

弹性支承下裂纹转子的非线性能量特性研究^{*}

张显涛^{1,2†} 张昊阳³ 王松² 杨永锋¹ 韩勤锴²

(1. 西北工业大学 振动工程研究所, 西安 710072)

(2. 清华大学 机械系, 北京 100084)

(3. 哈尔滨工业大学(威海) 海洋工程学院, 威海 264209)

摘要 在高速旋转、长期运行和交变载荷等恶劣工况下工作的转子系统容易发生裂纹故障, 这会对运行稳定性构成威胁。裂纹故障引起转子的振动变化反映了外力自驱动点通过转轴向系统传递能量的过程出现异常。因此, 基于振动功率流方法来研究在裂纹故障影响下的弹性支承悬臂转子, 结果揭示了在裂纹引发转子产生异常振动响应背后的能量特性。此外, 研究了高转速区域随着转速出现非线性分岔时, 裂纹转子系统的振动能量变化情况, 得到了在准周期与多周期相互转化的过程中会引发能量曲线振荡的结论。

关键词 裂纹转子, 非线性, 动力学响应, 故障特征, 振动能量

中图分类号: TH133.2

文献标志码: A

Research on Nonlinear Energy Characteristics of Cracked Rotor System with Elastic Supports^{*}

Zhang Xiantao^{1,2†} Zhang Haoyang³ Wang Song² Yang Yongfeng¹ Han Qinkai²

(1. Institute of Vibration Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

(3. College of Ocean Engineering, Harbin Institute of Technology, Weihai 264209, China)

Abstract Rotor systems operating under harsh conditions, such as high-speed rotation, long-term operation, and alternating loads, are susceptible to crack faults that pose a threat to operational stability. The vibration resulting from crack faults in rotor systems reflect the abnormal process of energy transmission from the external driving point through the shaft. Therefore, employing the vibration power flow method, this study investigates elastically supported cantilevered rotors under the influence of crack faults to reveal the underlying energy characteristics. Furthermore, examining vibrational energy variations in cracked rotor systems within high-speed regions during nonlinear bifurcation reveals that energy curves oscillate during quasi-periodic and multi-periodic transitions.

Key words cracked rotor, nonlinear, dynamic response, fault characteristics, vibration energy

引言

转子系统作为航空发动机、燃气轮机、压气机、发电机等旋转机械的关键部件,在能量输出中起着举足轻重的作用.高速、长期运行使轴容易产生疲劳裂纹,这些问题对旋转机械的安全运行构成了严重威胁^[1,2].研究裂纹对转子系统动态特性和响应的影响,可以为转子系统的设计和故障分析提供理论指导.

裂纹故障的发生会导致局部刚度降低,从而对转子的运行产生非线性影响.在裂纹转子动态特性研究领域,学者们进行了广泛的研究并取得了重要的发现. Han 等^[3]研究了裂纹转子系统的呼吸现象. Rafath 等^[4]发现裂纹转子系统是否存在内环轨道并不一定取决于亚临界转速. Xiong 等^[5]分析了影响裂纹转子动力学特性的不同参数(定向角、不平衡定向角、裂纹深度). Zhou 等^[6]研究了裂纹转子一轴承系统的稳定性,发现呼吸裂纹模型的存在导致不平衡区域明显大于常开裂纹模型. 李姚等^[7]研究了松动一裂纹耦合对转子系统的影响,并发现裂纹角会显著影响转子的临界转速和分岔特性. Wang 等^[8]提出了刚体单元法建立含裂纹故障的转子一轴承系统,并对其振动响应进行了分析. Cao 等^[9]利用声流固耦合方法对水轮机裂纹故障的发生进行了研究. 此外,路振勇^[10]、焦卫东^[11]以及 Liu^[12]等人针对裂纹深度、裂纹倾斜角以及不同裂纹模型对转子系统非线性响应以及动力学特性的影响进行了研究. 其他学者们针对转子裂纹故障也提出了多种诊断方法^[13-16],例如叶端定时、小波包分解以及经验模态分解等,能够准确识别系统出现的裂纹故障. 尽管裂纹转子的研究已经得到了许多重要结论,并且主要集中在研究裂纹对转子动力特性和响应特性的影响,但仍存在需要进一步研究的问题.

