

多目标权重自适应虚拟轨道列车主动转向研究^{*}

陆野 杨蔡进[†] 李道洋 周文清 张卫华

(西南交通大学 轨道交通运载系统全国重点实验室, 成都 610031)

摘要 为提高虚拟轨道列车在不同车速下的路径跟踪精度和车辆稳定性,基于虚拟轨道列车动力学模型和模型预测控制理论,提出一种依据车速自适应调节成本函数权重系数的主动转向控制算法.首先,建立三节编组虚拟轨道列车动力学模型,为提高模型准确性,采用遗传算法对轮胎侧偏刚度进行参数辨识;其次,利用移位寄存器存储首车行驶轨迹作为后车目标路径;然后,基于模型预测控制理论确定第一、四、六轴转向角,基于 Stanley 算法确定第二、三、五轴转向角,设计了考虑车辆横向误差、质心侧偏角及车轮转角变化量的多目标控制器;接着,针对固定权重系数的多目标控制器在不同车速下适应性较差的问题,提出一种基于车速动态优化权重系数的模糊调节策略;最后,搭建 TruckSim/Simulink 联合仿真平台,在典型道路工况上,通过设置不同速度研究车辆动力学特性.结果表明:自适应权重控制器能够较好地提高虚拟轨道列车在不同速度下的路径跟踪精度与车辆稳定性;相较于固定权重控制器,自适应权重控制器能更好地适应虚拟轨道列车运行速度的变化,改善了虚拟轨道列车的运行性能.

关键词 虚拟轨道列车, 路径跟踪, 车辆稳定性, 多目标控制, 遗传算法

中图分类号:U469.5

文献标志码:A

Research on Active Steering of Virtual Rail Train with Multi-Objective Adaptive Weight^{*}

Lu Ye Yang Caijin[†] Li Daoyang Zhou Wenqing Zhang Weihua

(State Key Laboratory of Rail Transit Vehicle System, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031)

Abstract To improve the path tracking accuracy and vehicle stability of virtual rail trains at different speeds, an active steering control algorithm is proposed based on the virtual rail train dynamics model and model predictive control theory, which adaptively adjusts the weight coefficients of the cost function according to the vehicle speed. Firstly, a dynamic model of a three-car virtual track train is established. To improve the accuracy of the model, genetic algorithm is used to identify the parameters of tire lateral stiffness. Secondly, shift registers are used to store the trajectory of the first vehicle as the target path for the following vehicle. Then, based on model predictive control theory, the steering angles of the first, fourth, and sixth axes are determined, and based on Stanley algorithm, the steering angles of the second, third, and fifth axes are determined. A multi-objective controller considering vehicle lateral error, center of mass lateral angle, and wheel angle variation is designed. Next, to address the issue of poor adaptability of multi-objective controllers with fixed weight coefficients at different vehicle speeds, a fuzzy adjustment strategy based on dynamic optimization of weight coefficients at vehicle speeds is

2024-10-11 收到第 1 稿,2024-11-22 收到修改稿.

^{*} 国家重点研发计划资助项目(2018YFB101603-06),四川省科技计划资助项目(2024NSFSC0439,2020JDRC0008),National Key Research and Development Program (2018YFB101603-06), Sichuan Science and Technology Program (2024NSFSC0439, 2020JDRC0008).

[†] 通信作者 E-mail:ycj78_2012@163.com

proposed. Finally, the TruckSim/Simulink simulation platform is built to study the dynamic characteristics of vehicles under typical road conditions by setting different speeds. The results indicate that the adaptive weight controller can effectively improve the path tracking accuracy and vehicle stability of virtual rail trains at different speeds. Compared to fixed weight controllers, adaptive weight controllers can better adapt to changes in the operating speed of virtual rail trains and improve their operational performance.

Key words virtual rail train, path tracking, vehicle stability, multi-objective control, genetic algorithm

引言

虚拟轨道列车^[1,2]是一种公共路权运行环境下的非轮轨接触导向运输系统,具有建设周期较短、成本低廉、绿色环保、运行灵活等特点,通过多车体铰接增加车辆客载运量,提升了路网的利用率,可作为城市公共交通运输体系的有益补充^[3]。区别于传统轨道车辆,虚拟轨道列车不依赖物理轨道约束,可以在既有城市道路运行——基于胶轮承载和转向,采用主动转向控制技术,实现车体沿着路面铺设的感应标识线(虚拟轨道)的“类轨”行驶。

围绕虚拟轨道列车的多轴主动转向控制问题,国内外学者已开展了相关研究。Wagner等^[4]基于各车体后轴中心始终位于首车转向几何确定的某动态圆周的假设条件,运用扩展阿克曼转向几何原理确立了列车各车轮的理论转角。Leng等^[5]针对一种龙门式架构的虚拟轨道列车,基于预瞄PID算法的分布式虚拟驾驶模型提出了各车轴协同转向策略,实现了列车循迹行驶。Zhang等^[6]考虑具有 n 节车体的虚拟轨道列车,基于车辆运动学模型设计了一种车体后轴预瞄主动转向及前轴辅助协同的多轴协同转向控制器,能够有效减小车辆在循迹过程中车体间运动相互干涉。赵煜等^[7]以相邻车体间理想铰接角为控制目标,基于前馈加反馈的控制策略,提出了一种多铰接车辆的路径跟踪方法,解决了后车在行驶过程中的路径偏移问题。孙帮成等^[8]运用虚位移和虚功原理建立了汽车列车(虚拟轨道列车)的一般性动力学方程,提出一种多轴协同转向控制方法。张众华等^[9]考虑了系统模型的不确定性和未知干扰,设计了基于自适应超螺旋滑模的车辆路径跟踪控制器,提高了车辆循迹的稳定性。值得注意的是,上述研究往往偏重于解决车辆

多轴协同转向问题,以减少车辆的转弯半径,提高运行的灵活性,保证车辆可以在城市复杂路网中行驶。但虚拟轨道列车作为一种城市公共交通工具,除了满足在既定线路上行驶要求,还需要在循迹运行中综合考虑其他因素,比如车辆稳定性,特别是车辆高速运行及弯道行驶时的稳定性问题尤为突出。显然,上述问题涉及多目标优化与控制,即多目标条件下车辆主动转向控制问题。

