

椭圆形颗粒摩擦碰撞模型对比及实验验证^{*}

程勇波 张欣刚 张树翠 姚文莉[†]

(青岛理工大学 理学院, 青岛 266525)

摘要 多体系统与颗粒介质的摩擦碰撞问题是未来星表探测面临的难点问题,研究非球形颗粒的碰撞行为及状态演化规律具有切实的应用前景,选取合理的接触力模型是提高预测结果准确性的关键.为此,以椭圆形非球形颗粒为研究对象,分别采用迟滞阻尼模型和黏性阻尼模型建立椭圆颗粒与斜面碰撞的动力学模型,通过数值仿真研究了椭圆颗粒在不同接触力模型下的动力学行为.随后,采用亚克力板制备实验样机,对比了不同接触力模型计算结果与实验结果的差异.研究表明:不同的接触力模型与实验结果呈现较大差异.由于亚克力板碰撞恢复系数较低,采用 Lankarani-Nikravesh 模型等高恢复系数模型时,阻尼效应弱、能量耗散少,导致实际恢复系数与预设恢复系数差异明显.如果阻尼项分母中包含恢复系数,则在较宽范围内取值时都能与预设恢复系数相吻合.采用黏性阻尼模型所得结果均与实验结果较为吻合,但容易计算出负接触力.

关键词 非球形颗粒, 摩擦碰撞, 接触力模型, 恢复系数

中图分类号: O313.4

文献标志码: A

Comparative Study and Experimental Validation of Friction-Collision Models for Elliptical Particles^{*}

Cheng Yongbo Zhang Xin'gang Zhang Shucui Yao Wenli[†]

(School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266525, China)

Abstract Friction and collision problems in multibody systems and granular media pose significant challenges in future planetary surface exploration. Investigating the collision behavior and state evolution of non-spherical particles holds promising practical applications. Selecting an appropriate contact force model is crucial for improving the accuracy of predictive outcomes. To this end, elliptical non-spherical particles were chosen as the research object. The hysteretic damping model and the viscous damping model were respectively employed to establish dynamic models for the collision of elliptical particles with an inclined plane. Numerical simulations were conducted to investigate the dynamic behavior of elliptical particles under different contact force models. Subsequently, an experimental prototype was fabricated using acrylic sheets to compare the differences between the simulation results of various contact force models and the experimental findings. The results reveal significant discrepancies between the different contact force models and the experimental outcomes. Due to the relatively low coefficient of restitution of the acrylic sheets, the use of high coefficient of restitution models, such as the Lankarani-Nikravesh model, leads to weak damping effects and minimal energy dissipation, resulting in a significant discrepancy between the actual

2024-11-14 收到第 1 稿, 2024-12-26 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272197, 12202224), 山东省自然科学基金资助项目(ZR2022MA066), National Natural Science Foundation of China(12272197, 12202224), Shandong Province nature Fund project(ZR2022MA066).

[†] 通信作者 E-mail: wenli.yao@qut.edu.cn

coefficient of restitution and the preset coefficient of restitution. If the denominator of the damping term includes the coefficient of restitution, the calculated values can match the preset coefficient of restitution over a wider range. The results obtained using the viscous damping model are generally consistent with the experimental results but are prone to producing negative contact forces.

Key words non-spherical particles, frictional collision, contact force model, coefficient of restitution

引言

非球形颗粒介质广泛存在于深空、深地、深海环境中,颗粒之间以及颗粒与环境的相互作用往往呈现出复杂的动力学特征^[1,2].例如,在星表机器人着陆过程中,颗粒介质之间的强/弱力链分布规律及其耗能机制对着陆安全性具有重要影响.胶囊机器人在人体腔道中自驱运动时,与狭促环境的碰撞是影响其准确到达病灶的重要因素.因此,研究非球形颗粒个体的接触碰撞动力学行为既是研究大规模颗粒介质宏观力学行为的基础,同时也在微型机器人辅助医疗等领域具有切实的科学价值.

椭球形颗粒介质具有描述参数少且无几何奇点的特点,被广泛应用在非球形颗粒介质的数值模拟中.在某些条件下,这类椭球形颗粒还可被简化为椭圆颗粒进行研究.国内外不少学者都对椭圆形颗粒系统的建模方式、接触检测算法和接触力模型进行过研究^[3-9].此外,孙浩^[10]对颗粒碰撞的刚—散耦合系统进行动力学分析,拓展了其动力学问题的理论认识,杨校宇^[11]利用符号距离场对非规则颗粒的接触检测进行研究,并通过对比分析验证其有效性.

