

带有压电吸振装置的驰振系统的振动抑制 与能量收集一体化研究^{*}

岳浩洋¹ 卢雨夕¹ 李海涛² 魏周超³ 宋妮^{1†}

(1. 中北大学 数学学院, 太原 030051)

(2. 中北大学 航空宇航学院, 太原 030051)

(3. 中国地质大学(武汉) 数学与物理学院, 武汉 430074)

摘要 本文针对驰振系统, 提出了一系列压电动力吸振器, 实现了振动抑制与能量收集双重功能. 采用增量谐波平衡法得到了安装有不同减振器的驰振抑制系统的周期解曲线, 并通过数值方法进行验证. 风速位移曲线、风速电压曲线、相平面图和时间历程图等结果均表明增量谐波平衡法与数值方法计算结果吻合较好. 此外, 在相同计算条件下, 增量谐波平衡法的计算用时明显少于数值方法, 为研究驰振系统提供更高效的计算方案. 通过参数分析, 量化了减振器参数如质量、刚度、阻尼对主系统减振效果及系统输出电压的影响规律, 对比评价了相关参数对减振效果的作用, 为减振器的高效设计明确了参数的选择方案.

关键词 驰振, 振动抑制, 能量收集, 增量谐波平衡法, 近似解析解

中图分类号: O32

文献标志码: A

Dynamic Research on an Integrated Vibration Suppression and Energy Harvesting Device for Galloping Systems with Piezoelectric Absorbers^{*}

Yue Haoyang¹ Lu Yuxi¹ Li Haitao² Wei Zhouchao³ Song Ni^{1†}

(1. College of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China)

(2. College of Aerospace Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

(3. School of Mathematics and Physics, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

Abstract This study investigates a galloping system integrated with a series of piezoelectric dynamic vibration absorbers (PDVAs), achieving the dual functions of vibration suppression and energy harvesting. The incremental harmonic balance method (IHBM) is employed to derive the periodic solutions of the galloping suppression system equipped with different vibration absorbers, and the results are validated through numerical simulations. Comparative analyses of wind speed-displacement curves, wind speed-voltage characteristics, phase portraits, and time-history responses demonstrate excellent agreement between the IHBM and numerical solutions. Notably, under identical computational conditions, the IHBM exhibits significantly higher computational efficiency than numerical methods, providing a more efficient analytical approach for the analysis of galloping systems. Furthermore, parametric studies are conducted to evaluate the influence of PDVA parameters—including mass, stiffness, and damping on both the primary system's vibration suppression performance and the output voltage. The comparative assessment elucidates the effects of these parameters on vibration mitigation, thereby guiding the opti-

2025-06-23 收到第 1 稿, 2025-08-20 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12372026, 12272355), 山西省回国留学人员科研资助项目(2022-150), 山西省留学回国人员科技活动择优资助项目(20250013), 山西省自然科学基金资助项目(202203021211086); National Natural Science Foundation of China (12372026, 12272355), Research Project Supported by Shanxi Scholarship Council of China (2022-150), Natural Science Foundation of Shanxi Province (202203021211086), Fund Program for the Scientific Activities of Selected Returned Overseas Professionals in Shanxi Province(20250013)

[†] 通信作者 E-mail: songni@nuc.edu.cn.

mal design of absorbers through appropriate parameter selection.

Key words galloping, vibration suppression, energy harvesting, incremental harmonic balance method, approximate analytical solution

引言

驰振(galloping)作为一种常见的流致振动现象,广泛存在于自然界和工程领域(如电力传输、土木工程、航空航天)^[1,2].该现象引发的复杂多样的动力学响应可导致工程结构发生疲劳损伤,从而对结构的安全性构成潜在威胁^[3].鉴于驰振可能造成的严重破坏效应,在过去的一段时间里,许多科研人员致力于研究结构驰振动力学响应的预测与抑制^[4,5].

随着科技的发展,研究人员对流致振动控制技术取得了一系列研究成果^[6,7].根据是否有外部的能量输入,结构振动控制技术可分为:被动控制、主动控制、半主动控制和混合控制四大类型^[8].其中,主动控制与半主动控制虽具备较强的自适应能力,但存在依赖外部能源的输入,技术复杂和使用成本高局限;混合控制结合了多种控制方式,其系统开发与设计难度较大,不仅需要设计者有丰富的知识储备,还需进行大量的数值模拟与实验,以保障系统稳定有效地运行^[9].基于上述因素,被动控制策略凭借其无需外部能源、结构简单和经济性的优势,成为目前最普遍使用的振动控制手段.作为被动控制技术,线性减振器与非线性减振器均可用于抑制系统的位移.相较于线性减振器,非线性减振器因具有更宽的减振频率带宽和更高效的减振能力,在实际应用中展现出显著优势,被广泛使用^[10].

在以往的减振装置设计中,振动能量通常通过阻尼机制耗散,如能将驰振振动产生的机械能收集,借助电磁、压电或摩擦电等转换机制,实现由机械能向电能的转化,将为低功耗分布式传感式器件开辟新的供能途径.然而,目前学者对驰振的非线性振动控制与驰振能量收集利用结合的相关研究较为欠缺.在各类能量转化技术中,压电式能量转换因效率高、输出功率大、工作频带宽,且结构简单紧凑、环境适应性强、绿色环保等特性,展现出极大的应用潜力^[11-13].一些学者尝试将压电能量采集器引入到减振装置设计,一方面保护主体结构,控制结构的振动位移;另一方面,通过压电元件实现振

动产生的机械能向电能的转化^[14]. Ahmadabadi 等^[15]将压电装置应用于俘获和储存非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)的振动能量,通过系统参数优化,最大化抑制振动响应并增加压电元件收集的能量. Zhang 等^[16]提出了一种新型的两自由度阻尼器,它结合了 NES 和压电能量收集器(piezoelectric energy harvester, PEH),即 NES-PEH 阻尼器,通过吸收振动能量和收集振动能量,抑制两自由度机翼的颤振. Shen 等^[17]设计了一种包含 NES 的基于磁性拨动频率上转换的 PEH,能够在低频和宽频范围内实现显著的能量收集能力,减少驰振造成危害,同时收集利用振动能量,为无线传感设备供电.

在非线性动力学系统定量研究中,解析方法如摄动法、多尺度法可以获得弱非线性系统的近似周期解.而对于驰振这类强非线性系统,以上解析方法因无法准确描述其复杂的非线性现象而不再适用.数值方法虽然可用于研究驰振动力学系统,但其存在计算时间较长,效率低下的问题.对于一些复杂非线性动力系统,数值方法难以全面捕捉系统的非线性行为特征,导致部分非线性动力学现象无法被完整刻画^[18].鉴于数值方法和解析方法对研究驰振系统均存在局限性,因此寻找一种兼具高效性与准确性的方法研究驰振及其抑制系统,已成为亟待解决的问题.

作为一种半数值半解析的方法,增量谐波平衡法适用于处理强非线性系统问题.增量谐波平衡法(incremental harmonic balance method, IHBM)由 Lau 和 Cheung 于 1981 年提出^[19].其求解思路是将增量过程、Newton-Raphson 迭代过程与增量谐波平衡过程有机结合,获得强非线性振动问题的高精度解,适用于大范围参数变化的定量分析^[20-22].基于这两大优点,增量谐波平衡法已在求解非线性问题中得到泛应用.晏俊涛等^[23]应用增量谐波平衡法推导了覆冰输电线的有限元分析模型及运动平衡方程,对舞动方程进行求解,从而对覆冰输电线的舞动这种非线性振动现象进行研究.

王鸿宇等^[24]在分析多自由度非线性介质的带隙性质时存在计算量大且不易收敛的问题,提出一种改进的增量谐波平衡法,高效求解了外部激励确定情况下的非线性波动问题.倪迎鸽等^[25]将增量谐波平衡法推广至分段结构非线性气动弹性系统的周期响应分析中,实现了非线性气动弹性方程到线性化代数方程组的转化,为其他分段非线性的处理提供了思路.因此本研究拟采取增量谐波平衡法对驰振系统进行研究.

综上所述,在技术领域方面,目前学者对驰振振动抑制与能量收集一体化的研究较为欠缺.在计算方法方面,通过数值方法研究驰振系统的响应,需要较长时间才能达到稳态,存在稳态解收敛速度慢、计算效率低等问题.针对以上不足,本文的创新性贡献如下:其一,提出一类驰振被动振动控制与能量收集一体化的装置,旨在通过抑制过大的驰振振幅以减轻振动危害,并同步实现对振动能量的回收利用.其二,采用增量谐波平衡法这种求解振动抑制系统,取得了兼具高效性及准确性的计算结果,为减振器的减振分析及进一步参数设计提供参考,为驰振系统动力学研究提供新的技术路径.