目前,车辆多目标转向的经典控制方法主要包括线性二次型调节器(LQR)^[10,11]和模型预测控制(MPC)^[12,13],且已在传统汽车领域得到了一定的应用。Meng等^[10]将LQR和遗传算法相结合,基于车辆运动学误差模型设计了考虑车架中心点线速度和角速度的新型控制器,提高了铰接车辆转向灵活性。Ni等^[11]基于LQR算法设计了一种挂车主动转向控制器,并对控制器的加权矩阵进行了优化,增强了车辆的路径跟踪性能。杜荣飞等^[12]通过车辆稳定性在线识别,拓展传统模型预测控制器,设计了一种变时域控制器以提高车辆行驶稳定性及循迹精度。Zhang等^[13]考虑模型预测控制对车辆动态特性的影响,通过在线调整模型预测控制的预测范围提高了车辆路径跟踪性能及动态稳定性。王艺等^[14]基于模型预测控制原理设计了一种智能网联车辆的路径跟踪控制器,在控制过程中,系统能够根据车联网选择合适的控制参数,提高了车辆高速运行时转向精度和稳定性。一般而言,模型预测控制^[15]能较好地处理多优化目标、多约束的控制问题,因此可以应用于虚拟轨道列车复杂动力学控制问题。这里需要说明的是,传统的模型预测控制器针对多目标优化控制往往采用固定的权重系数。考虑到虚拟轨道列车具有轴重大、车身长、运行

环境复杂等特点,固定权重的模型预测控制器无法使列车根据运行环境的变化自主调节多控制目标中某一项目标的侧重,即针对虚拟轨道列车这一特殊对象来说,固定权重控制器的适应性不足.

针对上述不足,本文选取三编组虚拟轨道列车为研究对象,首先,建立了三节编组虚拟轨道列车动力学模型,通过遗传算法迭代求解出模型中的未知参数.其次,以首轴行驶路径存储作为后车参考路径,基于模型预测控制算法与 Stanley 算法设计了多目标控制器,确定各车轴的转向.然后,以首车速度作为输入设计模糊调节策略实时动态优化成本函数权重系数来提高控制器在不同速度下的适应性.最后,利用联合仿真平台研究了虚拟轨道列车在不同速度工况下的动力学响应,分析了路径跟踪性能和车辆质心侧偏角变化情况.

1 虚拟轨道列车

虚拟轨道列车由牵引车模块和拖车模块组合而成,每个模块均为双轴胶轮承载,所有轴均为转向轴.列车基于车载传感装置感知车体与虚拟轨道之间的相对位置关系,并将传感数据传输至路径跟踪控制器完成主动转向循迹功能.列车具体结构及

转向原理在文献[16]和文献[17]中有相关说明.本文以常见的三节编组虚拟轨道列车为例,研究列车在不同速度下的主动转向控制问题.虚拟轨道列车的特殊架构导致车轴主动转向控制较为困难,主要体现在不仅要关注车辆的路径跟踪精度问题,还要防止由于车身较长,车辆单元较多导致的后车在转向中可能出现甩尾、侧滑等车辆稳定性问题.虚拟轨道列车作为一种新型城市轨道交通,设计时速较高,车辆稳定性问题在高速转弯工况下尤为突出.本文考虑了路径跟踪精度和车辆横向稳定性进行六根车轴的主动转向控制:针对车轴 A_1 、 A_4 和 A_6 的转向控制,将上述车轴横向误差以及车辆质心侧偏角作为优化目标,基于 MPC 理论确定上述车轴转角;针对车轴 A_2 、 A_3 和 A_5 转向控制,基于 Stanley 算法确定上述车轴转角以协调列车转向;针对固定权重 MPC 控制器对列车速度变化适应性较差的问题,提出一种基于车速动态优化权重系数的模糊调节策略.值得注意的是,考虑后车参考路径不易获得的问题,本文假定首车自主循迹并通过移位寄存器生成后车参考路径,故本文着重研究后车路径跟踪性能以及行驶稳定性.上述控制逻辑如图 1 所示.

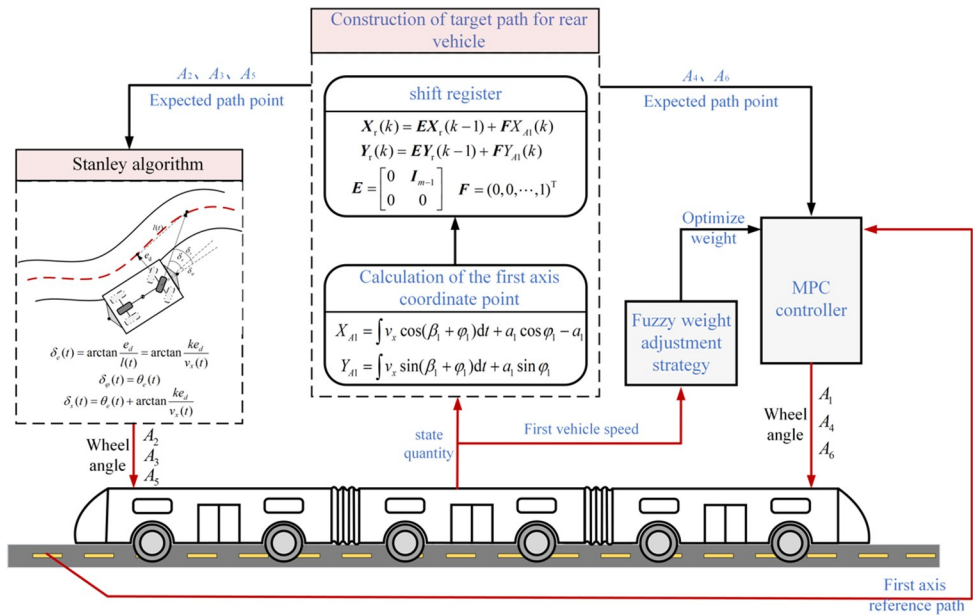


图 1 虚拟轨道列车主动转向控制逻辑图

Fig. 1 Control logic diagram of virtual rail train active steering

虚拟轨道列车结构如图 2 所示, A 为车轴,列车具有六根车轴 $A_1 \sim A_6$; a_i 和 b_i 分别表示车辆质心到前轴和后轴的距离,其中 i 表示车辆标号, $i =$

1, 2, 3; H_1 和 H_2 表示车间铰接点; d_1 和 d_3 表示后轴到后铰接点的距离; d_2 和 d_4 表示前轴到前铰接点的距离. 车辆参数值如表 1 所示.