上述文献均以天然颗粒介质为研究对象,故可假设其为均质物体,重点研究空管颗粒介质之间的力学行为.对于胶囊机器人这类以个体运动为主的类颗粒介质,在人体非结构环境中同样面临复杂的摩擦接触问题,为了对其惯性参数进行评估,也需要定性地研究这类椭圆颗粒的摩擦接触动力学行为.目前研究椭圆颗粒接触碰撞问题的方法主要分为两类:一是忽略碰撞过程中的细节,假定刚体不可穿透,碰撞过程视为瞬间完成,这类方法被称为离散方法^[12-17],具有计算效率高、速度快等特点^[18].但是采用离散方法处理某些摩擦碰撞问题时也会面临收敛性的问题^[19].另一类方法将接触

碰撞行为视为连续作用过程,允许接触边界相互侵入,这类方法通常被称为罚函数法^[20].此类方法在处理接触碰撞问题时将接触力表示为数值侵入量的函数,能够反映接触界面的相互侵入、局部微变形以及能量耗散问题.因其具有形式简洁、意义明确的特点,在多体动力学以及离散元建模方面得到了广泛的应用^[21].

为了掌握椭球形颗粒介质摩擦接触动力学行为与规律,本文构建了平面椭圆形颗粒与斜面碰撞的动力学模型,联合球形包围盒方法和最短距离接触检测算法快速搜寻潜在接触点,基于几何理论,得到椭圆接触点的曲率半径,并得到其接触刚度的表达式.对比了几类连续接触力模型在模拟椭圆与斜平面接触碰撞时的仿真结果,讨论了各类模型在求解非球形颗粒碰撞问题的差异性.最后,设计了平面椭圆颗粒与斜面的碰撞实验,进一步讨论了各类模型的适用性.

1 椭圆形颗粒接触动力学模型

1.1 椭圆形颗粒动力学模型

椭圆颗粒在 2D 环境下运动时,不妨将其作用力划分为保守力、接触力以及其他外力,则该椭圆颗粒的 Newton-Euler 方程可表示为

$$M\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -\nabla V + \mathbf{G}\mathbf{F}_c + \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{q} = (x, y, \theta)^T \in \mathbf{R}^3$ 是椭圆的构型向量, x 和 y 是其质心坐标, θ 是固连在椭圆上的随动坐标系相对总体坐标系的转角. $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m, J) \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 是椭圆的广义质量阵, m 是椭圆颗粒质量, J 是其转动惯量. 向量 $\mathbf{K}$ 赋存椭圆颗粒的陀螺力, $\nabla V = \nabla V(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3$ 是势能的梯度向量, 其给出了保守力的合力. $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbf{R}^3$ 是接触力的广义力变换阵, 其将接触点的接触力和摩擦力映射为广义力. $\mathbf{F}_c$ 是接触力向量, 其赋存了接触点的法向接触

力和切向摩擦力, $\mathbf{f}_{\text{ext}} \in \mathbf{R}^3$ 是与所有非保守力的合力相对应的广义力。

1.2 椭圆形状函数与接触检测方法

椭圆颗粒在其随动坐标系下的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

式中, a 和 b 分别表示椭圆颗粒的长轴和短轴。在极坐标系下, 椭圆上的任意点与质心的连线与长轴的夹角可用来表示其方位。此时, 任意点的局部坐标和其方位角 β 的关系可表示为

$$x = L(\beta) \cos \beta, \quad y = L(\beta) \sin \beta \quad (3)$$

$$L(\beta) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \beta + a^2 \sin^2 \beta}} \quad (4)$$

式中, $L(\beta)$ 是该点到椭圆质心的长度。通过椭圆上一点的表示方法, 就可利用局部坐标系和全局坐标系的变换关系得到椭圆上任一点在空间中的位置向量, 如图 1 所示。

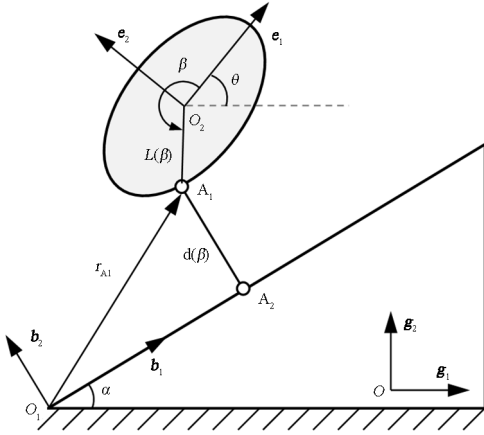


图 1 椭圆刚体颗粒与斜面碰撞

Fig. 1 Collision between elliptical particles and slopes

为表示椭圆上任意点到斜面的距离, 建立如图 1 所示的三个参照系。其中, $\{\mathbf{g}_1 - \mathbf{O} - \mathbf{g}_2\}$ 为总体参照系, 参照系 $\{\mathbf{b}_1 - \mathbf{O}_1 - \mathbf{b}_2\}$ 固定在斜面上, $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{O}_2 - \mathbf{e}_2\}$ 为固连在椭圆上的随动参照系。斜面的仰角用 α 表示, 随动参照系与水平轴的夹角用 θ 表示。