振动是能量传递过程中产生的宏观现象,从能量角度研究结构振动可以揭示各种现象背后的机制,为进一步研究提供有价值的指导. 在基于能量法进行振动分析方面, Zhu 等^[17,18]基于波动方程和振动功率流分析方法,得到了裂纹深度和裂纹位移对结构能量的影响规律. Samet 等^[19]提出了基于简化能量法的方法,旨在识别耦合板结构在高频振动下的振动源. 高原等^[20]基于非线性能量汇研究

了系统的减振效果. Al Ba'ba'a 等^[21]提出了一种基于振动功率流的振动能量传递评价新方法. 王锦涛等^[22]研究了非线性耦合振子之间存在的能量传递现象,并得到了完全能量传递时临界质量和系统初始能量之间的关系. Gomez 等^[23]发现 $3\times$ 谐波信号适用于故障检测的逆过程,并利用小波包变换得到的能量来研究裂纹故障. Bai 等^[24]基于应变能理论原理开发了一种陶瓷球轴承裂纹识别和评估方法. Dai 等^[25,26]研究了库仑摩擦作用下动力系统的能量传递和振动能量特性. Ma 等^[27,28]将数值模拟方法与结构强度法相结合,研究了转子机匣振动能量的瞬时分布和传递特性. 目前,振动能量法已经得到了广泛的研究,但现有文献主要集中在低自由度系统以及运动模式相对单一的结构,针对裂纹转子在多种复杂工况下的能量特性及其传递机制的相关研究尚存在不足.

本文中,我们采用能量方法中的振动功率流法研究裂纹转子系统,探讨非线性因素引起的能量响应和能量特性. 首先建立弹性支承条件下裂纹转子的有限元方程,研究了由裂纹引起的典型故障响应的能量特性. 最后,得到了裂纹对转子系统振动能量传递的影响.

1 理论模型

1.1 裂纹转子有限元模型

带有横向裂纹的简化转子系统示意图如图 1 所示. 模型分为刚性盘、转轴和弹性支承,采用有限元法建立系统理论模型,并得到了转子系统的动力学方程.

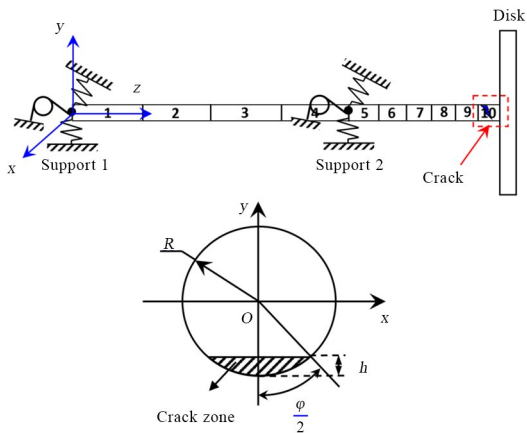


图1 裂纹转子模型及裂纹轴截面示意图
Fig. 1 Model of the cracked rotor and schematic representation of the cross-section

裂纹在转子涡动过程中会周期性的产生开一闭现象,采用时变单元刚度矩阵来表示裂纹截面的影响,选择呼吸模型中的余弦模型来模拟裂纹的开闭过程.

$$f(t) = \frac{[1 + \cos(\omega t)]}{2} \quad (1)$$

将刚度损失与裂纹呼吸函数相结合,可以得到裂纹单元的时变刚度矩阵 $\mathbf{K}_{\text{crack}}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{crack}} &= \mathbf{K} - f(t)\mathbf{K}_{\text{loss}} \\ &= (\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{K}_{\text{loss}}) - \frac{1}{2}\cos(\omega t)\mathbf{K}_{\text{loss}} \end{aligned} \quad (2)$$

对于包含 n 个单元和 $n+1$ 个节点的裂纹转子系统,建立了含呼吸裂纹转子系统的动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + (\mathbf{C} + \omega\mathbf{G})\dot{\mathbf{u}}(t) + \\ \left[\mathbf{K} - \frac{1}{2}\mathbf{K}_{\text{loss}} - \frac{1}{2}\cos(\omega t)\mathbf{K}_{\text{loss}} \right] \mathbf{u}(t) = \mathbf{Q}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{K}_{\text{loss}}$ 分别为转子系统的质量矩阵、阻尼矩阵、陀螺矩阵、刚度矩阵、裂纹完全打开时裂纹单元的刚度损失矩阵. 阻尼采用 *Rayleigh* 阻尼模型,可写成 $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$, α 和 β 为 *Rayleigh* 阻尼系数,具体建模过程及相关参数选择可参考文献[29]. 外力矩阵 $\mathbf{Q}(t)$ 可以表示为:

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_1 \cos(\omega t) + \mathbf{F}_2 \sin(\omega t) \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_g = [0, \dots, 0, mg, 0, \dots, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_1 = [0, \dots, 0, me\omega^2, 0, \dots, 0]^T$$

$$\mathbf{F}_2 = [0, \dots, 0, -me\omega^2, 0, \dots, 0]^T \quad (5)$$

其中 m 为转盘质量, e 为转盘的质量偏心. 外力项的位置与转盘所在单元的节点号相对应.