1 模型的建立和系统方程

为了研究驰振的振动抑制,首先给出了驰振动力学系统.如图 1 (a) 所示,一个方形钝体安装在弹性元件上,在均匀流场作用下,将其简化为单自由度自激振动系统^[26].在横流方向气动力的作用下,钝体振动控制方程表示成:

$$m_1\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 = f_L(y_1)$$
 (1)

其中 m_1 、 c_1 、 k_1 分别代表方形钝体的质量、结构阻尼和刚度。 y_1 、 $\dot{y}_1$ 和 $\ddot{y}_1$ 表示驰振主系统位移、速度和加速度, f_L 表示由流体施加在方形钝体上气动力. 通常使用准稳态假设用于描述气动力, 对称截面的单位长度的气动力 f_L 表示为:

$$f_L(y_1) = \frac{1}{2}\rho_a D_0 U^2 \sum_{n=1,2,\dots} a_n \left(\frac{\dot{y}_1}{U}\right)^n$$
 (2)

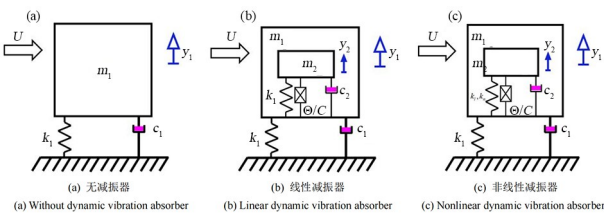


图 1 驰振及其抑制系统的结构
Fig. 1 The schematic of the galloping vibration control system

其中, ρ_a 代表流体密度, D_0 代表方形钝体的有效直径, U 代表风速, a_n 代表经验参数. 根据 Blevins 和 Barrero-Gil 等人的研究结果可知, 在高雷诺数情况下使用前三项, 即 $n=1, 2, 3$, 表示驰振力 f_L 已足够准确^[27-29].

为了提高气动弹性系统的稳定性, 对驰振结构安装压电减振器. 首先, 考虑线性压电减振器, 示意图如图 1 (b) 所示, 压电减振器被放置在方形钝体的内部^[30,31]. 此外, 我们在减振器的设计中还增加了非线性刚度^[32], 如图 1 (c) 所示. 安装了非线性压电减振器后的驰振抑制系统的振动控制方程表示成:

$$(m_1 - m_2)\ddot{y}_1 + c_1\dot{y}_1 + k_1y_1 + c_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_n(y_1 - y_2)^3 + k_L(y_1 - y_2) + \theta v = f_L(y_1)$$
 (3)

$$m_2\ddot{y}_2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_n(y_2 - y_1)^3 + k_L(y_2 - y_1) - \theta v = 0$$
 (4)

$$c_p\dot{v} + \theta(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + \frac{v}{R} = 0$$
 (5)

其中 m_2 代表减振器的质量, c_2 代表减振器的结构阻尼, k_n 和 k_L 分别代表减振器的非线性刚度和线性刚度. y_2 、 $\dot{y}_2$ 和 $\ddot{y}_2$ 表示压电减振器位移、速度和加速度, θ 为压电耦合系数, R 是电阻的负载, v 是系统输出电压, c_p 是等效电容. 驰振抑制系统的物理参数如表 1 所示:

表 1 驰振抑制系统的物理参数		
Table 1 The physical parameters of the galloping suppression system		
Symbol	Representative parameter	Value
m_1	Mass of square bluff body /kg	0.44
c_1	Structural damping of square bluff body / (N · s/m)	0.003 59
k_1	Structural stiffness of square bluff body / (N/m)	432.3752
D_0	Effective diameter of square bluff body /m	0.0015
ω_0	Natural frequency of the system / (rad/s)	31.42
ρ_a	Fluid density / (kg/m ³)	1.2
a_1, a_3	Empirical aerodynamic parameters	2, 3, -18

2 增量谐波平衡法

本节采用增量谐波平衡法, 推导了驰振振动抑制—压电俘能系统高阶近似解的迭代表式^[33], 并选择合适的谐波数进行计算.

2.1 增量谐波平衡法的推导

将方程(2)代入方程(3), 引入无量纲时间变量,

令 $\tau = \omega t$, ω 代表响应频率, $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial\tau$, 其中

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1 \omega y'_1 + k_1 y_1 + c_2 \omega (y'_1 - y'_2) + \\ & k_n (y_1 - y_2)^3 + k_{\text{lin}} (y_1 - y_2) - \\ & \frac{1}{2} D_0 U \rho_a a_1 \omega y'_1 - \frac{1}{2U} D_0 \rho_a a_3 \omega^3 y'_1{}^3 + \theta v, \\ f_2 &= c_2 \omega (y'_2 - y'_1) + k_n (y_2 - y_1)^3 + \\ & k_{\text{lin}} (y_2 - y_1) - \theta v, \\ f_3 &= c_p \omega v' + \theta \omega (y'_2 - y'_1) + \frac{v}{R}. \end{aligned}$$

方程(3)~(5)可表示为:

$$\omega^2 (m_1 - m_2) y''_1 + f_1(y_1, y'_1, y_2, y'_2, v, \omega, U) = 0 \quad (6)$$

$$\omega^2 m_2 y''_2 + f_2(y_1, y'_1, y_2, y'_2, v, \omega) = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & (m_1 - m_2) \omega_0^2 \Delta y''_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y'_1} \right) \Delta y'_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y'_2} \right) \Delta y'_2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right) \Delta y_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right) \Delta y_2 \\ & = - [\omega_0^2 (m_1 - m_2) y''_{10} + (f_1)_0] - \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega} \right)_0 + 2\omega_0 (m_1 - m_2) y''_{10} \right] \Delta \omega \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 m_2 \Delta y''_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y'_1} \right) \Delta y'_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y'_2} \right) \Delta y'_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1} \right) \Delta y_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2} \right) \Delta y_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \Delta v \\ & = - [\omega_0^2 m_2 y''_{20} + (f_2)_0] - \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega} \right)_0 + 2\omega_0 m_2 y''_{20} \right] \Delta \omega - \left(\frac{\partial f_2}{\partial U} \right)_0 \Delta U \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial v} \right)_0 \Delta v + \left(\frac{\partial f_3}{\partial v'} \right)_0 \Delta v' + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y'_1} \right)_0 \Delta y'_1 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y'_2} \right)_0 \Delta y'_2 = -(f_3)_0 - \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega} \right)_0 \Delta \omega \quad (12)$$

将 y_1, y_2 和 v 展开为前 N 项傅里叶级数, 稳态周期解可以假设为:

$$\begin{cases} y_1 \approx a_{10} + \sum_{k=1}^N [a_k \cos(k\tau) + b_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \mathbf{Y}_{10} \\ \Delta y_1 \approx \Delta a_{10} + \sum_{k=1}^N [\Delta a_k \cos(k\tau) + \Delta b_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \Delta \mathbf{Y}_1 \\ y_2 \approx g_{10} + \sum_{k=1}^N [g_k \cos(k\tau) + h_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \mathbf{Y}_{20} \\ \Delta y_2 \approx \Delta g_{10} + \sum_{k=1}^N [\Delta g_k \cos(k\tau) + \Delta h_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \Delta \mathbf{Y}_2 \\ v_0 \approx p_0 + \sum_{k=1}^N [p_k \cos(k\tau) + q_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \mathbf{V}_0 \\ \Delta v \approx \Delta p_0 + \sum_{k=1}^N [\Delta p_k \cos(k\tau) + \Delta q_k \sin(k\tau)] = \mathbf{C}_s \Delta \mathbf{V} \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{C}_s = [1, \cos(\tau), \sin(\tau), \dots, \cos(N\tau), \sin(N\tau)]$$

$$\mathbf{Y}_{10} = [a_0, a_1, b_1, \dots, a_N, b_N]^T$$

$$\Delta \mathbf{Y}_1 = [\Delta a_0, \Delta a_1, \Delta b_1, \dots, \Delta a_N, \Delta b_N]^T$$

$$\mathbf{Y}_{20} = [g_0, g_1, h_1, \dots, g_N, h_N]^T$$

$$\Delta \mathbf{Y}_2 = [\Delta g_0, \Delta g_1, \Delta h_1, \dots, \Delta g_N, \Delta h_N]^T$$

$$f_3(y'_1, y'_2, v, v', \omega) = 0 \quad (8)$$

假设 y_{10}, y_{20} 和 v_0 是方程(3)~(5)的解析解, ω_0 和 U_0 分别对应响应频率和风速, 它们的临近状态可以通过微小增量 Δ 表示为:

$$\begin{cases} y_1 = y_{10} + \Delta y_1 \\ y_2 = y_{20} + \Delta y_2 \\ v = v_0 + \Delta v \\ \omega = \omega_0 + \Delta \omega \\ U = U_0 + \Delta U \end{cases} \quad (9)$$