利用参照系 $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{O}_2 - \mathbf{e}_2\}$ 和 $\{\mathbf{g}_1 - \mathbf{O} - \mathbf{g}_2\}$ 之间的变换矩阵, 潜在接触点 A_1 的矢径可表示为

$$\begin{cases} x_{A_1} = x + L(\beta) \cos(\theta + \beta) \\ y_{A_1} = y + L(\beta) \sin(\theta + \beta) \end{cases} \quad (5)$$

式中, x 和 y 是椭圆质心 O_2 相对于 O 的坐标。为了得到 A_1 点到其最近点 A_2 的距离, 需将公式 (5) 中的坐标变换到斜面参照系 $\{\mathbf{b}_1 - \mathbf{O}_1 - \mathbf{b}_2\}$ 中, 得到

$$d(\beta) = y \cos \alpha - x \sin \alpha + L(\beta) \sin(\theta + \beta - \alpha) \quad (6)$$

利用包围盒方法预估接触状态, 一旦检测到可能发生碰撞, 就利用公式 (6) 求解 $d(\beta)$ 的最小值。若 $d(\beta)$ 大于 0, 表示椭圆尚未与斜面发生碰撞, 若 $d(\beta)$ 小于 0, 其绝对值就是嵌入量的最大值。

1.3 连续接触力模型

采用连续接触力模型时, 需要确定材料的接触刚度和恢复系数等参数。完全弹性 Hertz 接触力模型由 Hertz 于 1881 年提出^[22], 可表示为接触刚度和嵌入深度的非线性函数

$$F = K \delta^n \quad (7)$$

其中, δ 为接触变形量, n 为能量指数, K 为赫兹接触刚度。对于两个球形接触面, 其形式为

$$K = \frac{4}{3} e^* \sqrt{R}, \quad R = \sqrt{\frac{R_i R_j}{R_i \pm R_j}}, \quad \frac{1}{e^*} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \quad (8)$$

式中, E_i 和 E_j 分别为两个接触物体的弹性模量, R_i 和 R_j 分别为两个球面的曲率半径, ν_i 和 ν_j 是泊松比。

当椭圆上的潜在接触点沿边界变化时, 其接触点的曲率亦随之变化。因此, 为了准确求解接触点的法向碰撞力, 需要确定其曲率半径。由于斜面的曲率半径无穷大, 故取 $R_j = \infty$ 。为求解椭圆边界上一点的曲率半径, 可先对椭圆方程求如下微分

$$\frac{2x dx}{a^2} + \frac{2y dy}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y} \quad (9)$$

$$y'' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{y^3} \cdot (y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2) \quad (10)$$

式中的 x 和 y 表示接触点在随动坐标系 $\{\mathbf{e}_1 - \mathbf{O}_2 - \mathbf{e}_2\}$ 中的坐标值。则椭圆边界上任一点的曲率可写为

$$\frac{1}{R_i} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2 b^4 x^2 + a^4 b^2 y^2}{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (11)$$

椭圆接触点的接触半径随之确定

$$R_i = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^4 x^2 + a^4 b^2 y^2} \quad (12)$$

Hertz 接触模型描述了无能量耗散的完全弹性碰撞, 这与本文实验使用的亚克力材料有着较大的差异。为此, 我们引入含耗散项的接触力模型

$$F = K \delta^n + D \dot{\delta} \quad (13)$$

式中, $D = \chi \delta^m$ 为阻尼系数, χ 为迟滞阻尼因子。

这类模型又可以分为两类:一类是迟滞阻尼接触力模型^[23-29], 另一类是黏性阻尼接触力模型^[30,31]. 本文取用其中若干典型的接触力模型来开展椭圆颗粒与斜面之间的碰撞行为, 并比较这些模型与实验结果的差异性. 作为补充, 本文还采用了多体系统动力学软件中常用的迟滞阻尼接触力模型和离散元软件中常用的黏性阻尼接触力模型来对椭圆碰撞过程进行补充验证, 其中多体系统动力学软件中常用的迟滞阻尼接触力模型可表示为

$$F_n = K \cdot \delta^n + \text{step}(\delta, 0, 0, d_m, c_m) \cdot \dot{\delta} \quad (14)$$

其中, $\text{step}(\delta, 0, 0, d_m, c_m) \cdot \dot{\delta}$ 为阻尼耗散项, $\dot{\delta}$ 为相对碰撞速度, $\text{step}(\delta, 0, 0, d_m, c_m)$ 为矩形阶梯函数

$$\text{step}(\delta, 0, 0, d_m, c_m) = \begin{cases} 0, & \delta \leq 0 \\ \frac{\delta^2}{d_m^2} c_m \left(3 - \frac{2\delta}{d_m} \right), & 0 < \delta < d_m \\ c_m, & \delta \geq d_m \end{cases} \quad (15)$$