表 1 裂纹转子系统非线性响应计算参数

Table 1 Parameters for the nonlinear response analysis of the cracked rotor system

Parameter	Symbol	Value
Disk mass	m	0.8 kg
Eccentricity of disc mass	e	5×10^{-4} m
Disk diameter	d_r	80×10^{-3} m
Shaft length	L	0.600 m
Shaft diameter	d	10×10^{-3} m
Young's modulus	E	2.1×10^{11} Pa
Support 1 # transverse stiffness	$K_{x1} K_{y1}$	5×10^6 N/m
Support 2 # transverse stiffness	$K_{x2} K_{y2}$	5×10^6 N/m
Crack depth	h	2×10^{-3} m

采用数值方法求解动力学方程,结构参数具体如表 1 所示. 理论计算中,无裂纹故障转子系统的第一临界转速为 2212 r/min,第二临界转速为 9746 r/min. 转子系统的坎贝尔图与振型结果如图 2 所示.

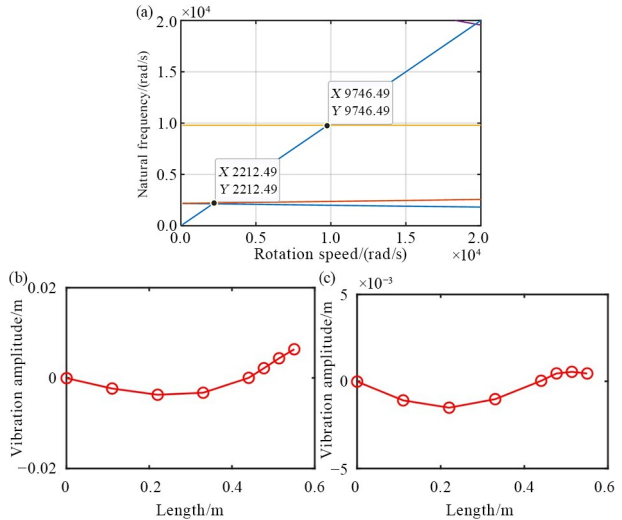


图 2 完整转子系统的坎贝尔图及振型:(a)坎贝尔图;

(b)一阶振型;(c)二阶振型

Fig. 2 Campbell diagram and mode of the rotor system without crack: (a) Campbell diagram; (b) First-order mode; (c) Second-order mode

1.2 振动能量方法

在振动的常规动力学分析中,通常采用单一物理量来衡量系统出现的振动,例如外力、位移、速度或者加速度等. 由于能量传递的宏观表现为结构出现振动,采用上述传统的单一物理量并不能完全表征出振动的特性. 对于裂纹转子的振动,其本质属于受迫振动,即结构在受到外力作用后会打破原本的运动状态,而激发的振动以波的形式在结构内部传导. 当振动传递至结构的某处时,会引发结构出现不同速度的运动变化. 因此,力和速度的变化导致了结构内部振动功率的变化,并且通过综合考虑它们之间的关系,能够准确描述某个状态下的外力对系统的影响^[30].

裂纹转子系统的位移表达式如下:

$$u(x) = A_k + \sum_{i=1}^n [A_{ik} \cos(\omega t) + B_{ik} \sin(\omega t)] \quad (6)$$

系统在受到外力激励时发生振动,外力引起的振动能量会不断地向远场传播. 振动功率流 P_i 是激励力 F_i 与目标点对应速度 v_i 的乘积.

$$P_i(t) = F_i(t) \cdot v_i(t) \quad (7)$$

对于存在裂纹故障的转子系统,外力引起的系

统瞬态功率流的一般表达式为:

$$P_i(t) = F_i(t) \cdot v_i(t) \\ = [F_g + F_1 \cos(\omega t) + F_2 \cos(\omega t)] \times u'(x) \quad (8)$$

本文采用选择时均功率流值 P_{ave} 作为裂纹故障的能量指标

$$P_{ave} = \frac{1}{T_t} \int_{t_0}^{t_0+T_t} P_i(t) dt \\ = \frac{1}{T_t} \int_{t_0}^{t_0+T_t} \{ [F_g + F_1 \cos(\omega t) + F_2 \cos(\omega t)] \times u'(x) \} dt \quad (9)$$

其中 T_t 为振动时间, t_0 为开始时间, ω 为转速.

2 裂纹影响下的转子振动能量响应

裂纹故障对转子系统的影响主要体现在向转轴刚度阵中引入了一个时变矩阵. 在运行过程中, 转轴裂纹面所受应力不断变化, 裂纹张开与关闭周期性出现, 给系统带来额外的非线性影响.

裂纹单元位于转盘附近, 保持转子系统的其他结构参数不变, 首先对比分析无裂纹以及裂纹深度为 2×10^{-3} m 的转子系统非线性响应, 两种不同裂纹参数下转子系统的位移分岔如图 3 所示. 通过对比分析可以发现, 裂纹故障仅在高转速区域产生较为显著的影响, 其中有两处表现尤为明显, 如图 3 (b) 中虚线框所示. 裂纹导致原系统在 2 倍临界转速区域附近产生超临界共振, 出现了倍周期分岔现象. 另外, 裂纹转子在转速大于 7000 r/min 时, 原本周期 1 的运动突然失稳, 出现了多周期以及拟周期运动. 而对于无裂纹转子, 系统的运动总会稳定在周期 1 的运动状态.