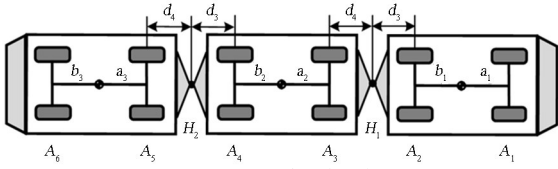


图2 虚拟轨道列车结构图

Fig. 2 Structure diagram of the virtual rail train

表1 虚拟轨道列车参数

Table 1 Parameters of virtual rail train

Parameter	Value
Mass of first car m_1/kg	9140
Intermediate car mass m_2/kg	6330
Tailcar mass m_3/kg	6330
Distances a_i/m	2.6
Distances b_i/m	2.6
Distances d_i/m	2.25

2 列车动力学模型

2.1 整车动力学建模

列车动力学模型主要作为控制器的预测模型来使用,建模过程中需要在能够较为准确地描述车辆动力学特征的基础上进行适当合理化假设,以减少计算量.本文做出如下假设:(1)车辆无垂向的运动;(2)忽略悬架的作用;(3)忽略车辆前后轴载荷的转移;(4)假设轮胎侧偏特性处于线性范围;(5)假设车辆纵向速度保持不变.本文基于上述假设,将虚拟轨道列车简化为经典单轨线模型^[18].如图3所示,将等效轮胎代替同一车轴左右两侧轮胎.

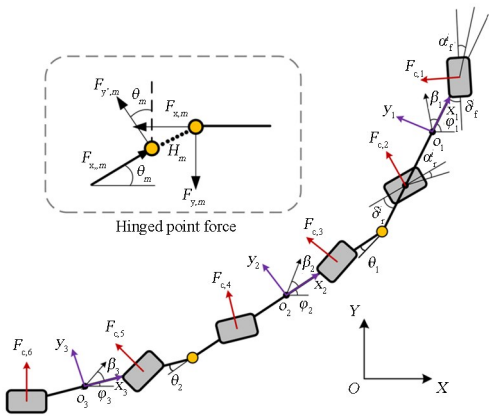


图3 单轨线模型

Fig. 3 Single-rail model

图中, $x_i o_i y_i$ 为固结于第 i 节车辆质心 o_i 的车辆坐标系,基于右手定则,沿车辆前进方向为 x_i 轴

正方向,沿车辆左侧为 y_i 轴正方向, $i=1,2,3$; XOY 为固结在大地的惯性坐标系; φ_i 为第 i 节车辆横摆角; β_i 为第 i 节车辆质心侧偏角; θ_m 为第 m 个铰接点处铰接角, $m=1,2$; $F_{x,m}$ 和 $F_{y,m}$ 分别表示第 m 个铰接点受后车作用的纵向铰接力和横向铰接力; $F'_{x,m}$ 和 $F'_{y,m}$ 分别表示第 m 个铰接点受前车作用的纵向铰接力和横向铰接力; $F_{c,n}$ 表示第 n 根车轴等效轮胎横向力, $n=1,2,\dots,6$; δ_n 表示第 n 根车轴等效轮胎转角; α_n 表示第 n 根车轴等效轮胎侧偏角.

本文以铰接点 H_1 为例分析铰接点处受力情况,后车在铰接点 H_1 处的横向力为:

$$F'_{y,1} = -(F_{y,1} \cos \theta_1 + F_{x,1} \sin \theta_1) \quad (1)$$

考虑到铰接角为小值,近似处理后得到:

$$F'_{y,1} = -F_{y,1} \quad (2)$$

同理可得:

$$F'_{y,2} = -F_{y,2} \quad (3)$$

应用隔离法分别建立三节车辆动力学方程,牵引车平衡方程如下:

$$m_1 a_{y,1} = 2F_{c,1} + 2F_{c,2} + F_{y,1} \quad (4)$$

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 2F_{c,1} a_1 - 2F_{c,2} b_1 - F_{y,1} (b_1 + d_1) \quad (5)$$

第一节拖车平衡方程如下:

$$m_2 a_{y,2} = 2F_{c,3} + 2F_{c,4} + F'_{y,1} + F_{y,2} \quad (6)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = 2F_{c,3} a_2 - 2F_{c,4} b_2 + F'_{y,1} (a_2 + d_2) - F_{y,2} (d_3 + b_2) \quad (7)$$

第二节拖车平衡方程如下:

$$m_3 a_{y,3} = 2F_{c,5} + 2F_{c,6} + F'_{y,2} \quad (8)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = 2F_{c,5} a_3 - 2F_{c,6} b_3 + F'_{y,2} (a_3 + d_4) \quad (9)$$

式(4)~(9)中, $a_{y,i}$ 为第 i 节车在车辆坐标系下的横向加速度; I_i 为第 i 节车绕 z 轴转动惯量; ω_i 为第 i 节车横摆角速度.轮胎力大小计算如下:

$$F_{c,n} = k_n \alpha_n \quad (10)$$

式中, k_n 为第 n 根车轴等效轮胎侧偏刚度.为消去上述方程中的铰接力,引入约束方程,由铰接点处加速度相同可得:

$$a_{y,1} - (b_1 + d_1) \dot{\omega}_1 = a_{y,2} + (a_2 + d_2) \dot{\omega}_2 \quad (11)$$

$$a_{y,2} - (b_2 + d_3) \dot{\omega}_2 = a_{y,3} + (a_3 + d_4) \dot{\omega}_3 \quad (12)$$

为后续控制器设计,引入第一、四、六轴位置方

程,具体控制器设计方案后文详细阐述.

$$\dot{X}_{A1}=v_x\cos\varphi_1-v_{y,1}\sin\varphi_1$$

(13)

$$\dot{X}_{A4}=v_x\cos\varphi_2-v_{y,4}\sin\varphi_2$$

(14)

$$\dot{X}_{A6}=v_x\cos\varphi_3-v_{y,6}\sin\varphi_3$$

(15)

$$\dot{Y}_{A1}=v_x\sin\varphi_1+v_{y,1}\cos\varphi_1$$

(16)

$$\dot{Y}_{A4}=v_x\sin\varphi_2+v_{y,4}\cos\varphi_2$$

(17)

$$\dot{Y}_{A6}=v_x\sin\varphi_3+v_{y,6}\cos\varphi_3$$

(18)

式(13)~(18)中, v_x 表示每节车辆在车辆坐标系下的纵向速度; $v_{y,i}$ 表示第*i*根车轴在车辆坐标系下的横向速度.整理式(2)~(18),状态量选取为:

$$\xi=\begin{bmatrix}\beta_1,\omega_1,\beta_2,\omega_2,\beta_3,\omega_3,\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\\X_{A1},Y_{A1},X_{A4},Y_{A4},X_{A6},Y_{A6}\end{bmatrix}^T$$

(19)

控制量选取为:

$$U=[\delta_{f,1},\delta_{r,2},\delta_{r,3}]^T$$

(20)

其他轴转角选取为:

$$U'=[\delta_{r,1},\delta_{f,2},\delta_{f,3}]^T$$

(21)

得出状态空间方程:

$$\dot{\xi}=A\xi+BU+B'U'$$

(22)