将方程(6)~(8)展为泰勒级数并忽略小增量的高阶非线性项, 得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= [p_0, p_1, q_1, \dots, p_N, q_N]^T \\ \Delta \mathbf{V} &= [\Delta p_0, \Delta p_1, \Delta q_1, \dots, \Delta p_N, \Delta q_N]^T \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{令 } \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{10} \\ \mathbf{Y}_{20} \\ \mathbf{v}_0 \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Y}_1 \\ \Delta \mathbf{Y}_2 \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \text{diag}[\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{C}_s],$$

$\text{diag}[\cdot]$ 表示对角矩阵. 根据求导准则, 可以得到以下关系:

$$\begin{cases} [y'_{10}, y'_{20}, v'_0]^T = \mathbf{S}' \mathbf{A}_0, [y''_{10}, y''_{20}, v''_0]^T = \mathbf{S}'' \mathbf{A}_0 \\ [\Delta y'_1, \Delta y'_2, \Delta v]^T = \mathbf{S}' \Delta \mathbf{A}, [\Delta y''_1, \Delta y''_2, \Delta v'']^T = \mathbf{S}'' \Delta \mathbf{A} \end{cases} \quad (15)$$

将方程(15)代入方程(10)~(12), 进行伽辽金平均, 得到线性增量方程:

$$\begin{aligned} & \delta \Delta \mathbf{A}^T \left\{ \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T [\omega^2 \mathbf{M} \mathbf{S}'' + \mathbf{D} \mathbf{S}' + \mathbf{L} \mathbf{S}] dt \right\} \Delta \mathbf{A} \\ & = \delta \Delta \mathbf{A}^T \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{r} dt - \delta \Delta \mathbf{A}^T \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\omega} dt \Delta \omega - \\ & \delta \Delta \mathbf{A}^T \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{U} dt \Delta U \end{aligned} \quad (16)$$

方程(16)进一步表示成:

$$\mathbf{J}_a \Delta \mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{J}_\omega \Delta \omega - \mathbf{J}_U \Delta U \quad (17)$$

其中

$$J_a = \int_0^{2\pi} S^T [\omega_0^2 MS'' + DS' + LS] dt, R = \int_0^{2\pi} S^T r dt, J_\omega = \int_0^{2\pi} S^T \omega dt, J_u = \int_0^{2\pi} S^T U dt,$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 - m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1'}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2'}\right)_0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1'}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2'}\right)_0 & 0 \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial y_1'}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_3}{\partial y_2'}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_3}{\partial v'}\right)_0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial v}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)_0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial f_3}{\partial v}\right)_0 \end{bmatrix},$$

$$r = - \begin{bmatrix} \omega_0^2 (m_1 - m_2) y''_{10} + (f_1)_0 \\ \omega_0^2 m_2 y''_{20} + (f_2)_0 \\ (f_3)_0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial U}\right)_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \omega}\right)_0 + 2(m_1 - m_2) \omega_0 y''_{10} \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial \omega}\right)_0 + 2m_2 \omega_0 y''_{20} \\ \left(\frac{\partial f_3}{\partial \omega}\right)_0 \end{bmatrix},$$

以上矩阵具体形式见附录 1.

值得注意的是,由于未知数的个数要多于方程的个数,有必要指定不参与迭代的特定谐波系数. 本文以一次谐波项的相位作为参考相位,仅保留一次谐波的余弦项. 具体而言,在方程(14)中, b_1 和 Δb_1 设为 0. 线性增量方程(17)可进一步表示为:

$$\tilde{J}_a \Delta A = R - J_u \Delta U \tag{18}$$

$$\begin{cases} \tilde{J}_a = [J_{a,\{1\}} & J_{a,\{2\}} & J_\omega & J_{a,\{4\}} & \cdots & J_{a,\{6N+3\}}] \\ \Delta A = [\Delta A_{\{1\}} & \Delta A_{\{2\}} & \Delta \omega & \Delta A_{\{4\}} & \cdots & \Delta A_{\{6N+3\}}]^T \end{cases} \tag{19}$$

其中, $J_{a,\{i\}}$ 的下标 $\{i\}$ 表示 J_a 的第 i 列, $\Delta A_{\{i\}}$ 表示 ΔA 的第 i 个元素. 在某一风速下 ($\Delta U = 0$), 谐波系数和响应频率按以下方式迭代更新:

$$\tilde{A}^{(j)} = \tilde{A}^{(j-1)} + \tilde{A}^{(j)} \tag{20}$$

上标 (j) 表示第 j 次迭代. 当迭代过程中 $\|R\|^2$ 小于误差 ϵ , 即可确定谐波系数和响应频率.

2.2 谐波数的选择

图 2 给出了增量谐波平衡法选择不同谐波数 (harmonic terms) 及龙格库塔数值方法 (ode45) 计算所得的无减振情况下驰振系统风速一位移曲线及风速为 1.8 m/s 时风速一位移曲线的放大图. 通过对比分析图 2 可知,在未达到起振风速区间 (1~1.6 m/s), 不同谐波数与数值结果一致;而当系统进入振动状态后,低阶谐波数 (3 个、5 个) 的计算结果与数值解存在显著偏差,而当谐波数提升至 7 个时,计算结果与数值结果吻合良好,进一步增加谐波数对计算精度提升效果有限.

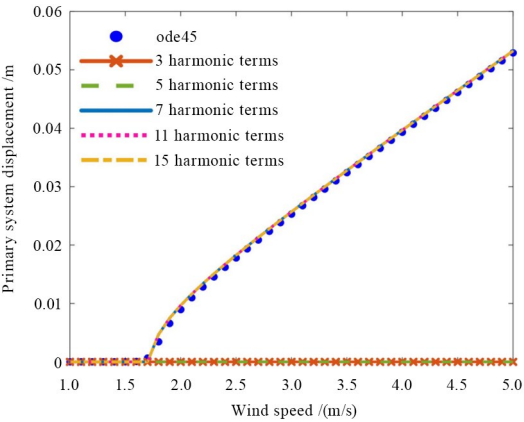


图 2 系统无减振情况下 IHB 法不同谐波数及 ode45 法驰振系统风速一位移曲线
Fig. 2 Wind speed-displacement curves of the galloping system obtained by the IHB method (with different numbers of harmonic terms) and the ode45 method under the condition of no vibration absorber

为进一步比较不同谐波数所得风速一位移曲线与数值结果的差异,以及对计算效率的影响,本文对低阶谐波数和高阶谐波数与数值方法在 1~5 m/s 风速范围内的系统总位移进行了平均偏差分析: $(|\sum y_{\text{ode45}} - \sum y_{\text{IHB}}| / \sum y_{\text{ode45}}) \times 100\%$. 同时对不同谐波数计算用时进行了比较,结果如表 2 所示. 表 2 表明,谐波数的选择对计算效率及计算精度影响显著. 具体表现为:随着谐波数的增加,计算用时呈现指数级增长趋势,而平均偏差则呈现明显下降趋势. 通过分析不同谐波数下的计算性能发现,7 个谐波数在计算效率及计算精度达到最优状态:较 5 个谐波数相比,7 个谐波数计算用时仅增加 24.334 685 s,而平均偏差降低 98.57%;与 9 个谐波数相比,7 个谐波数在保持相同计算精度的

同时,计算用时节约 43.223 532 s. 通过分析不同谐波数产生的基于计算效率与精度的综合考量,本研究确定 7 阶谐波为最优参数,在保证计算结果准确性的前提下,为后续系统研究提供了最优的计算方案.

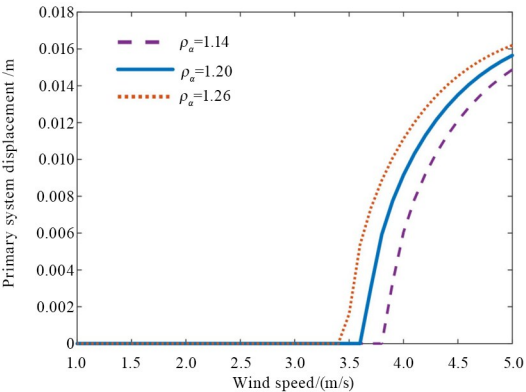
表 2 不同谐波数计算用时与计算差异		
Table 2 Computation time for different numbers of harmonic terms and computation difference		
Number of harmonic terms	Calculation time /s	Relative error from ode45 /(%)
3	6.808 737	100
5	9.483 778	100
7	33.818 463	1.43
11	77.041 995	1.43
15	166.711 033	1.43

为探究气动参数对减振器性能的影响规律,确保在气动参数小幅波动的情况下,减振器仍能正常工作,通过参数敏感性分析理论,利用增量谐波平衡法,以纯立方非线性刚度减振器 (pure cubic nonlinear vibration absorber, PVA) 为例,讨论驰振系统气动参数小幅波动对系统的影响. 保持基本减振器参数为 $m_2=0.05\text{ kg}$, $c_2=0.04\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k_n=38\,611\text{ N/m}^3$, 系统其他参数不变,分别对驰振系统的气动参数:流体密度 ρ_a 与经验参数 a_1 、 a_3 的范围做的调整,气动参数对系统的影响效果如图 3 所示.