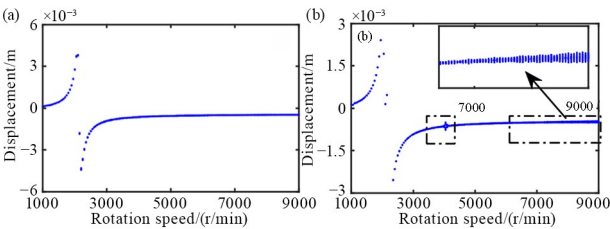


图 3 无裂纹转子与裂纹转子的位移分岔对比:

(a) 无裂纹; (b) 裂纹深度 2×10^{-3} m

Fig. 3 Comparison of displacement bifurcation between the rotor without crack and the cracked rotor: (a) No crack;

(b) Crack depth 2×10^{-3} m

2.1 1/2 临界转速区域

裂纹故障的呼吸效应会导致转子系统在转速

为 1/2 临界转速时发生超谐波共振. 图 4 显示了 600 r/min 至 2200 r/min 之间的位移和时均功率流响应. 在图 4 中, 如果转速达到约 1/2 临界转速 (1050 r/min), 位移曲线将显示局部最大值, 这与裂纹转子典型的振动特征相符. 然而, 由于裂纹深度较浅, 仅观察到振动幅度略有增加. 出现在发生亚谐波振动转速处的时均功率流值在图 4 (b) 中也显示出轻微的增加.

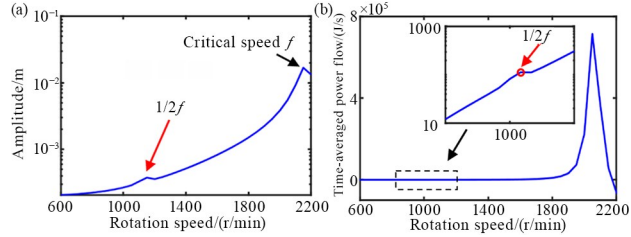


图 4 裂纹转子系统在 1/2 临界转速区的响应:

(a) 振动位移—转速; (b) 时均功率流—转速

Fig. 4 Response of the cracked rotor system at the 1/2 critical speed region: (a) Displacement-rotation speed curve;

(b) Time-averaged power flow-rotation speed curve

图 5 展示了 1/2 临界转速时裂纹转子瞬态功率流响应与同转速下无裂纹状态的对比. 可以看出, 无裂纹状态时, 转子的瞬态功率流响应处于稳定的变化趋势; 对于处于共振条件下的裂纹转子, 其瞬态功率流响应出现明显的振荡状态, 并且最大振幅明显高于无裂纹的状态.

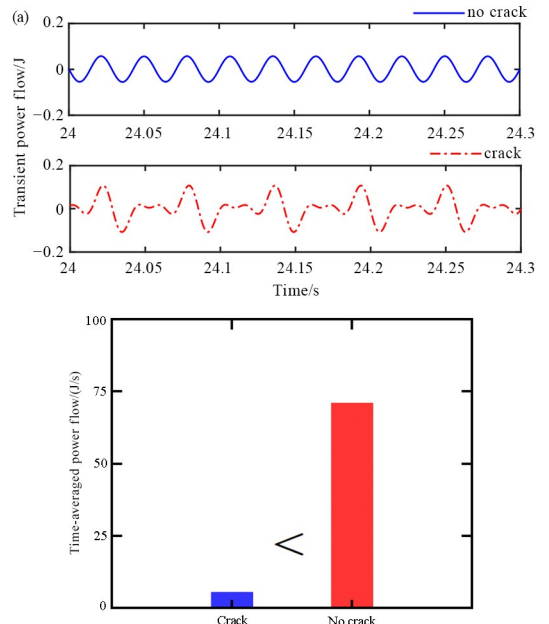


图 5 1/2 临界转速时, 裂纹转子与无裂纹转子功率流响应对比
Fig. 5 The vibration power flow response of the cracked rotor is compared with the rotor without crack at 1/2 critical speed

图 6 展示了 1/2 临界转速时不同状态下转盘处的轴心轨迹对比. 可以看出, 该状态下裂纹转子

的轨迹出现明显的变形,并且轨迹相较于无裂纹状态出现显著的增大.由此可以得到,共振导致裂纹转子的振动能量振荡并且幅值升高,引发转子的轴心轨迹出现变形,并且振幅增大.