2.2 动力学模型参数辨识

本文是以动力学模型为基础设计的控制器,动力学模型的准确性决定了控制器的精度.在上文推导的动力学公式中,等效轮胎侧偏刚度虽可以通过线性化插值得出,但模型准确性会有所降低.本文采用遗传算法辨识等效轮胎侧偏刚度以提高模型准确性.遗传算法可以解释为一种进化算法,通过模仿生物的进化过程发展起来的全局搜索的优化方法,找出一个可能包含最优解的范围称为种群.为表示迭代出的等效侧偏刚度优劣程度,需建立适应度函数,方程状态量的单位和量级不一致,因此将每次迭代得到的状态量除以相应初始状态量指标值,得到适应度函数:

$$f(x)=\sum_{i=1}^3\frac{E[\beta_i(W)-\beta_{iT}]}{E(\beta_{iint}-\beta_{iT})}+\sum_{i=1}^3\frac{E[\omega_i(W)-\omega_{iT}]}{E(\omega_{iint}-\omega_{iT})}$$

(23)

$$W=(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6)$$

(24)

式中, $E[\beta_i(W)-\beta_{iT}]$ 和 $E[\omega_i(W)-\omega_{iT}]$ 分别为第*i*节车理论模型和 TruckSim 软件仿真输出的质

心侧偏角差值的均方根值(RMS)和横摆角速度差值的均方根值; β_{iint} 和 ω_{iint} 表示初始侧偏刚度矩阵计算出的理论质心侧偏角和横摆角速度.遗传算法的参数设置由表 2 给定,遗传算法参数辨识获得的侧偏刚度值如表 3 所示.

由于动力学模型中状态量过多,本文以三节车辆的横摆角速度为例进行模型对比分析,验证工况如图 4 所示.将六个参数代回理论模型计算得到的结果数据与 TruckSim 仿真数据相对比,如图 5 所示.通过对比相同输入下的遗传算法等效侧偏刚度动力学模型、线性插值等效侧偏刚度动力学模型以及 TruckSim 模型的动力学响应可以发现,基于遗传算法参数辨识的动力学理论模型精度较高,与 TruckSim 动力学响应曲线基本吻合,可以满足后续控制器的设计需求.

表 2 遗传算法主要参数

Table 2 Main parameters of genetic algorithm

Main parameters of genetic algorithm	Value
Population size	50
Elite number	5
Cross progeny ratio	0.4
Maximal evolutionary algebra	40
Stop algebra	40
Fitness function deviation	1e-100

表 3 侧偏刚度辨识值

Table 3 Identification value of lateral stiffness

Identification value of lateral stiffness	Value
k_1	18 8121 N/rad
k_2	205 083 N/rad
k_3	112 422 N/rad
k_4	124 128 N/rad
k_5	134 951 N/rad
k_6	135 024 N/rad

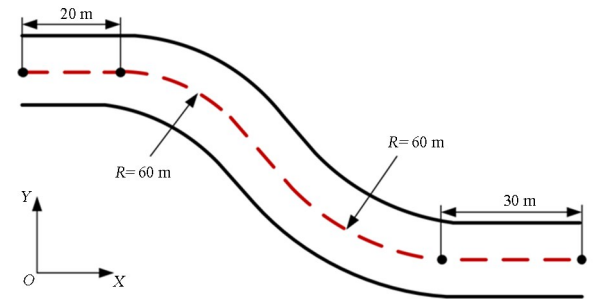


图 4 模型验证工况
Fig. 4 Model validation conditions

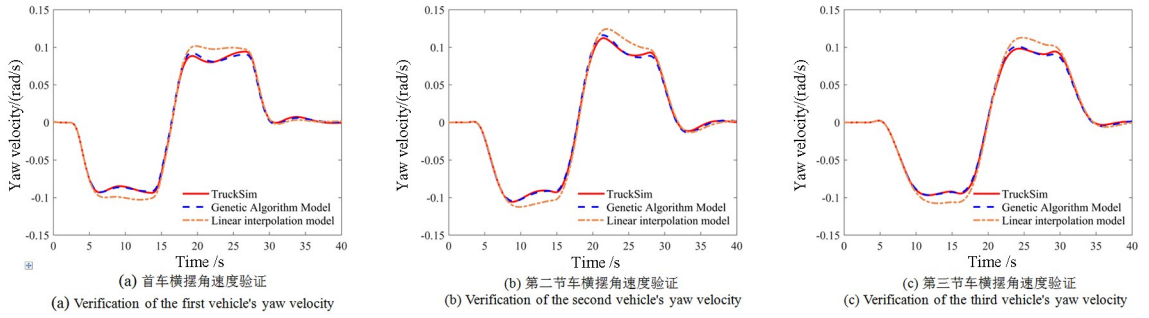


图 5 模型对比分析

Fig. 5 Model comparison analysis

3 列车主动转向控制

虚拟轨道列车需要控制的车轮转角较多,本节考虑车辆横向稳定性以及路径跟踪性能,设计了列车主动转向控制策略.首先,利用移位寄存器^[19]存储 A_1 轴中心位置坐标作为后车参考路径^[20];其次,基于上述动力学模型以及模型预测控制理论确定 A_1 、 A_4 和 A_6 转角;然后基于 Stanley 算法^[21]确定 A_2 、 A_3 和 A_5 转角;最后,为提高控制器在不同速度下的适应性,设计了基于首车速度的权重模糊调节策略.值得注意的是,本文将两种算法结合设计主动转向控制策略,一方面可以解决仅采用 MPC 算法时计算量过大的问题;另一方面,Stanley 算法考虑了速度对车辆转角的影响,对车辆速度变化的适应性更强.

3.1 A_2 、 A_3 、 A_5 轴主动转向方法

车轴 A_2 、 A_3 和 A_5 为辅助转向轴,主要实现协调列车转向.下文采用 Stanley 算法计算车轴 A_2 、 A_3 和 A_5 转角.

Stanley 算法是一种基于横向跟踪误差的非线性反馈函数,其横向跟踪误差以指数收敛于 0. 车轮期望转角的控制输入由两部分组成,分别为航向偏差和横向偏差.

单独考虑横向偏差影响,此时车轮沿着路径最近点的切向方向行驶,根据几何关系可得出非线性比例函数:

$$\delta_e(t) = \arctan \frac{e_d}{l(t)} = \arctan \frac{ke_d}{v_x(t)} \quad (25)$$

式中, e_d 表示横向偏差; k 表示增益系数; $v_x(t)$ 表示行驶速度.

单独考虑航向偏差影响,此时车轮位于目标路径上,车轮期望转角等于车辆航向与路径最近点切

线之间的夹角:

$$\delta_\varphi(t) = \theta_e(t) \quad (26)$$

式中, $\theta_e(t)$ 为航向偏差.