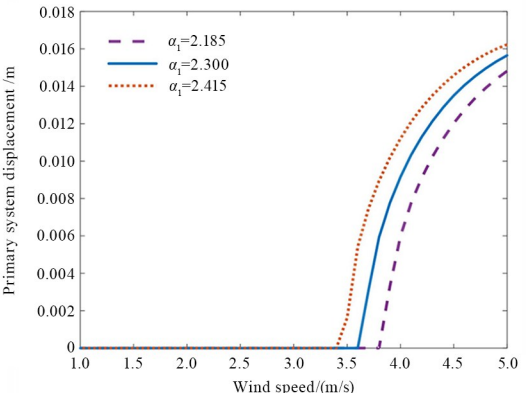
由图 3 (a)可知,流体密度小幅调整对系统位移影响较小,但其对系统起振风速影响明显. 量化分析 ρ_a 对起振风速的影响发现, ρ_a 在 $\pm 5\%$ 调整时,起振风速变化未超过原基准的 10% . 由图 3 (b)可知,经验参数 a_1 小幅调整对系统位移及起振风速均有影响. 通过量化分析在风速为 5 m/s 时,系统位移变化差异及系统起振风速改变可知, a_1 在调整 $\pm 5\%$ 时,系统位移及起振风速变化均未超过基准值的 10% . 由图 3 (c)可知,经验参数 a_3 小幅调整对系统位移有影响,对起振风速影响较小. 通过量化分析在风速为 5 m/s 时,系统位移变化差异可知, a_3 在 $\pm 5\%$ 调整时,系统起振风速变化未超过基准值的 5% .

由图 3 的研究结果可知,在小幅波动范围内调整气动参数,系统的振幅及起振风速变化控制在较小范围内,减振器仍能保持稳定的减振性能. 这一

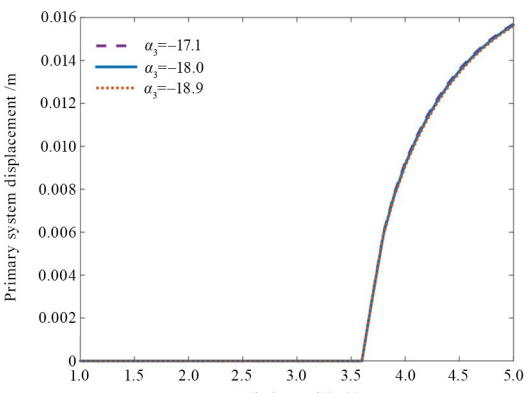
结论为减振器参数优化及鲁棒性设计提供了理论依据.



(a) 流体密度 ρ_a 的影响
(a) Influence of fluid density variation ρ_a



(b) 经验参数 α_1 的影响
(b) Influence of empirical coefficients α_1



(c) 经验参数 α_3 的影响
(c) Influence of empirical coefficients α_3

图 3 气动参数对系统的影响

Fig. 3 Influence of aerodynamic parameters on system

3 驰振抑制效果验证及计算时间对比

图 4 给出了增量谐波平衡法和龙格库塔数值方法所得到的未安装减振器 (without vibration absorber, WVA) 与安装不同减振装置工况下的主结构的风速一位移曲线、风速一电压曲线. 基本减振器参数为 $m_2=0.05\text{ kg}$, $c_2=0.04\text{ N}\cdot\text{s/m}$, 对

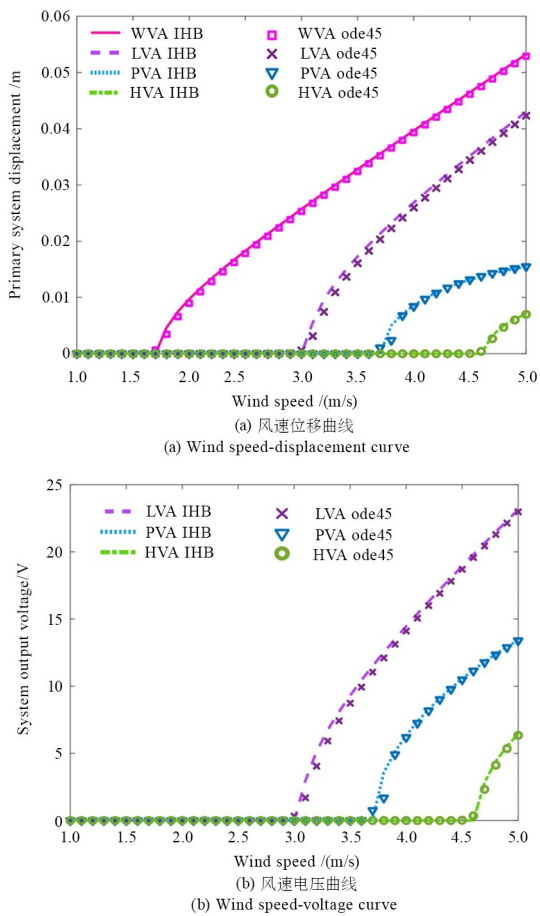


图 4 无减振器与不同减振器工况下主系统的风速位移曲线与风速电压曲线

Fig. 4 Wind speed-displacement curves and wind speed-voltage curves of the main system under the conditions of without vibration absorber and different vibration absorbers

于线性减振器 (linear vibration absorber, LVA), 线性刚度设定为 $k_{lin}=100\text{ N/m}$. 非线性压电减振器考虑两种设置: 一种只考虑纯立方非线性刚度, $k_n=38\,611\text{ N/m}^3$; 另外一种除了立方非线性刚度外, 还考虑线性刚度 (hybrid stiffness nonlinear vibration absorber, HVA), $k_{lin}=10\text{ N/m}$.

经对比分析发现, 数值结果与半解析结果吻合较好, 验证了增量谐波平衡法的准确性. 进一步研究表明, 在驰振系统中引入压电减振器后, 主系统的位移响应显著降低, 切入风速阈值有效提升, 系统的稳定性有效增强; 与此同时, 该装置产生可观的电压输出, 兼具振动控制与能量回收的双重功效. 通过对比不同减振器的减振效果发现: 纯立方非线性减振器相较于线性减振器展现出更显著的减振优势, 而在非线性刚度的基础上增加混合线性刚度, 可以进一步优化减振性能. 图 4 (a) 表明, 驰振系统在未安装减振器情况下系统的切入风速为 1.7 m/s , 通过安装线性减振器和纯立方非线性减

振器, 切入风速分别提升至 3 m/s 与 3.6 m/s , 而当在纯立方非线性减振器中考虑线性刚度, 主系统切入风速提高至 4.6 m/s . 对于风速为 5 m/s 时振动响应, 驰振系统在未安装减振器情况下的位移为 0.053 m , 通过安装线性减振器和纯立方非线性减振器位移分别降低至 0.042 m 和 0.015 m ; 进一步通过混合刚度非线性减振器, 主系统位移降至 0.007 m . 此外, 如图 4 (b) 所示, 系统电压响应与位移响应呈现正相关性, 即随着主结构位移响应的减小, 压电减振器的能量输出也同步减少.

为评估增量谐波平衡方法计算效率, 本研究以无减振器、线性减振器、纯立方非线性减振器及混合刚度非线性减振器四种工况为研究对象, 通过表 3 统计并对比了增量谐波平衡法与数值方法绘制系统的四种工况的主系统风速位移曲线与系统风速电压曲线的用时. 研究结果表明, 在控制计算条件与参数设定一致性的前提下, 增量谐波平衡法在计算并绘制上述两类曲线时, 计算用时明显少于数值方法, 充分验证了该方法在提升计算效率方面的显著优势.