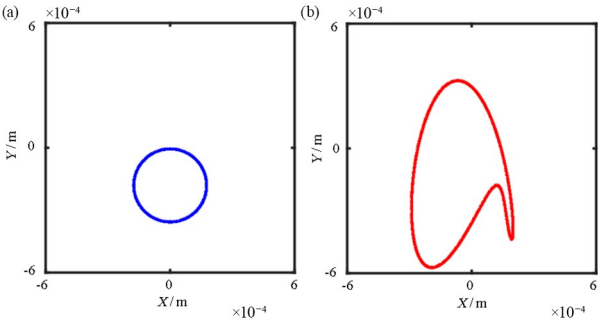


图 6 1/2 临界转速时不同状态下转盘轴心轨迹对比:
(a) 无裂纹转子; (b) 裂纹转子
Fig. 6 Comparison of disk whirl orbit in different states at 1/2 critical speed: (a) No crack rotor; (b) Cracked rotor

2.2 二倍临界转速区域

裂纹会导致转子在二倍临界转速附近产生亚谐波共振,进而使位移出现分岔现象,如图 7 所示.当转速接近 4050 r/min 时,位移会出现突然增大,分岔图显示转子运动从周期 1 转变为周期 2.如果转速超过 4050 r/min,位移会减小,运动状态逐渐恢复到周期 1.

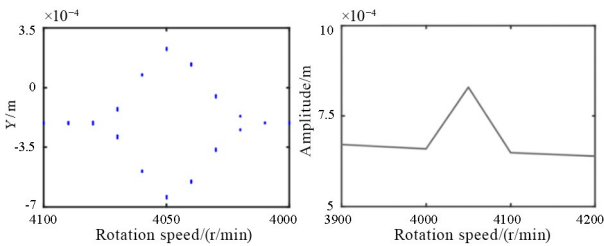


图 7 裂纹在二倍临界转速下引发转子共振:
(a) 位移响应; (b) 位移分岔
Fig. 7 The presence of the crack leads to rotor resonance occurring at twice the critical speed: (a) Displacement response; (b) Displacement bifurcation

图 8 为转速为 4050 r/min 时无裂纹转子与裂纹转子在转盘处的响应.可以看到,图 8(a)显示无裂纹转子的运行状态非常稳定,轴心轨迹呈现出一个标准的圆形,并且图 8(b)中相图及 Poincaré 截面同样显示了此时运动状态保持为周期 1.对于裂纹转子,此转速正好处于系统出现超临界共振状态,此时图 8(c)的轴心轨迹显示,稳态下的转子运行呈现出两个圆形轨迹,并且图 8(d)中相图及 Poincaré 截面也表明系统呈现出周期 2 的运动状态.对比该转速下呈现的两种状态,裂纹的产生导

致系统原本周期 1 的运动失稳而出现分岔的现象.

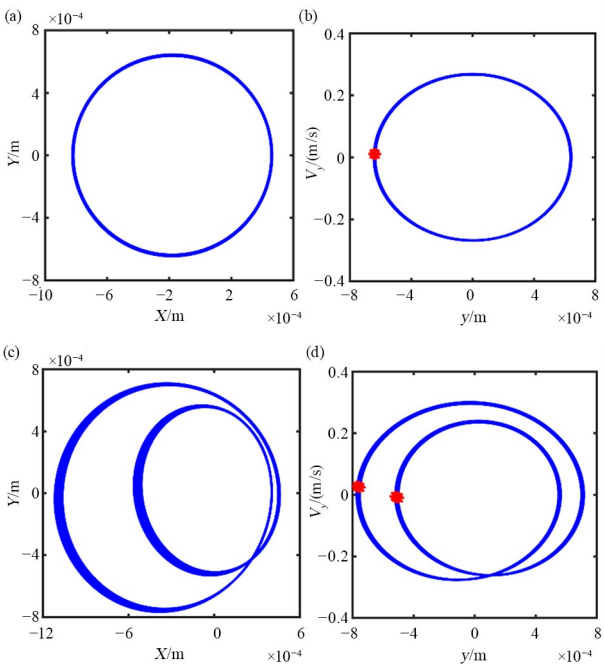


图 8 转速为 4050 r/min 时无裂纹转子与裂纹转子在转盘处的响应对比: (a) 无裂纹转子轴心轨迹; (b) 无裂纹转子相图及 Poincaré 截面; (c) 裂纹转子轴心轨迹; (d) 裂纹转子相图及 Poincaré 截面
Fig. 8 Response comparison between the rotor without crack and the cracked rotor at disk position when speed is 4050 r/min: (a) Whirl orbit of the rotor without crack; (b) Phase and Poincaré section of the rotor without crack; (c) Whirl orbit of the cracked rotor; (d) Phase and Poincaré section of the cracked rotor

通过计算得到上述两种不同状态下的转子瞬态功率流响应,如图 9 所示.图中可以看出,无裂纹转子在该转速下的瞬态功率流响应呈现出稳定的周期变化趋势,且每个周期内响应值相同.而对于裂纹转子,该转速下的瞬态功率流响应与无裂纹状态出现显著差异,尽管响应曲线保持周期变化的趋势,但裂纹转子的瞬态功率流响应的最大振幅区间明显大于无裂纹状态.