式中, 最大阻尼系数 c_m 根据不同的情况取值, 一般情况为刚度系数 K 的 1%。

离散元软件中常用的黏性阻尼接触力模型可表示为

$$F_n = K \cdot \delta^n + \alpha \sqrt{MK} \delta^{0.25} \cdot \dot{\delta} \quad (16)$$

其中, $\alpha = \sqrt{\frac{5 \ln^2 c_r}{\pi + \ln^2 c_r}}$ 是恢复系数的函数. 质量比

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, m_1 \text{ 和 } m_2 \text{ 分别为碰撞物体的质量.}$$

采用修正的库仑摩擦模型来反映椭圆颗粒与斜面碰撞时的摩擦, 该模型可表示为

$$F_f = -\mu F_N (1 - e^{-\frac{\alpha}{v_{r1}} |v_r|}) \text{sgn} |v_r| \quad (17)$$

其中, F_f 表示摩擦力, μ 是摩擦系数, F_N 为法向接触力, v_{r1} , α 为大于 0 的一个常值, v_r 为相对碰撞速度. $\text{sgn}()$ 为多值函数, 可以写为

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (18)$$

修正的库仑模型实际上将速度零点处的集值函数进行了光滑化, 只要相对速度为 0, 则摩擦力为 0, 显然会在速度零点处诱导摩擦状态的蠕动, 因此不能准确反映黏滑状态的切换, 但对于本文所述的斜碰撞而言, 可以证明这种处理仍然具有可信的精度。

2 实验验证

为获得椭圆颗粒与斜面碰撞的真实轨迹, 设计了图 2 所示的实验装置. 各组件均为亚克力板材, 通过激光切割机制备, 包括两个透明长方形板、一个斜面和一个由亚克力板切成的椭圆片, 其长、短轴规格为 20 mm × 10 mm. 透明亚克力板平行放置, 中间夹持亚克力板斜面, 并通过底部的磁吸装置固定. 斜面的一端固定, 另一端放置在实验升降台上, 通过试验台的升降用于调整其倾斜角度. 椭圆片从上部释放后, 两端亚克力板留出的空间使其做平面运动, 并与斜面发生碰撞。

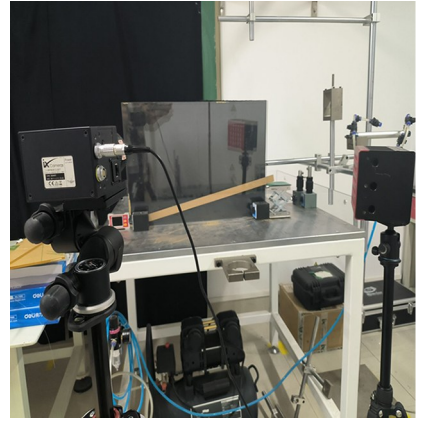


图 2 椭圆刚体颗粒碰撞实验示意图

Fig. 2 Schematic diagram of elliptical rigid body particle collision experiment

通过高速相机拍摄椭圆片下落轨迹, 在 Tracker 软件中对标记点进行跟踪来获得实验数据. 在实验环境下, 椭圆片初始坐标为 $\mathbf{q} = [0.215, 0.19, \pi/1.94]^T$. 椭圆颗粒质量为 0.0025 kg, 亚克力斜面切割宽度大, 故其截面惯性矩较大, 可忽略碰撞过程的弹性变形而假定其为刚体. 亚克力斜面与地面的夹角通过实验仪器测量值为 14° , 亚克力板材的弹性模量取为 1.7×10^8 Pa, 泊松比为 0.35. 椭圆自由下落以及碰撞弹跳过程的轮廓及其轨迹如图 3 所示。

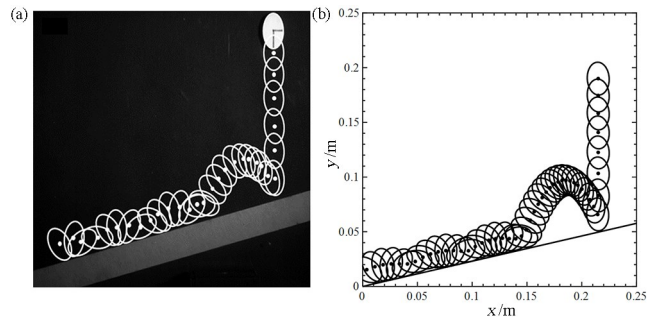


图 3 椭圆与斜面碰撞实验: (a) 实验轨迹; (b) 仿真轨迹

Fig. 3 Ellipse and slope impact experiment: (a) Experimental trajectory; (b) Simulation trajectory

其中,仿真模型所采用的恢复系数由实验获得.通过多次实验测量亚克力材料之间的摩擦系数在0.3~0.4之间,取 $\mu=0.3$.