表 3 四种工况下主系统稳态风速—位移曲线及系统风速—电压的计算用时差异			
Table 3 Calculation time differences of steady-state wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system for four working conditions			
Working condition	Method	Time /s	Time difference /s
WVA	IHB	30.778 298	-272.298 995
	ode45	303.077 293	
LVA	IHB	31.7401	-307.441 420
	ode45	339.181 520	
PVA	IHB	145.820 615	-182.543 919
	ode45	328.364 534	
HVA	IHB	147.856 836	-182.386 090
	ode45	330.242 926	

为深入研究不同减振器对减振性能的影响并具体体现减振器减振效果, 图 5 给出了未安装减振器与安装不同减振装置四种工况下, 应用增量谐波平衡法与数值方法在风速为 5 m/s 时的相平面图与位移响应的时间历程图. 经对比分析发现, 两种方法的求解结果具有良好的一致性, 验证了增量谐波平衡法的可靠性. 相平面图面积作为表现系统能量转化效率的重要指标, 其大小反映了在同等激励条件下从环境中收集能量的能力, 相图面积越大, 系统从环境中收集的能量越高. 在图 5 (a) 中, 当驰振系统在安装减振器后相图的面积明显减小, 其中以非线性

和线性刚度组合的情况下,相图的面积降幅最为突出,这代表该情况下减振器对主系统振动抑制效果最为显著.进一步分析图 5 (b) 的位移响应时间历程图可知,带有非线性以及线性组合刚度非线性减振装置,可有效降低主系统响应,使主结构位移从未安装状态的 0.053 m 大幅降至 0.015 m.

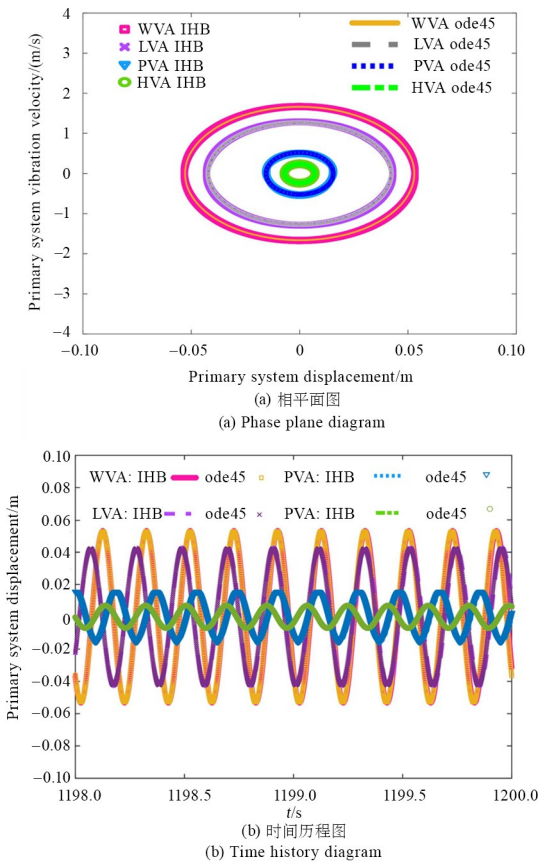


图 5 风速 5 m/s 时不同减振器的负载电阻变化对系统输出功率及电压影响

Fig. 5 The phase plane diagrams of the main system at a wind speed of 5 m/s and the time history diagrams of the main system's displacement response at the same wind speed under conditions of no vibration absorber and different vibration absorbers

为探究负载电阻对减振器性能及输出功率的影响机制,本研究采用增量谐波平衡法与数值方法,针对风速为 5 m/s 工况下不同类型减振器,开展变电阻情况下输出电压与功率分析.如图 6 所示,增量谐波平衡法的求解结果略大于数值方法求解结果,但总体来说,两种方法计算结果相差较小.研究发现,负载电阻对不同类型的减振器的输出电压与输出功率有相同的影响规律.具体体现在,当系统的负载电阻小于 7.95 k Ω 时,系统输出最大电压随负载电阻的增大而迅速增大;而当负载电阻大于 7.95 k Ω 后,系统输出电压随阻值的增加而趋于饱和.在功率输出方面,系统输出功率随负载电阻的增大,呈现出先

增大后减小的趋势,三种工况最优的负载电阻值均为 7.95 k Ω .同时,三种工况下系统输出的功率及电压的大小有所差异,驰振系统在安装线性减振器后,系统输出的功率及电压最大,分别为 0.93 mW 及 27.8 V;由于非线性减振器的减振效果优于线性减振器,因此在最优负载电阻的条件下,系统在安装非线性减振器后系统输出的功率及电压减小;相较于线性减振器与纯立方非线性减振器,组合刚度非线性减振器的减振效果最好,但是系统输出的功率及电压最小,分别为 0.68 mW 及 7.36 V.

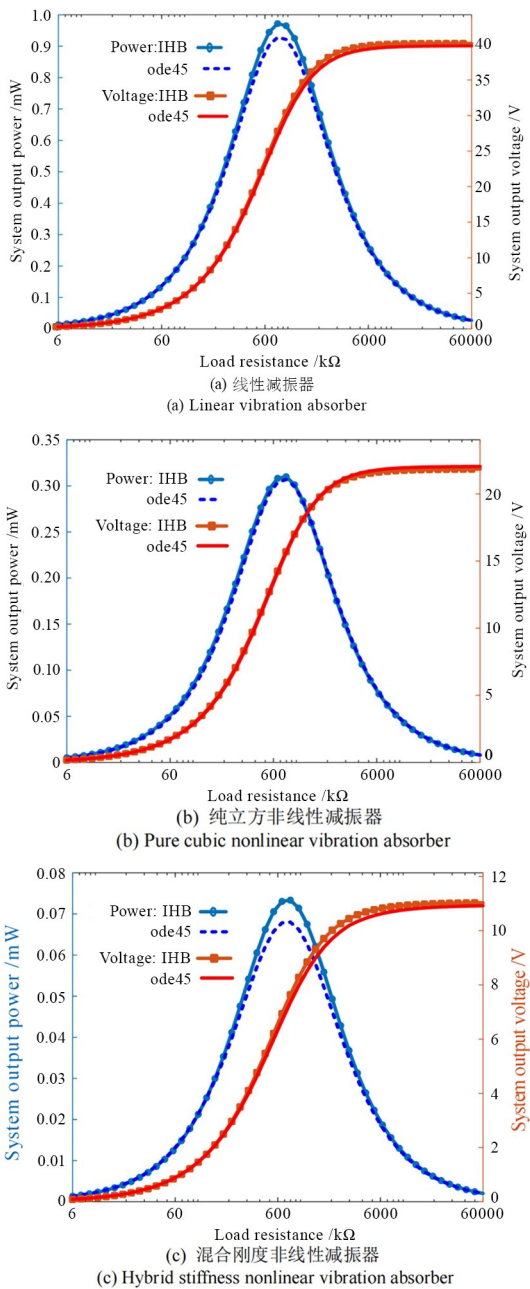


图 6 无减振器与不同减振器工况下主系统在风速 5 m/s 时相平面图与风速 5 m/s 时主系统位移响应的时间历程图

Fig. 6 Influence of load resistance variation in different vibration absorbers on system output power and voltage at wind speed of 5 m/s

表 4 给出了增量谐波平衡法与数值方法计算用时,在相同计算初值设定下,增量谐波平衡法在分析三种工况下负载电阻影响的计算用时均明显少于数值方法,进一步体现了该方法在动力学系统研究中的高效优势。

表 4 风速 5 m/s 时三种工况下负载电阻—功率—电压曲线的计算用时差异

Table 4 The computational time differences of the load resistance-power-voltage curves under three working conditions at a wind speed of 5 m/s

Working condition	Method	Time /s	Time difference /s
LVA	IHB	156.70	— 1870.99
	ode45	2027.69	
PVA	IHB	1078.20	— 1956.65
	ode45	3034.85	
HVA	IHB	1360.40	— 1124.53
	ode45	2485.73	

4 减振器参数对减振效果的影响

在验证减振器对驰振抑制有效性、增量谐波平衡法求解驰振系统正确性与计算效率高效性之后,本节将基于增量谐波平衡法,系统开展减振器参数对系统动力学响应及减振性能的影响研究。

4.1 线性压电减振器参数的影响

为探究线性减振器参数对驰振抑制效果的影响机制,本研究通过图 7 给出了在风速 5 m/s 时,随减振器质量与刚度变化,减振器频率与驰振结构固有频率的关系及减振效果的影响。基于增量谐波平衡法,调整线性减振器的质量 m_2 与线性刚度 k_{lin} ,发现减振器的减振效果与减振器的频率 $\omega_L = \sqrt{k_{lin}/m_2}$ 及驰振系统固有频率 $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ 呈显著相关性。具体而言,当减振器频率高于驰振固有频率时,主系统的位移响应随减振器频率逐渐降低呈下降趋势;而当减振器频率低于主系统的固有频率时,主系统的位移响应随减振器频率的增加而减小。因此,针对线性减振装置,当其固有频率调节至接近主系统固有频率时,可实现有效的振动抑制效果。