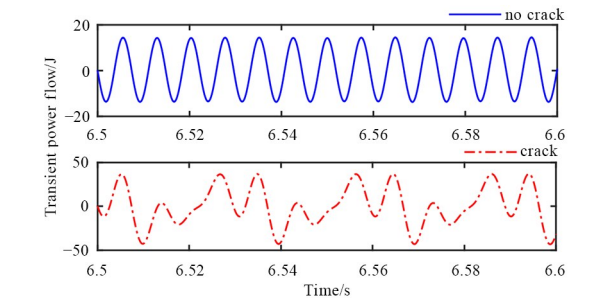


图 9 转速为 4050 r/min 时裂纹转子与无裂纹转子功率流响应对比
Fig. 9 The power flow response of the cracked rotor is compared with the rotor without crack at 4050 r/min

为了衡量此时裂纹故障影响下外力对转子系统的影响,同样采用上文提出的时均功率流方法进

行计算,结果如图 10 所示. 对比发现,尽管在此转速下裂纹转子的瞬态响应振幅大于无裂纹状态,但经过各指标的综合评价发现,处于周期 2 运动状态的裂纹转子能量略小于无裂纹状态. 结果表明,裂纹故障引发原转子系统出现倍周期分岔产生运动失稳,会使得外力能量产生小幅度的降低.

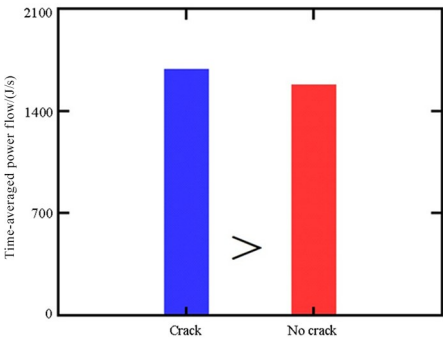


图 10 转速为 4050 r/min 时无裂纹转子与裂纹转子时均功率流对比
Fig. 10 Comparison of time-average power flow of the rotor without crack and the cracked rotor at 4050 r/min

2.3 高转速区域的准周期与多周期变化

图 11 为不同裂纹深度影响下的时均功率流随转速的变化曲线. 从图中可以看出,外力影响下的时均功率流会随着转速的增加而升高. 当处于较低转速时,两种状态都会在临界转速附近出现峰值. 转速继续升高,时均功率流也将缓慢上升. 当转速达到 7000 r/min 左右时出现变化. 对于无裂纹状态,时均功率流仍然随转速保持稳步上升的趋势. 对于存在裂纹的状态,随着转速升高,时均功率流出现振荡的现象,但是整体上保持上升趋势. 根据图 3(b),裂纹故障影响下出现时均功率流振荡上升的区域正好对应系统周期 1 运动失稳而呈现多周期及准周期区域.

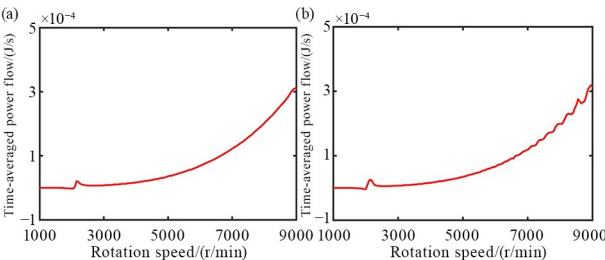


图 11 不同裂纹深度对外力输入能量的影响:
(a) 无裂纹; (b) 裂纹深度 2×10^{-3} m
Fig. 11 Influence of different crack depths on the input energy of external force: (a) No crack; (b) Crack depth 2×10^{-3} m

对裂纹导致时均功率流振荡上升的状态进行详细分析. 以裂纹深度为 2×10^{-3} m 的状态为例,

转速 7000~9000 r/min 区间内的外力时均功率流响应如图 12 所示. 响应曲线整体上会呈现出“Z”字形上升趋势,即出现一段缓慢变化后又突然出现幅值迅速上升的现象,且这种现象重复出现. 根据这种变化趋势,选择 A、B、C 三个转速点分别研究其运行形式,结果如图 13 所示.

根据图 12, A 点为局部时均功率流上升的起点,此时系统状态对应于图 13(a),图中散布的 Poincaré 点在空间中形成了一个封闭的圆形,表明此时系统正好处于拟周期状态. 另外,处于拟周期阶段的能量响应振荡幅度较大,且幅度会随着转速升高而逐渐增大,会使得在此状态下的能量同样也随着转速升高而增大. B 点为局部时均功率流上升区间的终点,系统状态对应于图 13(b). 对比上一个状态,原本围成一个圆形的 Poincaré 点在空间中散开,形成有限多个 Poincaré 点,表明拟周期运动在此转速下已经退化为多周期. 对于 C 点,此时正好接近时均功率流缓慢下降区域的终点,系统状态对应于图 13(c),表明此缓慢下降的区域是运动整体上处于多周期的状态. 值得注意的是当转速到达 C 点时,原本空间中散布的 Poincaré 点开始向封闭圆的趋势演变,说明运动状态即将再次演变为拟周期的状态.