因此,同时考虑上述两种偏差,得出车轮期望转角

$$\delta_s(t) = \theta_e(t) + \arctan \frac{ke_d}{v_x(t)} \quad (27)$$

3.2 A_1 、 A_4 、 A_6 轴主动转向方法

车轴 A_1 、 A_4 和 A_6 为主动转向轴,主要实现列车沿参考路径行驶并提高车辆横向稳定性.下文采用 MPC 控制理论计算车轴 A_1 、 A_4 和 A_6 转角.

式(22)所建立的列车动力学模型具有非线性因素,而线性时变模型预测具有计算量小、易于求解等特点^[22],为便于控制器设计,将连续系统进行离散化和线性化处理.

式(22)可表示为:

$$\dot{\xi} = f(\xi, U, U') \quad (28)$$

采用向前欧拉法对连续系统进行离散化处理:

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= \xi(k) + Tf[\xi(k), U(k), U'(k)] \\ &= F[\xi(k), U(k), U'(k)] \end{aligned} \quad (29)$$

式中, T 为离散系统采样时间.

定义 N_p 为预测时域; N_c 为控制时域.在预测时域内对系统施加持续不变的控制量 U_0 和 U'_0 , 得到新的系统状态量:

$$\xi_0(k+1) = F[\xi_0(k), U_0(k), U'_0(k)] \quad (30)$$

将非线性系统在 $[\xi_0(t), U_0(t), U'_0(t)]$ 处线性展开得:

$$\begin{aligned} \Delta \xi(k+1) &= A_{k,0} \Delta \xi(k) + B_{k,0} \Delta U(k) + \\ &\quad B'_{k,0} \Delta U'(k) \end{aligned} \quad (31)$$

其中:

$$A_{k,0} = \left. \frac{\partial F}{\partial \xi} \right|_{\xi_0(k), U_0(k), U'_0(k)}$$

$$\mathbf{B}_{k,0} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} \bigg|_{\xi_0(k), \mathbf{U}_0(k), \mathbf{U}'_0(k)}$$

$$\mathbf{B}'_{k,0} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}'} \bigg|_{\xi_0(k), \mathbf{U}_0(k), \mathbf{U}'_0(k)}$$

$$\Delta \xi(k+1) = \xi(k+1) - \xi_0(k+1)$$

$$\Delta \mathbf{U}(k) = \mathbf{U}(k) - \mathbf{U}_0(k)$$

$$\Delta \mathbf{U}'(k) = \mathbf{U}'(k) - \mathbf{U}'_0(k)$$

将线性化误差引入式(31),整理非控制量得出对于每个采样时刻 t 的离散线性时变系统:

$$\xi(k+1) = \mathbf{A}_{k,t} \xi(k) + \mathbf{B}_{k,t} \mathbf{U}(k) + \mathbf{d}_{k,t}(k) \quad (32)$$

式中, $\mathbf{A}_{k,t}$ 、 $\mathbf{B}_{k,t}$ 、 $\mathbf{d}_{k,t}$ 均为线性时变矩阵, $\mathbf{d}_{k,t}$ 为线性化误差矩阵,且有:

$$\mathbf{d}_{k,t}(k) = \xi_t(k+1) - \mathbf{A}_{k,t} \xi_t(k) - \mathbf{B}_{k,t} \mathbf{U}_t(k) - \mathbf{B}'_{k,t} \Delta \mathbf{U}'(k)$$

将式(32)转换为:

$$\tilde{\xi}(k|t) = [\xi(k|t), \mathbf{U}(k-1|t)]^T \quad (33)$$

得到新状态空间表达式:

$$\begin{cases} \xi(k+1|t) = \tilde{\mathbf{A}}_{k,t} \tilde{\xi}(k|t) + \tilde{\mathbf{B}}_{k,t} \tilde{\Delta \mathbf{U}}(k|t) + \tilde{\mathbf{d}}_{k,t} \\ \eta(k+1|t) = \mathbf{C} \xi(k+1|t) \end{cases} \quad (34)$$

其中:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{k,t} & \mathbf{B}_{k,t} \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_{k,t} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{k,t} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

值得注意的是, \mathbf{C} 为系统输出矩阵; η 为系统输出状态量,本文输出与路径跟踪及车辆稳定性相关的状态量 $\eta = [\beta_2, \beta_3, \varphi_1, Y_{A1}, Y_{A4}, Y_{A6}]^T$,此时,在预测时域内系统的输出量可由下式表示:

$$\mathbf{Y}(t) = \boldsymbol{\psi}_t \xi(k|t) + \boldsymbol{\Theta}_t \Delta \mathbf{U}(t) + \boldsymbol{\Gamma}_t \boldsymbol{\Theta}(t) \quad (35)$$

其中:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \eta(k+1|t) \\ \eta(k+2|t) \\ \vdots \\ \eta(k+N_p|t) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t} \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{k,t} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{k+1,t} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{d}}_{k+N_p-1,t} \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}(k|t) \\ \Delta \mathbf{U}(k+1|t) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{U}(k|t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t} & \mathbf{C} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p-1} & \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p-2} & \cdots & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_{t,t} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t} \tilde{\mathbf{B}}_{t,t} & \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}_{t,t} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p-1} \tilde{\mathbf{B}}_{t,t} & \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p-2} \tilde{\mathbf{B}}_{t,t} & \cdots & \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A}_{t,t}^{N_p-N_c-1} \tilde{\mathbf{B}}_{t,t} \end{bmatrix}$$

由于系统中控制增量 $\Delta \mathbf{U}(t)$ 未知,需要通过设定合理的优化目标进行求解.同时,为防止因变量较多导致求解错误的情况,需引入松弛因子.本文设计成本函数如下:

$$J = [\mathbf{Y}_r(t) - \mathbf{Y}(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{Y}_r(t) - \mathbf{Y}(t)] + \Delta \mathbf{U}(t)^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{U}(t) + \epsilon^T \rho \epsilon \quad (36)$$

式中, $\mathbf{Y}_r(t)$ 为系统期望输出量; \mathbf{Q} 为状态量权重矩阵; \mathbf{R} 为控制量权重矩阵; ϵ 为松弛因子; ρ 为松弛因子加权系数.

为了保证控制器路径跟踪的精度及稳定性,在实际控制过程中,需要满足如下约束条件:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{U}_{\min} \leq \Delta \mathbf{U} \leq \Delta \mathbf{U}_{\max} \\ \mathbf{U}_{\min} \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{U}_{\max} \end{cases} \quad (37)$$

式中, $\Delta \mathbf{U}_{\min}$ 、 $\Delta \mathbf{U}_{\max}$ 分别为控制增量的最小值和最大值; \mathbf{U}_{\min} 、 \mathbf{U}_{\max} 分别为控制量的最小值和最大值.