图 8 给出了保持线性减振器参数 $m_2 = 0.05\text{ kg}$ 、 $k_{lin} = 100\text{ N/m}$,减振器的阻尼 c_2 分别设定为: $0.04\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 、 $0.05\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 和 $0.06\text{ N}\cdot\text{s/m}$,主系统的风速位移曲线与系统输出电压曲线。由研究结果可知,随减振器阻尼 c_2 由 $0.04\text{ N}\cdot\text{s/m}$ 增大至 $0.06\text{ N}\cdot\text{s/m}$,主系统的切入风速由 3 m/s 提高

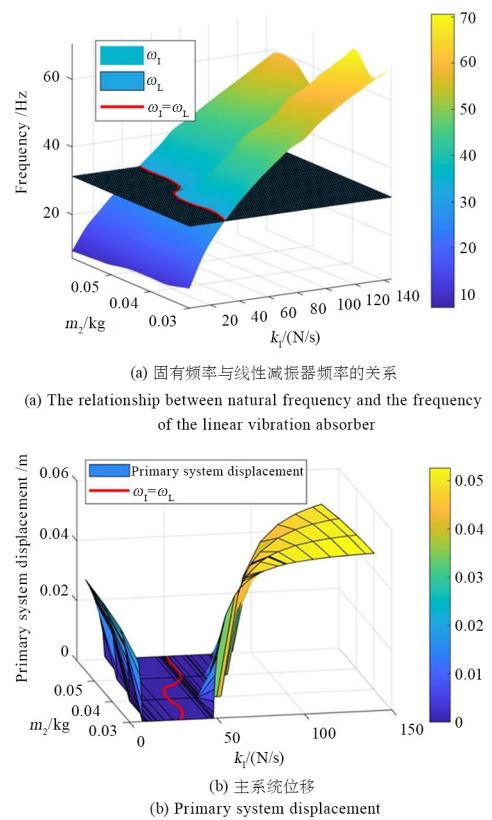


图 7 风速为 5 m/s 时的频率关系与主系统位移响应输出

Fig. 7 Frequency relationship and displacement response output of the main system at a wind speed of 5 m/s

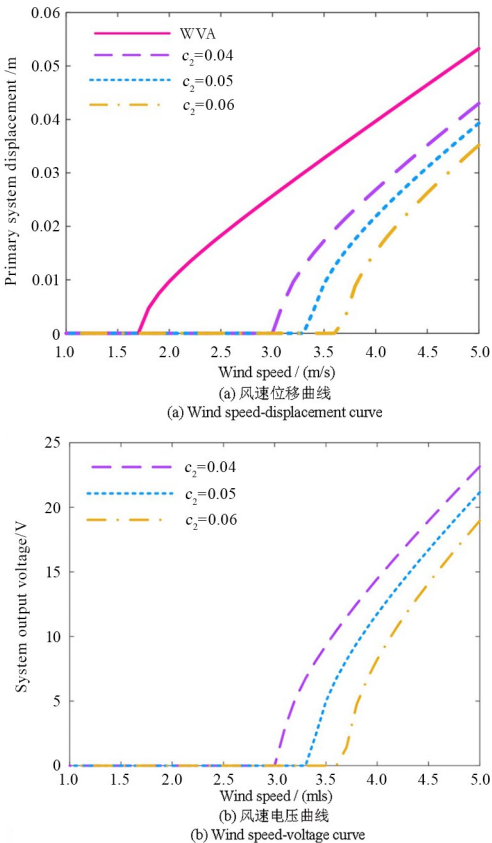


图 8 线性减振器阻尼变化时主系统风速—位移曲线与系统风速—电压曲线

Fig. 8 Wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system with the various damping of the linear vibration absorber

到 3.6 m/s. 相同风速下,系统的主结构位移与输出电压均随减振器阻尼 c_2 增加而有所降低. 在风速为 5 m/s 情况下,随减振器阻尼 c_2 增大,主系统的位移由 0.043 m 降低至 0.035 m,系统输出电压由 23.149 V 降低为 18.95 V.

4.2 非线性压电减振器参数的影响

为了克服线性压电减振装置对驰振系统结构参数的敏感性,本研究针对非线性减振装置展开深入研究. 通过图 9~12 对非线性减振装置的结构参数对驰振系统的减振效果进行了系统且定量的分析. 图 9 给出了非线性减振器质量 m_2 对减振效果的影响规律. 在保持非线性减振器参数 $c_2=0.04\text{ N}\cdot\text{s/m}$, $k_n=38\,611\text{ N/m}$ 不变的条件下,非线性减振器的质量 m_2 设置为:0.03 kg、0.04 kg 和 0.05 kg. 研究表明,非线性减振器质量 m_2 的变化对主系统的切入风速的影响较小,三组参数下主系统的切入风速均在 3.6 m/s 附近. 然而在相同风

速激励下,随减振器质量 m_2 逐渐增大,其减振效果呈减弱趋势,主系统位移以及系统输出电压均逐渐变大. 在风速为 5 m/s 情况下,当 m_2 从 0.03 kg 逐渐增大至 0.05 kg 时,主系统的位移由 0.012 m 增加至 0.015 m,系统输出的电压由 10.42 V 提高为 13.44 V.

图 10 给出了非线性减振器阻尼 c_2 对减振效果的影响. 在保持非线性减振器参数 $m_2=0.03\text{ kg}$, $k_n=38\,611\text{ N/m}^3$ 不变的条件下,非线性减振器阻尼 c_2 取值分别为 0.04 N·s/m、0.05 N·s/m 和 0.06 N·s/m. 研究表明:随着减振器阻尼增大,主系统的切入风速由 3.6 m/s 提升至 4.6 m/s. 在相同风速激励下,主系统的位移响应及系统电压输出均随着 c_2 的增大而显著降低. 具体而言,以风速为 5 m/s 情况为例,随着阻尼 c_2 从 0.04 N·s/m 增至 0.06 N·s/m,主系统的位移由 0.012 m 降至 0.0067 m,系统输出的电压由 10.42 V 降低至 4.88 V.

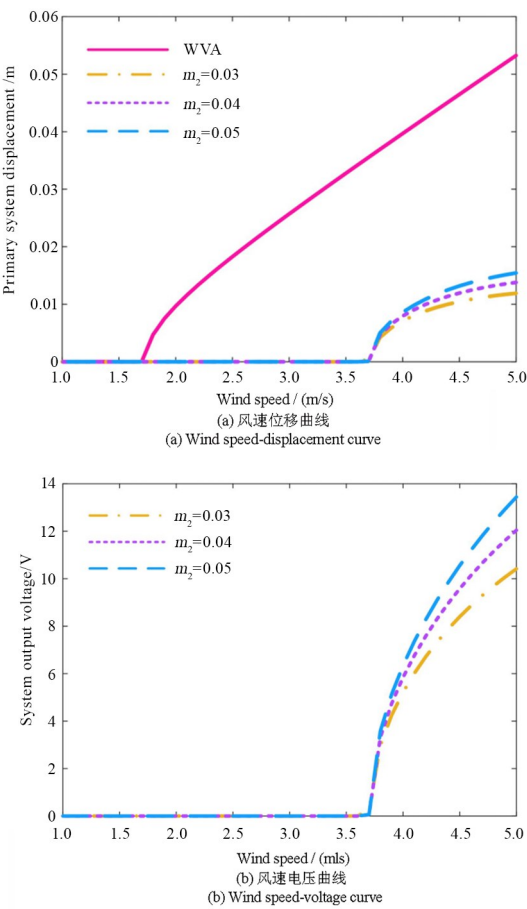


图 9 非线性减振器质量变化时主系统风速一位移曲线与系统风速—电压曲线

Fig. 9 Wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system with the various mass of the nonlinear vibration absorber

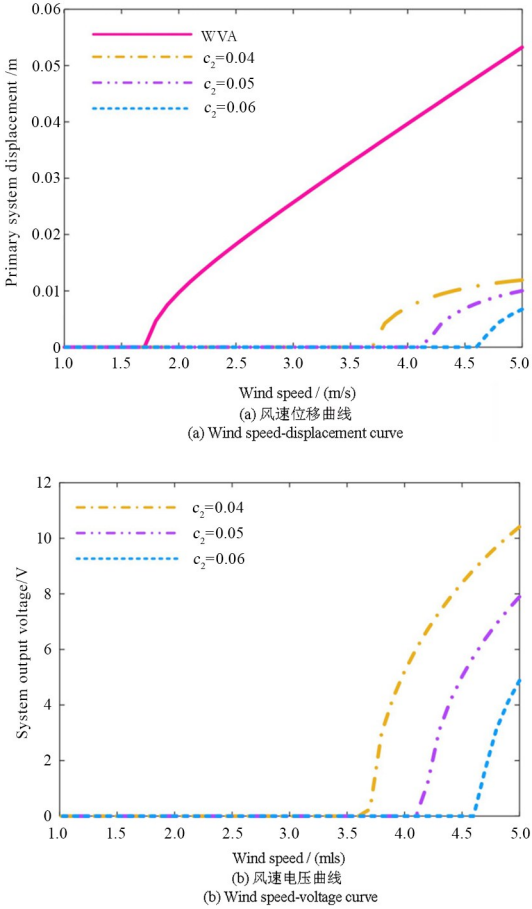


图 10 非线性减振器阻尼变化时主系统风速一位移曲线与系统风速—电压曲线

Fig. 10 Wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system with the various damping of the nonlinear vibration absorber