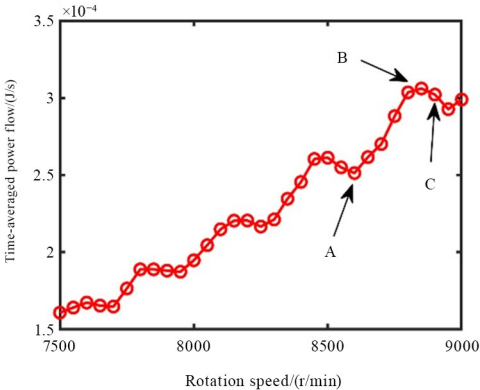
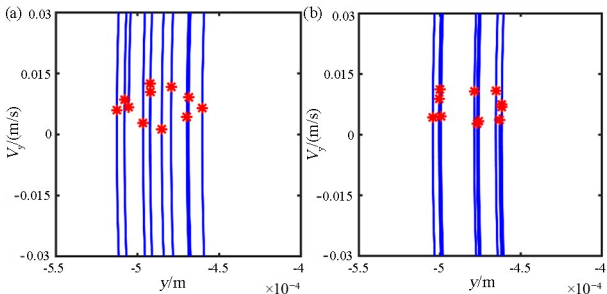


图 12 转速 7000~9000 r/min 区间内的外力时均功率流响应
Fig. 12 Time-average power flow response for external force at speeds range 7000~9000 r/min



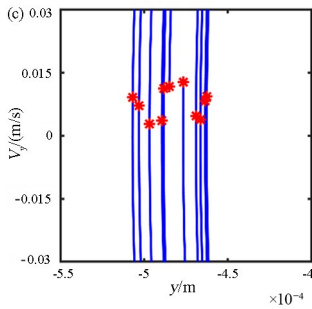


图 13 7000~9000 r/min 区间内的三种不同转速对应的相图及 Poincaré 截面:(a)A 点;(b)B 点;(c)C 点

Fig. 13 Rotor phase diagrams and Poincaré cross sections corresponding to three different rotation speeds in the range of 7000 to 9000 r/min: (a) Point A; (b) Point B; (c) Point C

通过上述分析可得,时均功率流出现振荡上升的原因是系统的运动处于多周期与拟周期来回切换的过程,且处于拟周期运动会导致时均功率流出现显著的上升趋势,而演变为多周期时则会出现小幅度的降低。

3 结论

本文采用振动能量方法对裂纹转子系统进行了研究,发现了由裂纹引发的特殊振动现象,并从振动功率流的角度揭示了转子典型故障状态背后的能量特征,主要结论如下:

(1) 裂纹的存在显著影响转子的振动能量. 裂纹会在转速约为 $1/2$ 临界转速时诱发超谐波共振,使得外力能量出现升高;

(2) 2 倍临界转速附近的亚谐波共振产生倍周期分岔,会使外力能量出现降低;

(3) 转速超过 6000 r/min 的时,裂纹故障引发拟周期和多周期运动交替出现的情况会使得能量传递出现振荡上升;

(4) 当转子系统的能量响应及传递出现异常变化时,可根据该现象判断转子系统出现故障。

参考文献

[1] 韩清凯, 马辉. 转子动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(6): 481—482.
HAN Q K, MA H. The research progress of rotor dynamics [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(6): 481—482. (in Chinese)

[2] 任双兴, 侯磊, 李凌峰, 等. 一种用于转子裂纹故障检测的区间控制策略[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(6): 76—82.

REN S X, HOU L, LI L F, et al. Switching control strategy for detecting crack area of rotors [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(6): 76—82. (in Chinese)

[3] HAN B, LIU Z S, HE P, et al. Rotor crack breathing under unbalanced disturbance [J]. Journal of Sound and Vibration, 2024, 574: 118236.

[4] NASAR R A, AL-SHUDEIFAT M A. Numerical and experimental analysis on the whirl orbit with inner loop in cracked rotor system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2024, 584: 118449.

[5] XIONG L B, HUA C R, LV L M, et al. A model-based dynamic characteristics analysis of a coupled multi-crack rotor system [J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 110(3): 2197—2223.

[6] ZHOU C D, LIU Y B, TENG W, et al. Dynamic modeling and stability analysis of a heavy-duty fly-wheel rotor-bearing system with two cracks [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2022, 22(9): 2250103.

[7] 李姚, 南国防, 丘学文, 等. 滚动轴承支承下松动—裂纹耦合故障转子系统动力学特性分析[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(3): 62—70.
LI Y, NAN G F, QIU X W, et al. Analysis of rotor system dynamic characteristics of looseness-crack coupling fault supported by rolling bearing [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(3): 62—70. (in Chinese)

[8] WANG D, CAO H R, YANG Y, et al. Dynamic modeling and vibration analysis of cracked rotor-bearing system based on rigid body element method [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 191: 110152.

