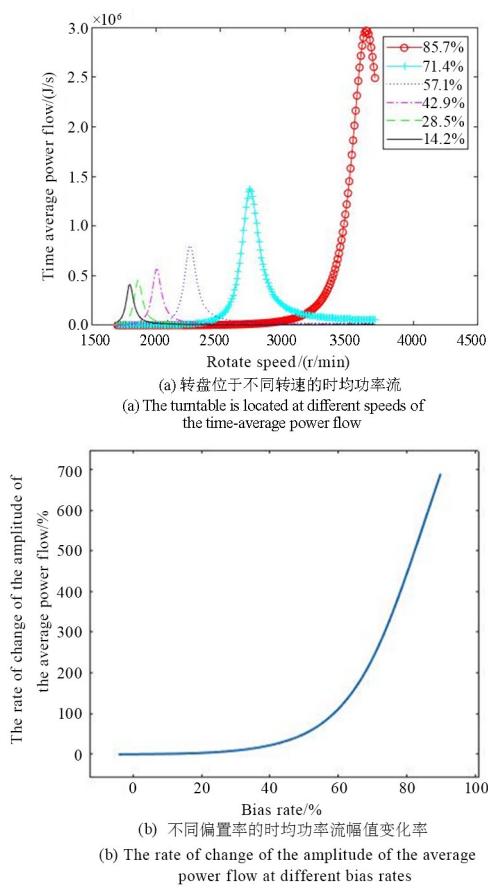


图 8 不同偏置率的转子系统时均功率流  
Fig. 8 Uniform power flow for rotor systems with different bias rates

## 5 结论

本文提出了一种应变能变化率函数,利用该函数可以具体计算转盘偏置引起的陀螺效应对应变能的影响。基于所建立的偏置转盘转子系统模型进行数值仿真和计算比较,得出了以下结论:

(1)考虑陀螺效应和忽略陀螺效应所引起的动力学特性存在很大的偏差,转盘偏置程度越大,一阶临界转速与振动幅值的偏差也就越大,偏置程度大于 60%时,固有频率变化急剧升高。

(2)转速小于一阶临界转速时,随着偏置率增大,考虑陀螺效应的应变能曲线振幅与忽略陀螺效应的应变能变化率增大;转速大于一阶临界转速时,随着偏置率增大,考虑陀螺效应的应变能曲线振幅与忽略陀螺效应的应变能变化率减小。

(3)偏置程度越大,转子系统的时均功率流曲线的涨幅随着偏置程度的增大而增大,时均功率流对转盘偏置程度更为敏感。不同的要求下,转盘偏置的设置可以适当地改善转子系统的振动能量。

## 参考文献

- [1] ZHANG Y Y, BIN G F, XU Y D, et al. Study on vibration suppression of an aero-engine rotor system with adjustable oil film thickness driven by piezoelectric actuator through critical speed [J]. Tribology International, 2024, 193: 109447.
- [2] 陈恩利, 何田, 郑猛, 等. 滚动轴承—转子系统支承松动时的复杂运动研究[J]. 动力学与控制学报, 2004, 2(4): 49–55.
- CHEN E L, HE T, ZHENG M, et al. Study on complicated motions of roll element bearing-rotor system with pedestal looseness [J]. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(4): 49–55. (in Chinese)
- [3] 梁明轩, 袁惠群. 滚动轴承—柔性碰摩转子系统非线性动力学响应分析[J]. 动力学与控制学报, 2013, 11(2): 153–158.
- LIANG M X, YUAN H Q. Nonlinear dynamic response on rotor system of ball bearing-flexible rub [J]. Journal of Dynamics and Control, 2013, 11(2): 153–158. (in Chinese)
- [4] 沈易霏, 韩邦成, 郑世强. 非对称大惯量刚性磁悬浮高速转子陀螺效应自适应抑制方法研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(22): 72–79.

- SHEN Y F, HAN B C, ZHENG S Q. Adaptive suppression of the gyroscopic effect of rigid asymmetric magnetically suspended high-speed rotor with large inertia [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(22): 72—79. (in Chinese)
- [5] CAO J W, LUO Y Y, LIU X, et al. Numerical theory and method on the modal behavior of a pump-turbine rotor system considering gyro-effect and added mass effect [J]. Journal of Energy Storage, 2024, 85: 111064.
- [6] 王美令, 韩清凯. 转盘偏置对转子系统动力学特性的影响研究[J]. 动力学与控制学报, 2011, 9(3): 238—242.
- WANG M L, HAN Q K. Research on the effect of offset disc on dynamic characteristics of rotor system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2011, 9 (3): 238—242. (in Chinese)
- [7] LIANG M X, YAN T H, HU J H, et al. Effect of rolling bearing parameters on the nonlinear dynamics of offset rotor [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2020, 234(15): 2968—2978.
- [8] DEWI D K, ABIDIN Z, BUDIWANTORO B, et al. Gyroscopic effect on a scaled rotor-bearing system [J]. Journal of Vibration and Control, 2023, 29 (13/14): 3137—3149.
- [9] YANG D L, HUANG X R. Nonlinear modal analysis of rotor systems considering gyroscopic and dry friction effects [J]. Journal of Vibration and Control, 2023, 29(11/12): 2623—2633.
- [10] 运侠伦, 梅雪松, 姜歌东, 等. 辨识主轴转子系统能量传递特性的矢量匹配平衡方法研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(10): 138—142, 168.
- YUN X L, MEI X S, JIANG G D, et al. Vector matching balance method for identifying the energy transfer characteristics of a spindle rotor system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(10): 138—142, 168. (in Chinese)
- [11] 马英群, 徐蒙, 张锴, 等. 基于结构声强法的机匣振动能量传递特性[J]. 航空学报, 2019, 40(9): 222938.
- MA Y Q, XU M, ZHANG K, et al. Vibration energy transmission characteristics of casing based on structural intensity method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2019, 40(9): 222938. (in Chinese)
- [12] MA Y Q, ZHAO Q J, ZHAO W, et al. Intrinsic physical relationships between rotor modal shapes and instantaneous vibrational energy flow transmission characteristics: Theoretical and numerical analysis and application [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(12): 3288—3305.
- [13] QIAO B J, ZHAO T, CHEN X F, et al. The assessment of active vibration isolation performance of rotating machinery using power flow and vibrational energy: Experimental investigation [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 230(2): 159—173.
- [14] DAI W, YANG J, WIERCIGROCH M. Vibration energy flow transmission in systems with Coulomb friction [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 214: 106932.
- [15] GOYDER H G D, WHITE R G. Vibrational power flow from machines into built-up structures, part I: Introduction and approximate analyses of beam and plate-like foundations [J]. Journal of Sound and Vibration, 1980, 68(1): 59—75.
- [16] ZHANG X T, YANG Y F, MA H, et al. A novel diagnosis indicator for rub-impact of rotor system via energy method [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 185: 109825.