求解出最优控制序列后,将序列中第一行元素作为车轮转角作用于车辆系统,下一个控制周期重复上述过程,实现虚拟轨道列车对期望路径的跟踪.

3.3 权重参数模糊调节

对于虚拟轨道列车来说,在实车环境中,车辆速度会根据路况的复杂程度产生变化,车速变化会对路径跟踪控制器的控制效果造成较大影响.固定权重的控制器无法在不同的车速下保持较好的控制效果.针对此问题,本文以首车速度为输入信号采用模糊控制方法实现 MPC 控制器中权重自适应调节,保证不同车速下的控制效果. MPC 控制器中包含状态权重矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 控制权重矩阵,描述如下:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \text{diag}[q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] \\ \mathbf{R} = \text{diag}[r_1, r_2, r_3] \end{cases} \quad (38)$$

式中, q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 分别为第二节车质心侧偏角、第三节车质心侧偏角、首车航向误差、 A_1 轴

横向误差、 A_4 轴横向误差、 A_6 轴横向误差的权重系数; r_1 、 r_2 、 r_3 分别为 A_1 轴、 A_4 轴、 A_6 轴等效轮胎转角的权重系数。

虚拟轨道列车跟踪参考路径时,权重系数的分配决定了控制效果,权重系数越大,表示对相应变量的限制作用越强,各个变量间权重系数相对大小决定了 MPC 控制器对各变量的控制程度。横向误差的权重系数越大,车辆跟踪精度越高;质心侧偏角与等效轮胎转角的权重系数越大,车辆稳定性越好。考虑虚拟轨道列车具有质量大、车身长的特点,在车速较低时,车辆行驶平稳,此时应增大横向误差的相对权重,提高车辆路径跟踪精度;在车速较高时,车辆短时间内移位较大,此时增大质心侧偏角与等效轮胎转角的权重系数,提高车辆稳定性,保证行驶安全。

根据上述分析,本文将 q_3 、 q_4 、 q_5 、 q_6 设为固定值,通过调节 q_1 、 q_2 、 r_1 、 r_2 、 r_3 改变权重的相对大小。以首车速度作为模糊控制器的输入, q_1 、 q_2 的调节因

子 $\Delta\lambda_q$ 、 $\Delta\lambda_r$ 作为模糊控制器的输出,设计权重系数自适应模糊控制器。值得注意的是,分别将三节车辆速度作为模糊控制器输入时,会降低模糊控制器计算效率。由于三节车速度相差不大,本文仅选取首车速度作为模糊控制器的输入,提高模糊控制器计算效率。进行权重系数的具体调节前,要先确定输入和输出变量的取值范围,并将其模糊化。考虑到虚拟轨道列车最高设计速度约为 19.4 m/s,将模糊控制器的输入量 v_x 论域设置为 $[0,20]$;避免调节过程中权重变化过大影响控制器性能,模糊控制器的输出量 $\Delta\lambda_q$ 、 $\Delta\lambda_r$ 论域设置为 $[-2,2]$ 。模糊子集选择为五个:负大(NB)、负小(NS)、零(O)、正小(PS)、正大(PB)。为满足控制器在低速和高速工况实现相应权重调节,同时在中速工况中权重变化较为平缓,隶属度函数选择高斯型函数^[23]。如图 6 所示。虚拟轨道列车速度较高时,质心侧偏角和前轮转角的相对权重应越大,以保持行驶稳定,车辆速度较低时则相反。模糊规则如表 4 所示。

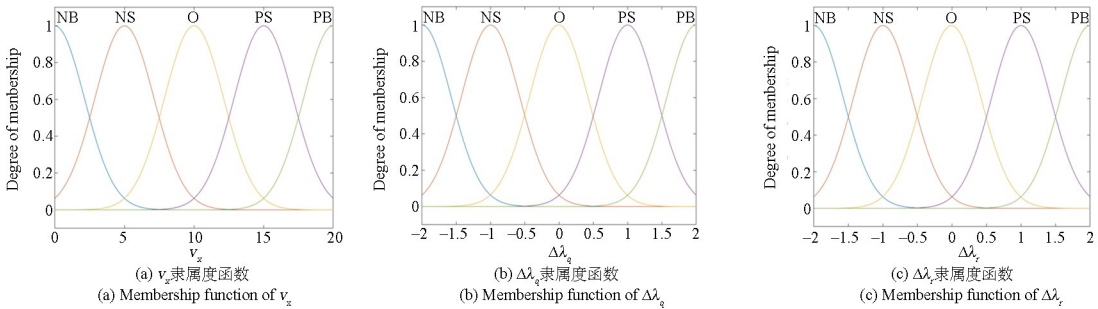


图 6 隶属函数

Fig. 6 Membership function

表 4 模糊控制规则表
Table 4 Fuzzy control rule

变量	模糊子集				
v_x	NB	NS	O	PS	PB
$\Delta\lambda_q$	NB	NS	O	PB	PB
$\Delta\lambda_r$	NB	NB	O	PS	PB

其中,考虑到虚拟轨道列车日常运行速度约为 40 km/h,本文以 10 m/s 工况设计了固定权重控制器的权重矩阵,并以此权重为基础设计自适应权重控制器,权重矩阵为

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q} = \text{diag} [q_{1_0}, q_{2_0}, q_{3_0}, q_{4_0}, q_{5_0}, q_{6_0}] \\ \boldsymbol{R} = \text{diag} [r_{1_0}, r_{2_0}, r_{3_0}] \end{cases} \quad (39)$$

由此,可以得到不同车速下各变量修正权重系数,具体如下:

$$\begin{cases} q_1 = q_{1_0} \times 3^{\Delta\lambda_q} \\ q_2 = q_{2_0} \times 3^{\Delta\lambda_q} \\ r_1 = r_{1_0} \times 1.5^{\Delta\lambda_r} \\ r_2 = r_{2_0} \times 1.5^{\Delta\lambda_r} \\ r_3 = r_{3_0} \times 1.5^{\Delta\lambda_r} \end{cases} \quad (40)$$

式中, q_{1_0} 、 q_{2_0} 、 r_{1_0} 、 r_{2_0} 、 r_{3_0} 分别为固定权重控制器的第二节车质心侧偏角、第三节车质心侧偏角、 A_1 轴、 A_4 轴、 A_6 轴等效轮胎转角的权重系数; q_1 、 q_2 、 r_1 、 r_2 、 r_3 分别为自适应权重控制器的第二节车质心侧偏角、第三节车质心侧偏角、 A_1 轴、 A_4 轴、 A_6 轴等效轮胎转角的权重系数。

4 仿真分析

本节基于 TruckSim/Simulink 搭建虚拟轨道

列车动力学仿真平台,考虑复合曲线工况研究列车转向行为,分析在循迹过程车辆横向稳定性和各车轴横向误差的变化情况.