图 11 给出了非线性刚度 k_n 对减振效果的影响。在保持非线性参数 $m_2 = 0.05 \text{ kg}$ 、 $c_2 = 0.04 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 不变的条件下,非线性减振器的刚度 k_n 取值分别为:19 306 N/m^3 、38 611 N/m^3 和 72 222 N/m^3 。研究表明:改变减振器刚度 k_n 对主系统切入风速影响较小,三组参数下,主系统的切入风速均在 3.6 m/s 附近。然而在相同风速激励条件下,随着减振器非线性刚度 k_n 的增大,其减振效果呈增强趋势,主系统位移以及系统输出电压均逐渐变小。在风速为 5 m/s 情况下,当 k_n 从 19 306 N/m^3 增大至 72 222 N/m^3 时,主系统的位移由 0.0204 m 降低为 0.012 m,系统输出的电压由 17.03 V 降低至 10.34 V。

最后,为了进一步优化非线性减振器的减振效果,在纯立方非线性减振器基础上考虑线性刚度,探究线性刚度对减振效果的影响规律,结果如图 12 所示。在保持减振器参数 $m_2 = 0.04 \text{ kg}$ 、 $c_2 = 0.05 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 、 $k_n = 38611 \text{ N/m}^3$ 不变的条件下,线

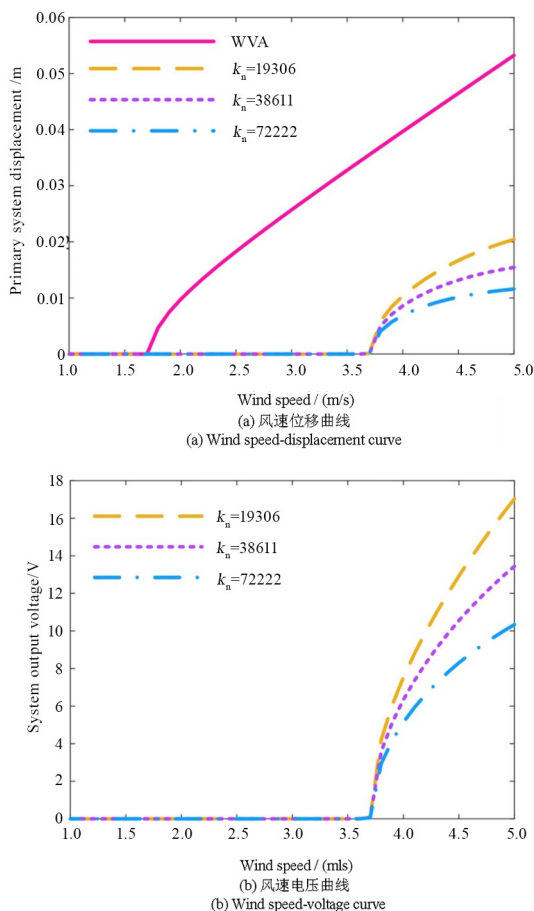


图 11 非线性减振器刚度变化时主系统风速—位移曲线与系统风速—电压曲线

Fig. 11 Wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system with the various stiffness of the nonlinear vibration absorber

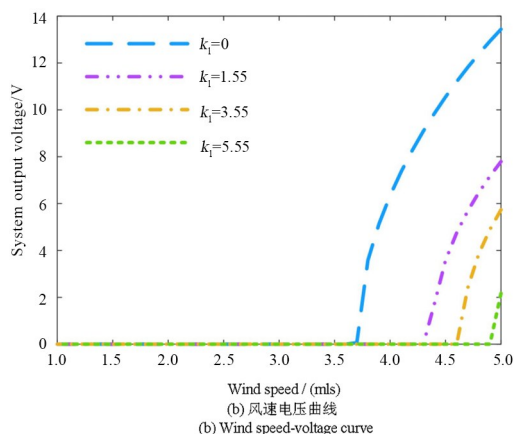
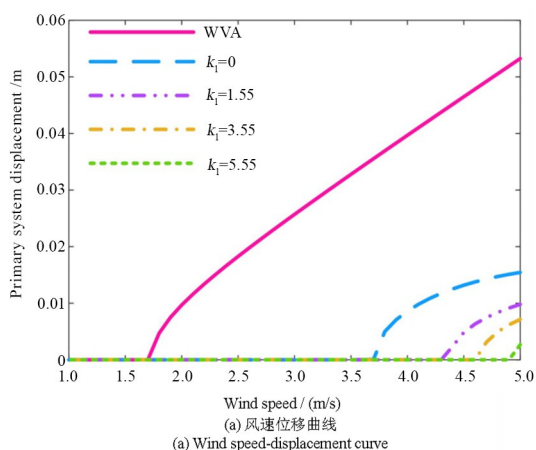


图 12 非线性减振器组合线性刚度,线性刚度变化时主系统风速—位移曲线与系统风速—电压曲线

Fig. 12 Wind speed-displacement curves of the main system and wind speed-voltage curves of the system with various combined linear stiffness of the nonlinear vibration absorbers

性刚度 k_{lin} 分别为:0 N/m 、1.55 N/m 、3.55 N/m 和 5.55 N/m 。结果表明,随着线性刚度 k_{lin} 的增大,主系统的切入风速提高,驰振振动抑制效果增强。具体而言,在未考虑线性刚度时,系统的切入风速为 3.6 m/s;随线性刚度的增大至 5.55 N/m ,系统切入风速增加至 4.9 m/s。同时,在相同风速下,随线性刚度 k_{lin} 的增大,系统位移响应及电压输出均有所降低。

5 结论

本文针对驰振系统分别设计了线性以及非线性压电减振器,实现驰振抑制与振动能量收集的双重目标。采用增量谐波平衡法获得了驰振抑制系统的周期解响应曲线,并借助数值方法验证了半解析结果。结果表明增量谐波平衡法在保证计算精度的基础上,极大地减小了驰振振动抑制—能量收集结构动力学响应的计算用时,大幅提高了计算效率。

借助增量谐波平衡方法量化分析了线性减振

器结构参数(包括减振器的质量、阻尼、刚度)对主系统的位移及系统输出电压的影响规律. 对于线性减振器,选取频率接近固有频率的减振器质量与刚度参数,并适度增大减振器阻尼,可有效抑制振动;对于非线性减振器,通过减小减振器质量、增大减振器刚度与阻尼,以及线性与非线性组合刚度形式,可有效提高抑制振动效果. 本研究确定了实现减振器最优减振性能的关键条件,为压电减振器的设计优化与参数调整提供理论依据.