3 结果分析

3.1 迟滞阻尼接触力模型

首先采用多组迟滞阻尼接触力模型进行仿真,恢复系数取 $c_r=0.35$.采用 Hunt-Crossley 模型、Herbert-Mc Whannel 模型、Lee-Wang 模型以及 Lankarani-Nikravesh 模型^[19] 分别进行仿真,所得轨迹与实验轨迹的对比如图 4 所示.由图中结果可见,在相同的仿真模拟条件下这几种接触力模型与椭圆形颗粒的初次碰撞实验轨迹存在显著差异.尤其是 Lankarani-Nikravesh 模型、Hunt-Crossley 模型、Herbert-Mc Whannel 模型,三者呈现出“虚假弹跳”的特点,说明这几种接触力模型在单次碰撞过程中的能量耗散不足以使实际恢复系数达到预设恢复系数,这种行为在图 5 中展示的更加鲜明.

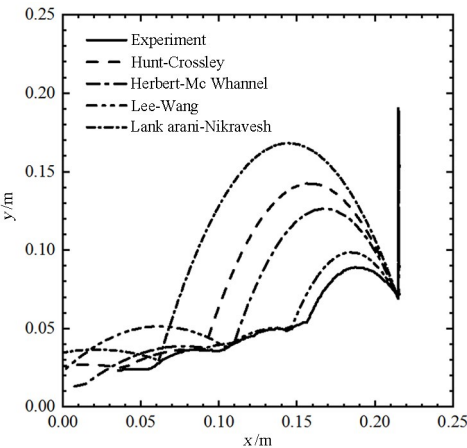


图 4 迟滞阻尼接触力模型仿真与实验轨迹对比图
Fig. 4 Comparison between simulation and experimental trajectory of hysteresis damping contact force model

图 5 中给出了单次碰撞过程中侵入深度和法向碰撞力之间的关系.可见,由于阻尼机制的存在,各类模型都形成了迟滞环,但适用于高恢复系数的模型所产生的迟滞环所包络的区域较小,故而耗散的碰撞能量较少,从而造成了颗粒的虚假弹跳.例如, Lee-Wang 模型的迟滞阻尼因子为 $3(1-c_r)/4$,而 LN 模型的迟滞阻尼因子为 $3(1-c_r^2)/4$.显见,两种模型的系数相同,差异仅在于 LN 模型中的恢复系数含平方项,若采用低恢复系数,则其阻尼因子相比较小,无法将碰撞能量有效地耗散,实际仿真

时发现,预设恢复系数和实际得到的恢复系数差异较大.而采用高恢复系数时,平方项的放缩效应被弱化了,因此,这类模型更适合求解高恢复系数的碰撞问题.如果采用那些适用于低恢复系数的接触力模型,上述情况就得到了很大改善,如图 6 所示.与之相应的迟滞环曲线如图 7 所示.

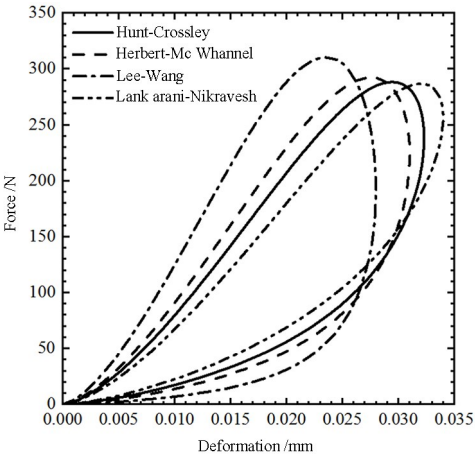


图 5 迟滞阻尼接触力模型侵入量与接触力的关系图
Fig. 5 Relationship between intrusion and contact force of hysteresis damping contact force model

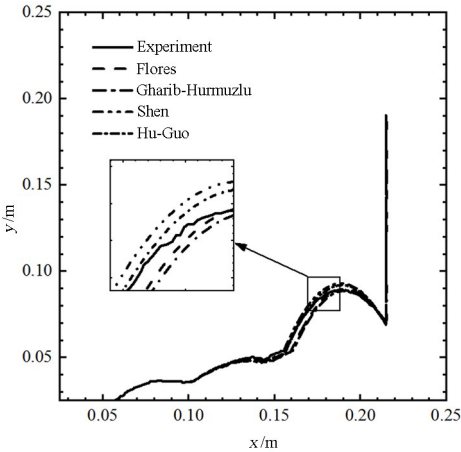


图 6 迟滞阻尼接触力模型仿真与实验轨迹对比图
Fig. 6 Comparison between simulation and experimental trajectory of hysteresis damping contact force model

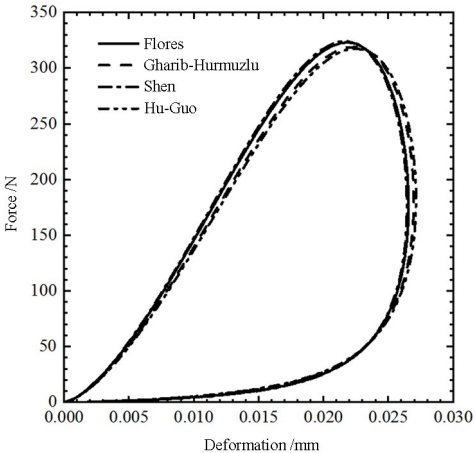


图 7 迟滞阻尼接触力模型侵入量与接触力的关系图
Fig. 7 Relationship between intrusion and contact force of hysteresis damping contact force model