4.1 工况设置

本文的目标路径由多段直线和圆弧组成,如图7所示.假设车辆首先以60 km/h速度依次通过长为30 m的直线段AB、半径为90 m的圆弧路段BC、长为30 m的直线段CD、半径为100 m的圆弧路段DE,随后在长为80 m的直线段EF进行制动并减速至20 km/h,再依次通过半径为30 m的圆弧路段FG、长为30 m的直线段GH、半径为30 m的圆弧路段HI.

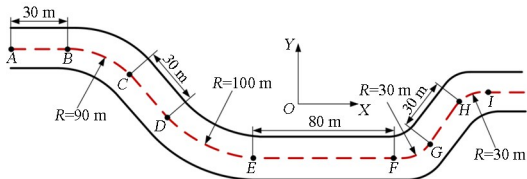


图7 目标路径
Fig. 7 Target path

4.1 仿真结果分析

考虑不同运行速度下虚拟轨道列车横向稳定性和路径跟踪问题,本节比较研究了后车无控制随动,固定权重控制和自适应权重控制三种策略的仿真结果.

图8(a)和图8(b)为后车各车轴中心行驶轨迹图.从图8(a)可以看出,后车各车轴无控制时,车辆在60 km/h工况下发生失稳,在20 km/h工况下向弯道内侧偏移现象较为明显,而在固定权重控制器和自适应权重控制器作用下后车均能沿首车行驶轨迹循迹运行.

质心侧偏角表征了车辆稳定性,是车辆稳定性控制系统中的主要控制变量^[24].图9(a)和图9(b)描述了后车在固定权重控制器和自适应权重控制器下的质心侧偏角变化情况.质心侧偏角一般在进出弯时会出现峰值,进入弯道后趋于平稳.由于自适应权重控制器通过增大质心侧偏角控制权重并增加对轮胎转角的限制使后车进入弯道时质心侧偏角较固定权重控制器有明显降低,其最大值分别减小了33.45%和54.13%,提高了车辆横向稳定性,降低了侧滑和侧翻的风险^[25].值得注意的是,在20 km/h工况下尽管车辆稳定性相对权重减小,但车辆质心侧偏角并没有较为明显的升高,其

最大值(MAX)分别增加了8.23%和8.87%,这是因为运行速度较低时车辆短时间内位置变化较小,车辆稳定性对车轮转角变化不敏感.

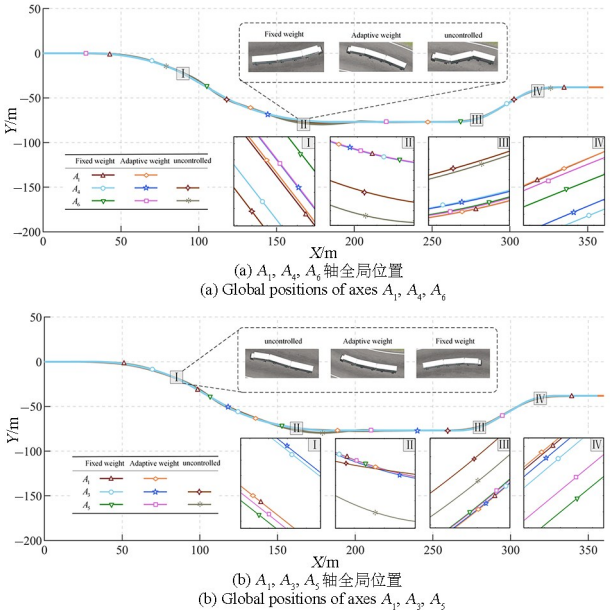


图8 后车各车轴行驶轨迹图
Fig. 8 Track diagram of each axle of the rear car

在60 km/h工况下,自适应权重控制器提升车辆稳定性的同时并没有降低路径跟踪精度.图9(c)~(f)为固定权重控制器和自适应权重控制器作用下后车各车轴横向误差变化的曲线图.车辆进出弯道时,各车轴横向误差会出现较大变化.同时,运行速度较高时车辆短时间位移较大,车辆质心侧偏角和车轴横向误差对于车轮转角变化较为敏感.此时,固定权重控制器相较于自适应权重控制器来说,横向误差权重较大,导致了车轮转角变化较为频繁,进而发生了一定的超调现象.如图9(e)、(f)所示,尽管自适应权重控制器减少了横向误差的控制权重,但增加了车轮转角变化权重.转角变化更为稳定,使横向误差发生一定程度的减小,其均方根值(RMS)分别减小了8.4%和14.19%.A3、A5轴主要起到辅助转向的作用,权重变化对于其影响不大,其横向误差RMS分别减小了0.9%和18.92%.在20 km/h工况下,自适应权重控制器相较于固定权重控制器提高了横向误差的控制权重,并减小了车轮转角的限制,使各车轴转动更加灵活同时对目标路径更加敏感,进而减小了A4、A6轴横向误差,RMS分别减小了31.19%和46.62%.A3、A5轴作为辅助转向轴没有较为明显的改变,但由于A4、A6轴循迹精度变高,减小了各车轴间干涉,导致A3、A5均方根值RMS分别减小了16.45%和17.13%,仿真统计结果如表5所示.