参考文献

- [1] LUO F Q, LYU Z, GAO C Q, et al. The mechanism of galloping control with a passive modal controller [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2025, 133: 104249.
- [2] MASARU M. Fluid-structure interactions: cross-flow-induced instabilities [J]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2013, 118: 61.
- [3] DAI H L, WANG L, QIAN Q, et al. Vortex-induced vibrations of pipes conveying fluid in the subcritical and supercritical regimes [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, 39: 322—334.
- [4] LI F M. Active aeroelastic flutter suppression of a supersonic plate with piezoelectric material [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2012, 51: 190—203.
- [5] XU F, CHEN W L, XIAO Y Q, et al. Numerical study on the suppression of the vortex-induced vibration of an elastically mounted cylinder by a traveling wave wall [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, 44: 145—165.
- [6] 绳丽洁, 王军雷. 流致振动压电能量俘获的研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(4): 12—23.
SHENG L J, WANG J L. Research progress of piezoelectric energy harvesting from flow-induced vibration [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(4): 12—23. (in Chinese)
- [7] 邹鸿翔, 周生喜, 魏克湘. 振动抑制与能量俘获专刊序[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(10): 1—4.
ZOU H X, ZHOU S X, WEI K X. Preface of special issue on vibration suppression and energy harvesting [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(10): 1—4. (in Chinese)
- [8] 杨艺. 基于双调谐质量阻尼器的客运缆车风致振动控制方法[D]. 哈尔滨: 东北林业大学, 2023.
YANG Y. Wind-induced vibration control method for the cable car by double tuned mass [D]. Harbin: Northeast Forestry University, 2023. (in Chinese)
- [9] 陆子. 基于非线性吸能机理的流致振动控制理论与实验研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2023.
LU Z. Theoretical and experimental study on flow-induced vibration suppression based on nonlinear targeted energy transfer [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2023. (in Chinese)
- [10] LI X L, LIU K F, XIONG L Y, et al. Development and validation of a piecewise linear nonlinear energy sink for vibration suppression and energy harvesting [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 503: 116104.
- [11] XUE X X, XIANG H J, CI Y M, et al. A sustainable galloping piezoelectric energy harvesting wind barrier for power generation on railway bridges [J]. *Energy*, 2025, 320: 135135.
- [12] 任和. 风致振动能量收集系统的动力学响应分析及气动提升策略研究[D]. 太原: 中北大学, 2024.
REN H. Dynamic response analysis and aerodynamic improvement strategy of wind-induced vibration energy harvesting system [D]. Taiyuan: North University of China, 2024. (in Chinese)
- [13] 许苗莉, 冶继民. 色噪声激励下一类驰振能量采集器的稳态响应研究[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(10): 85—93.
XU M L, YE J M. Steady-state response study of a type of galloping energy harvester under colored noise excitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(10): 85—93. (in Chinese)
- [14] WANG L Z, LIU W D, LIN X Q, et al. Study of vibration suppression and energy harvesting for a vibration-based piezoelectric-electromagnetic energy harvester with nonlinear energy sink [J]. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2024, 602: 172200.
- [15] NILI AHMADABADI Z, KHADEM S E. Nonlinear vibration control and energy harvesting of a beam using a nonlinear energy sink and a piezoelectric device [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(19): 4444—4457.
- [16] ZHANG H, LI Z Y, YANG Z C, et al. Flutter

- suppression of an airfoil using a nonlinear energy sink combined with a piezoelectric energy harvester [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 125: 107350.
- [17] SHEN J W, WAN S, FU J D, et al. A magnetic plucking frequency up-conversion piezoelectric energy harvester with nonlinear energy sink structure [J]. *Applied Energy*, 2024, 376: 124326.
- [18] LI Y L, HUANG J L, ZHU W D. A generalized incremental harmonic balance method by combining a data-driven framework for initial value selection of strongly nonlinear dynamic systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2025, 169: 104951.
- [19] LAU S L, CHEUNG Y K. Amplitude incremental variational principle for nonlinear vibration of elastic systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1981, 48(4): 959.
- [20] 顾烽. 基于增量谐波平衡法的非线性调谐质量阻尼器—简支梁桥的研究 [D]. 汕头: 汕头大学, 2020.
- GU F. Study on nonlinear tuned mass damper-simply supported beam based on incremental harmonic balance method [D]. Shantou: Shantou University, 2020. (in Chinese)
- [21] 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- CHEN S H. Quantitative analysis methods for strongly nonlinear vibration [M]. Beijing: Science Press, 2007. (in Chinese)
- [22] CHEUNG Y K, CHEN S H, LAU S L. Application of the incremental harmonic balance method to cubic non-linearity systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 140(2): 273—286.
- [23] 晏致涛, 张海峰, 李正良. 基于增量谐波平衡法的覆冰输电线路舞动分析 [J]. *振动工程学报*, 2012, 25(2): 161—166.
- YAN Z T, ZHANG H F, LI Z L. Galloping analysis of iced transmission lines based on incremental harmonic balance method [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2012, 25(2): 161—166. (in Chinese)
- [24] 王鸿宇, 王雪峰, 赵剑, 等. 基于增量谐波平衡法的一维强非线性多自由度波动问题算法研究 [J]. *机械工程学报*, 2024, 60(17): 167—178.
- WANG H Y, WANG X F, ZHAO J, et al. Research on algorithm of strong nonlinear one-dimensional multi-degree-of-freedom lattice wave problem based on incremental harmonic balance method [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2024, 60(17): 167—178. (in Chinese)
- [25] 倪迎鸽, 杨宇, 张伟. 增量谐波平衡法在分段结构非线性气动弹性系统的求解 [J]. *科学技术与工程*, 2019, 19(3): 247—254.
- NI Y G, YANG Y, ZHANG W. Incremental harmonic balance approach for piecewise structural nonlinear aeroelastic system [J]. *Science Technology and Engineering*, 2019, 19(3): 247—254. (in Chinese)
- [26] DAI H L, ABDELKEFI A, WANG L. Usefulness of passive non-linear energy sinks in controlling galloping vibrations [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016, 81: 83—94.
- [27] BLEVINS R D. Flow-induced vibrations [M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [28] BARRERO-GIL A, ALONSO G, SANZ-ANDRES A. Energy harvesting from transverse galloping [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(14): 2873—2883.
- [29] PARKINSON G V, SMITH J D. The square prism as an aeroelastic non-linear oscillator [J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1964, 17(2): 225—239.
- [30] TUMKUR R K R, DOMANY E, GENDELMAN O V, et al. Reduced-order model for laminar vortex-induced vibration of a rigid circular cylinder with an internal nonlinear absorber [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2013, 18(7): 1916—1930.
- [31] MEHMOOD A, NAYFEH A H, HAJJ M R. Effects of a non-linear energy sink (NES) on vortex-induced vibrations of a circular cylinder [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(3): 667—680.
- [32] LIU E G, LI M, DING H. Influence of additional mass and connection of nonlinear energy sinks on vibration reduction performance [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2025, 224: 112123.
- [33] LI Z Y, WANG S, ZHOU S X. Multi-solution phenomena and nonlinear characteristics of tristable galloping energy harvesters with magnetic coupling nonlinearity [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2023, 119: 107076.

附录 1: 公式(17)中涉及矩阵表达式

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} c\omega_0 + c_2\omega_0 - \frac{1}{2}\rho_a D_0 U a_1 \omega_0 - \frac{3}{2U}\rho_a D_0 a_3 \omega_0^3 y_{10}' & -c_2\omega_0 & 0 \\ & -c_2\omega_0 & 0 \\ & -\theta\omega_0 & \theta\omega_0 & c_p\omega_0 \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{L} &= \begin{bmatrix} k_1 + 3k_n y_{10}^2 - 6k_n y_{10} y_{20} + 3k_n y_{20}^2 + k_{\text{lin}} & -3k_n y_{10}^2 + 6k_n y_{10} y_{20} - 3k_n y_{20}^2 - k_{\text{lin}} & \theta \\ -3k_n y_{20}^2 + 6k_n y_{10} y_{20} - 3k_n y_{10}^2 - k_{\text{lin}} & -6k_n y_{10} y_{20} + 3k_n y_{10}^2 + 3k_n y_{20}^2 + k_{\text{lin}} & -\theta \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{r} &= - \begin{bmatrix} \omega_0^2 (m_1 - m_2) y_{10}'' + c_1 \omega_0^2 y_{10}' + k_1 y_{10} + c_2 \omega_0 (y_{10}' - y_{20}') - \frac{1}{2}\rho_a D_0 U a_1 \omega_0 y_{10}' - \frac{1}{2U}\rho_a D_0 a_3 y_{10}'^3 \omega_0^3 \\ \omega_0^2 m_2 y_{20}'' + c_2 (y_{20}' - y_{10}') \omega_0 + k_n y_{20}^3 - 3k_n y_{20}^2 y_{10} + 3k_n y_{10}^2 y_{20} - k_n y_{10}^3 + k_{\text{lin}} (y_{20} - y_{10}) \\ c_p v_0' \omega_0 + \theta (y_{20}' - y_{10}') \omega_0 + \frac{v_0}{R} \end{bmatrix} - \\
 &\begin{bmatrix} k_n y_{10}^3 - 3k_n y_{10}^2 y_{20} + 3k_n y_{20}^2 y_{10} - k_n y_{20}^3 + k_{\text{lin}} (y_{10} - y_{20}) + \theta v_0 \\ -\theta v_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{\omega} &= \begin{bmatrix} c_1 y_{10}' - \frac{1}{2}\rho_a D_0 U a_1 y_{10}' - \frac{3}{2U}\rho_a D_0 a_3 y_{10}'^3 \omega_0^2 + c_2 (y_{10}' - y_{20}') + 2(m_1 - m_2) \omega_0 y_{10}'' \\ c_2 (y_{20}' - y_{10}') + 2m_2 \omega_0 y_{20}'' \\ c_p v_0' + \theta (y_{20}' - y_{10}') \end{bmatrix}, \\
 \boldsymbol{U} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\rho_a D_0 a_1 y_{10}' \omega_0 + \frac{1}{2U^2}\rho_a D_0 a_3 y_{10}'^3 \omega_0^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$