以图 6 采用的 Flores 模型为例,这类模型认为在碰撞的压缩结束阶段,系统的初始动能分为碰撞后的系统动能、损耗的能量以及被转化的势能,从而得到新的迟滞阻尼因子,其特点是迟滞阻尼因子的分母中含有恢复系数 c_r ,这使其在较宽的范围内取值时,预设恢复系数和实际恢复系数都能吻合。

3.2 黏性阻尼接触力模型

上述仿真所采用的连续接触力模型都包含初始碰撞速度,在判断碰撞发生后并不需要区分碰撞的压缩阶段和恢复阶段,计算流程简洁。如果碰撞系统包含大规模初始接触的非球形颗粒,这类模型反而限制了对颗粒介质中孤立波传播特性的刻画。因此,进一步采用 Tsuji、Jankowski 等黏性接触力模型进行仿真,所得结果如图 8 所示,阈值对应的迟滞环曲线如图 9 所示。

对比图 6 和图 8 可见,黏性接触力模型在描述

低恢复系数碰撞时和实验结果也有很高的吻合度,但图 7 和图 8 的对比就呈现出明显的不同:黏性接触力模型的迟滞环包含有受拉区域,表示接触物体在相互脱离之前计算出了负接触力,这显然与接触力的物理意义相违背。图 10 给出了两类模型迟滞环之间的对比,图 11 给出了接触力的时间历程曲线。

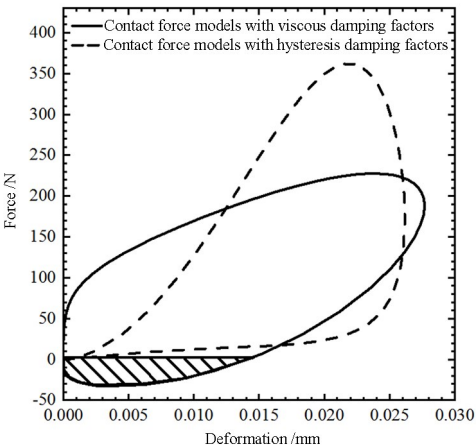


图 10 迟滞阻尼接触力模型与黏性阻尼接触力模型对比图
Fig. 10 Comparison between hysteretic damping contact force model and viscous damping contact force model

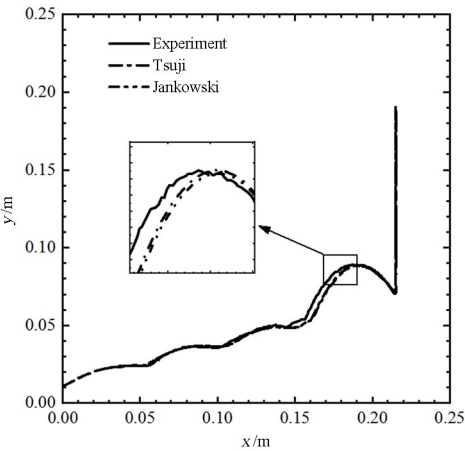


图 8 黏性阻尼接触力模型仿真与实验轨迹对比图
Fig. 8 Comparison between simulation and experimental trajectory of viscous damping contact force model

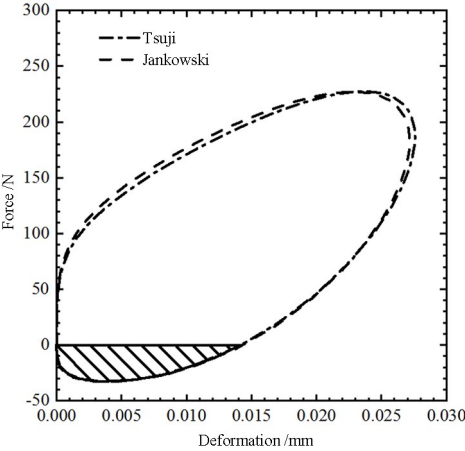


图 9 不同黏性阻尼接触力模型侵入量与接触力对比图
Fig. 9 Comparison of intrusion amount and contact force under different viscous damping contact forces model

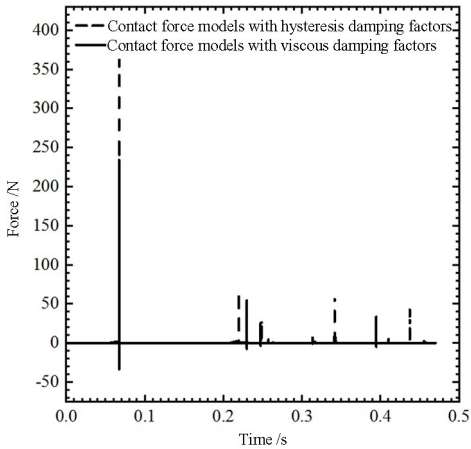


图 11 迟滞阻尼接触力模型与黏性阻尼接触力模型对比图
Fig. 11 Comparison between hysteretic damping contact force model and viscous damping contact force model