[9] CAO J W, LUO Y Y, MAO Z Y, et al. Dynamic behavior analysis of a cracked bulb turbine rotor based on acoustic fluid-structural coupling method [J]. Engineering Failure Analysis, 2022, 140: 106555.

[10] 路振勇. 航空发动机转子系统的动力学建模及非线性振动研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
LU Z Y. Dynamical modeling and nonlinear vibration study of aero-engine rotorsystem [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017. (in Chinese)

[11] 焦卫东, 蒋永华, 李刚, 等. 任意斜裂纹转子的耦合振动研究[J]. 力学学报, 2020, 52(2): 533—543.
JIAO W D, JIANG Y H, LI G, et al. Study on coupled vibrations of rotor with an arbitrary slant

- crack [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(2): 533–543. (in Chinese)
- [12] LIU J, HAN Z, HU R. Research of vibration and crack propagation controls on an asymmetrical cracked rotor [J]. Journal of Vibration and Control, 2022, 28(13/14): 1686–1697.
- [13] GUO C Z, YAN J H, YANG W C. Crack detection for a Jeffcott rotor with a transverse crack: an experimental investigation [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 260–271.
- [14] BABU RAO K, MALLIKARJUNA REDDY D. Crack detection methodology in rotor bearing system by DWT based adaptive neuro-fuzzy inference systems [J]. Applied Acoustics, 2022, 192: 108728.
- [15] 许敬晖, 乔百杰, 刘美茹, 等. 基于叶端定时的转子叶片裂纹监测与诊断 [J]. 推进技术, 2022, 43(2): 374–382.
- XU J H, QIAO B J, LIU M R, et al. Crack monitoring and diagnosis of rotor blades using blade tip timing [J]. Journal of Propulsion Technology, 2022, 43(2): 374–382. (in Chinese)
- [16] 李彬, 夏虹. 基于最优小波基的主泵裂纹转子特征识别研究 [J]. 振动与冲击, 2014, 33(21): 207–212.
- LI B, XIA H. Feature recognition of cracked rotor of RCP based on optimal wavelet basis [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(21): 207–212. (in Chinese)
- [17] ZHU X, LI T Y, ZHAO Y, et al. Vibrational power flow analysis of thin cylindrical shell with a circumferential surface crack [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 302(1/2): 332–349.
- [18] ZHU X, LI T Y, ZHAO Y, et al. Structural power flow analysis of Timoshenko beam with an open crack [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(1/2): 215–226.
- [19] SAMET A, BEN SOUF M A, BAREILLE O, et al. Vibration sources identification in coupled thin plates through an inverse energy method [J]. Applied Acoustics, 2017, 128: 83–93.
- [20] 高原, 张振, 方勃. 基于负刚度惯容型非线性能量汇的整星振动抑制 [J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(1): 87–96.
- GAO Y, ZHANG Z, FANG B. Whole-spacecraft vibration suppression based on negative stiffness inertial nonlinear energy sink [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(1): 87–96. (in Chinese)
- [21] AL BA'BA' A H B, NOUH M. Mechanics of longitudinal and flexural locally resonant elastic metamaterials using a structural power flow approach [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 122: 341–354.
- [22] 王锦涛, 谢勇. 保守系统中非线性耦合振子间的能量传递 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(1): 18–27.
- WANG J T, XIE Y. Energy transfer between nonlinear coupled oscillators in conservative systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(1): 18–27. (in Chinese)
- [23] GÓMEZ M J, CASTEJÓN C, GARCÍA-PRADA J C. Crack detection in rotating shafts based on $3 \times$ energy: Analytical and experimental analyses [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96: 94–106.
- [24] BAI X T, ZHANG Z N, SHI H T, et al. Identification of subsurface mesoscale crack in full ceramic ball bearings based on strain energy theory [J]. Applied Sciences, 2023, 13(13): 7783.
- [25] DAI W, YANG J. Vibration transmission and energy flow of impact oscillators with nonlinear motion constraints created by diamond-shaped linkage mechanism [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 194: 106212.
- [26] DAI W, YANG J, WIERCIGROCH M. Vibration energy flow transmission in systems with Coulomb friction [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2022, 214: 106932.
- [27] MA Y Q, ZHAO Q J, ZHAO W, et al. Intrinsic physical relationships between rotor modal shapes and instantaneous vibrational energy flow transmission characteristics: Theoretical and numerical analysis and application [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2020, 33(12): 3288–3305.
- [28] MA Y Q, ZHAO Q J, ZHANG K, et al. Analysis of instantaneous vibrational energy flow for an aero-engine dual-rotor-support-casing coupling system [J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2020, 142(5): 051011.
- [29] ZHANG X T, YANG Y F, SHI M M, et al. Novel energy identification method for shallow cracked rotor system [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 186: 109886.
- [30] ZHANG X T, YANG Y F, GAO R Z, et al. Research of energy characteristics and fault position detection for cracked rotor system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2023, 551: 117604.