依据图 10 的结果不难发现,利用接触力模型求解碰撞问题时,在某些情况下会得到“负”接触力。人们往往形成一个武断的认识,即包含迟滞阻尼的接触力模型不会出现“拉力”区域,而黏性阻尼模型则会计算出负接触力。需要指明的是,上述结论仅限于刚体之间的碰撞。从图 10 中还可以发现,在迟滞阻尼模型中,碰撞的恢复阶段,阻力会使接触力快速衰减,其自身也迅速衰减到 0。而在黏性阻尼模型中,黏性阻力反而在碰撞的压缩起始阶段和恢复结束阶段明显大于迟滞阻尼。实际上,

尽管负接触力的计算结果违背了接触力必须非负的物理性质,但其形成区域较小,且仅存在于碰撞的恢复阶段,对颗粒介质孤立波的传播影响较小,因此这类模型仍然在 EDEM 软件中被广泛使用. 如果碰撞系统中包含弹簧力元,则迟滞阻尼模型亦有可能计算出负接触力^[12]. 这是由于碰撞激发了弹簧系统的高频振荡,即便在单次碰撞的压缩和恢复过程中,碰撞点的加速度也经历了极为复杂的振荡,力元的本构关系和接触力模型的本构关系相互演绎,互相干扰,可能求出负的接触力.

4 结论

以椭圆颗粒为对象建立动力学方程,通过求解潜在接触点的曲率半径得到碰撞模型关键参数,进而研究了这类非球形颗粒的摩擦碰撞问题,并通过实验验证了所提模型的准确性. 主要结论如下:

(1)有别于球形颗粒,非球形颗粒在摩擦碰撞过程中呈现的动力学行为与其几何形貌相关,既需要高效的碰撞检测算法,还需要依据接触点的几何特征获得准确的碰撞参数.

(2)黏性阻尼模型仿真结果与实验结果较为吻合,但易算出负接触力. 不同的迟滞阻尼模型则呈现出显著的差异. 具体而言,在以 Lankarani-Nikravesh 模型为代表的接触力模型中,阻尼项分母中通常不含有恢复系数,因而对碰撞能量的耗散较少,适用于高恢复系数仿真,在低恢复系数下易出现虚假“弹跳”. 以 Flores 模型为代表的一类模型中,阻尼项分母中包含恢复系数,使阻尼项呈现双曲函数的特点:在低恢复系数下取值高,高恢复系数下取值低,从而使预设恢复系数在较宽范围内取值时,都能与实际恢复系数相吻合.

(3)采用黏性接触力模型所得迟滞环存在受拉区域,使接触物体在分离阶段产生负接触力. 尽管与接触力的物理意义相违背,但与实验结果仍然较为吻合,并不会对颗粒介质中的孤立波传播造成明显的影响. 由于该模型不含初始碰撞速度,更适合大规模非球形颗粒的动力学仿真.

参考文献

[1] 崔泽群, 陈友川, 赵永志, 等. 基于超二次曲面的非球形离散单元模型研究[J]. 计算力学学报, 2013, 30(6): 854—859.

CUI Z Q, CHEN Y C, ZHAO Y Z, et al. Study of discrete element model for non-sphere particles base on super-quadratics [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2013, 30(6): 854—859. (in Chinese)

[2] KAFASHAN J, WIACEK J, ABD RAHMAN N, et al. Two-dimensional particle shapes modelling for DEM simulations in engineering: a review [J]. Granular Matter, 2019, 21(3): 80.

[3] ROTHENBURG L, BATHURST R J. Numerical simulation of idealized granular assemblies with plane elliptical particles [J]. Computers and Geotechnics, 1991, 11(4): 315—329.

[4] DŽIUGYS A, PETERS B. A new approach to detect the contact of two-dimensional elliptical particles [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2001, 25(15): 1487—1500.

[5] ZHU Y, SHUKLA A, SADD M H. The effect of microstructural fabric on dynamic load transfer in two dimensional assemblies of elliptical particles [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1996, 44(8): 1283—1303.

[6] TING J M, KHWAJA M, MEACHUM L R, et al. An ellipse-based discrete element model for granular materials [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1993, 17(9): 603—623.

[7] NG T T. Numerical simulations of granular soil using elliptical particles [J]. Computers and Geotechnics, 1994, 16(2): 153—169.

[8] 李立青, 蒋明镜, 吴晓峰. 椭圆形颗粒堆积体模拟颗粒材料力学性能的离散元数值方法[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 1): 713—718.

LI L Q, JIANG M J, WU X F. A developed discrete element model NS2D for simulating mechanical properties of elliptical particles assemblages [J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, 32(S1): 713—718. (in Chinese)

[9] MIRGHASEMI A A, NAEIJ M. The effect of initial elongation of elliptical particles on macro-micro-mechanical behavior during direct shear test [J]. Procedia Engineering, 2015, 102: 1476—1483.

[10] 孙昊, 刘铸永. 土壤碰撞问题的刚—散耦合动力学分析[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(9): 33—40.

SUN H, LIU Z Y. Rigid-discrete coupling dynamic

- analysis of soil contact/impact problem [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(9): 33–40. (in Chinese)
- [11] 杨校宇, 温童歌, 曾祥远. 应用符号距离场的不规则颗粒离散元数值方法[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(11): 1–9.
- YANG X Y, WEN T G, ZENG X Y. Irregular particle discrete element method with signed distance field approach [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(11): 1–9. (in Chinese)
- [12] 张欣刚, 齐朝晖, 王刚, 等. 基于线性互补问题的多体系统接触/碰撞动力学研究[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(5): 276–282.
- ZHANG X G, QI Z H, WANG G, et al. Contact/impact dynamics of multi-body system based on LCP [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(5): 276–282. (in Chinese)
- [13] ROGERS R J, ANDREWS G C. Dynamic simulation of planar mechanical systems with lubricated bearing clearances using vector-network methods [J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1977, 99(1): 131–137.
- [14] RAVN P. A continuous analysis method for planar multibody systems with joint clearance [J]. *Multibody System Dynamics*, 1998, 2(1): 1–24.
- [15] BROGLIATO B, TEN DAM A A, PAOLI L, et al. Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2002, 55(2): 107–150.
- [16] FAZELI N, KOLBERT R, TEDRAKE R, et al. Parameter and contact force estimation of planar rigid-bodies undergoing frictional contact [J]. *The International Journal of Robotics Research*, 2017, 36(13/14): 1437–1454.
- [17] GABICINI M, FUSCO F. On state and inertial parameter estimation of free-falling planar rigid bodies subject to unscheduled frictional impacts [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 141: 171–195.
- [18] 姚文莉, 岳嵘. 有争议的碰撞恢复系数研究进展[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(19): 43–48.
- YAO W L, YUE R. Advance in controversial restitution coefficient study for impact problems [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(19): 43–48. (in Chinese)
- [19] 王庚祥, 马道林, 刘洋, 等. 多体系统碰撞动力学中接触力模型的研究进展[J]. *力学学报*, 2022, 54(12): 3239–3266.
- WANG G X, MA D L, LIU Y, et al. Research progress of contact force models in the collision mechanics of multibody system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(12): 3239–3266. (in Chinese)
- [20] 董富祥, 洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述[J]. *力学进展*, 2009, 39(3): 352–359.
- DONG F X, HONG J Z. Review of impact problem for dynamics of multibody system [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352–359. (in Chinese)
- [21] 田强, 刘钺, 李培, 等. 多柔体系统动力学研究进展与挑战[J]. *动力学与控制学报*, 2017, 15(5): 385–405.
- TIAN Q, LIU C, LI P, et al. Advances and challenges in dynamics of flexible multibody systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2017, 15(5): 385–405. (in Chinese)
- [22] HUNT K H, CROSSLEY F R E. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42(2): 440.
- [23] HERBERT R G, MCWHANNELL D C. Shape and frequency composition of pulses from an impact pair [J]. *Journal of Engineering for Industry*, 1977, 99(3): 513–518.
- [24] LEE T W, WANG A C. On the dynamics of intermittent-motion mechanisms. Part 1: Dynamic model and response [J]. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, 1983, 105(3): 534–540.
- [25] LANKARANI H M, NIKRAVESH P E. Continuous contact force models for impact analysis in multibody systems [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1994, 5(2): 193–207.
- [26] FLORES P, MACHADO M, SILVA M T, et al. On the continuous contact force models for soft materials in multibody dynamics [J]. *Multibody System Dynamics*, 2011, 25(3): 357–375.
- [27] HU S W, GUO X L. A dissipative contact force model for impact analysis in multibody dynamics [J]. *Multibody System Dynamics*, 2015, 35(2): 131–151.
- [28] GHARIB M, HURMUZLU Y. A new contact force model for low coefficient of restitution impact [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2012, 79(6): 064506.

- [29] HU G M, HU Z Y, JIAN B, et al. On the determination of the damping coefficient of non-linear spring-dashpot system to model hertz contact for simulation by discrete element method [C]//2010 WASE International Conference on Information Engineering. New York: IEEE, 2010: 295—298.
- [30] TSUJI Y, TANAKA T, ISHIDA T. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe [J]. Powder Technology, 1992, 71(3): 239—250.
- [31] JANKOWSKI R. Non-linear viscoelastic modelling of earthquake-induced structural pounding [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2005, 34(6): 595—611.