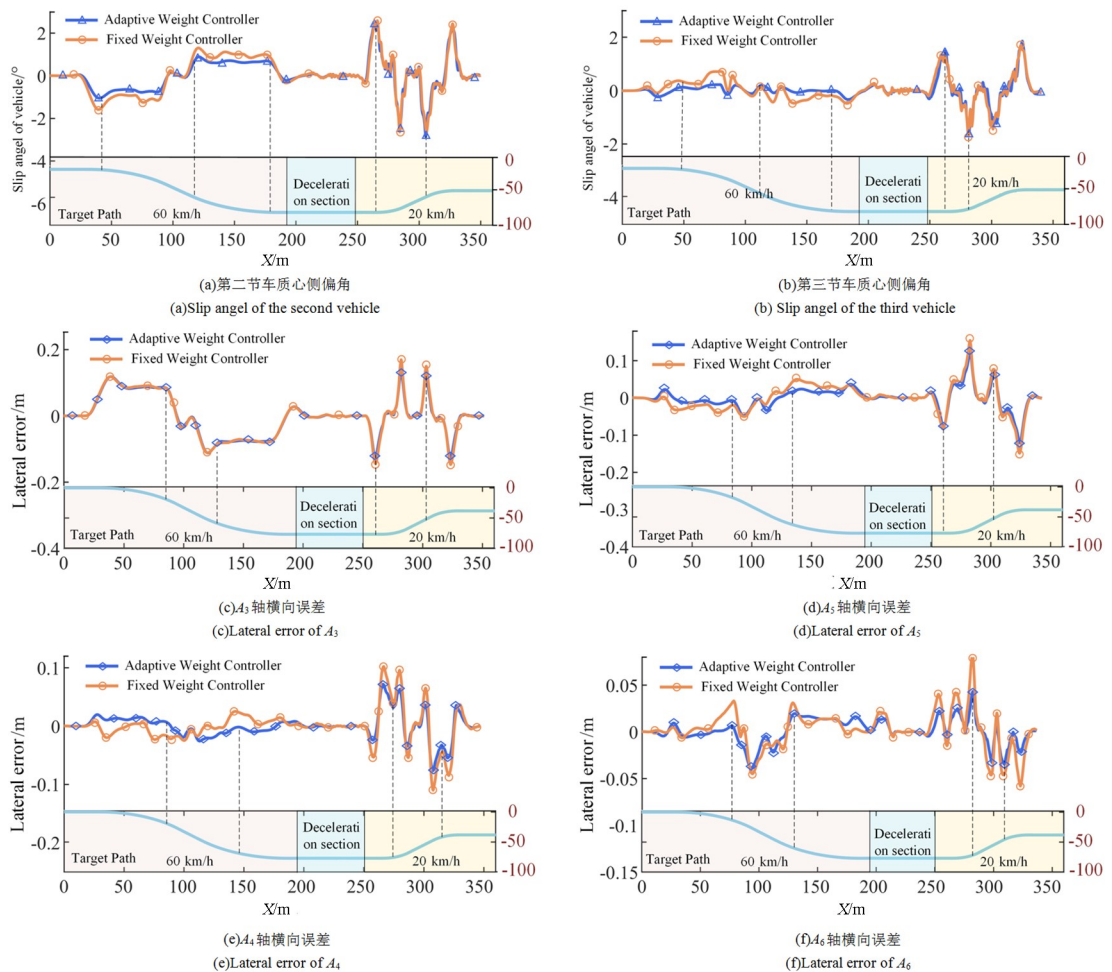


图 9 仿真结果对比
Fig. 9 Comparison of simulation results

表 5 仿真结果统计表
Table 5 Simulation result statistics

Dynamic indicators	Fixed weight		Adaptive weight		Data statistics	
	60 km/h	20 km/h	60 km/h	20 km/h	60 km/h	20 km/h
Slip angle of the second vehicle (MAX)	1.5862	2.6357	1.0556	2.8526	−33.45%	+8.23%
Slip angle of the third vehicle (MAX)	0.7212	1.7040	0.3308	1.8551	−54.13%	+8.87%
Lateral error of A_3 (RMS)	6.67	6.14	6.61	5.31	−0.9%	−16.45%
Lateral error of A_4 (RMS)	1.18	4.97	1.08	3.42	−8.4%	−31.19%
Lateral error of A_5 (RMS)	2.59	5.72	2.1	4.74	−18.92%	−17.13%
Lateral error of A_6 (RMS)	1.48	2.96	1.27	1.58	−14.19%	−46.62%

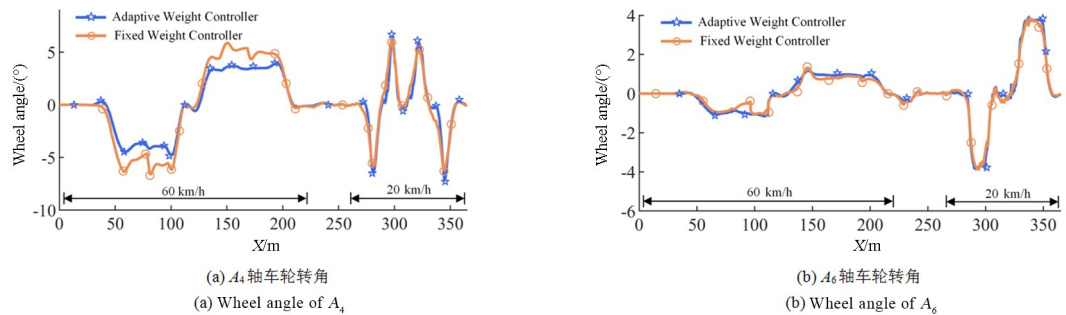


图 10 车轮转角变化
Fig. 10 Wheel angle variation

图 10 为 A_4 轴和 A_6 轴车轮转角随全局横坐标变化曲线图。结合图 9(e)、(f)可以看出自适应权重控制器在 60 km/h 工况下减小了车轮转角的超调,提高了车辆进出弯道时的稳定性,减少了车轮转角变化剧烈的现象。

5 结论

(1)针对虚拟轨道列车质量大、车身长的特点,基于 MPC 算法和 Stanley 算法设计了考虑车辆稳定性和路径跟踪性能的多目标控制器,同时,考虑车辆速度的变化对控制效果的影响,采用模糊控制动态优化权重系数,以提高控制器的适应性。

(2)基于 TruckSim/Simulink 联合仿真平台进行不同速度的仿真模拟试验,结果表明,所设计的控制器在不同速度工况下均能有效提高车辆的路径跟踪精度和行驶稳定性。

(3)自适应权重控制器与固定权重的控制器相比,在 20 km/h 工况下自适应权重控制器路径跟踪精度有明显提高;在 60 km/h 工况下自适应权重控制器车辆稳定性有明显提高。同时,车辆在较高速度运行时,优化车辆稳定性会一定程度上提高路径跟踪精度,表明了针对虚拟轨道列车设计高速路径跟踪控制器时考虑车辆稳定性指标的合理性。

参考文献

- [1] 任利惠,李稳,冷涵,等. 轮胎式轨道交通车辆动力学研究现状与挑战[J]. 交通运输工程学报, 2021, 21(6): 8—30.
REN L H, LI W, LENG H, et al. Research on dynamics of rail transit vehicle with tire running gears: state-of-arts and challenges [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2021, 21(6): 8—30. (in Chinese)
- [2] YIN Z H, ZHANG J Y, LU H Y. Establishment and comparison of a spatial dynamics model for virtual track train with different steering modes [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, 2021, 235(3): 481—498.
- [3] 王雨恒,杨蔡进,徐菁,等. 基于轴距预瞄的虚拟轨道列车主动悬架控制策略[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(5): 69—77.
WANG Y H, YANG C J, XU J, et al. Active sus-

pension control strategy of virtual rail train based on wheelbase preview [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(5): 69—77. (in Chinese)

- [4] WAGNER S, NITZSCHE G. Advanced steer-by-wire system for worlds longest busses [C]//2016 IEEE 19th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC). New York: IEEE, 2016: 1932—1938.
- [5] LENG H, REN L H, JI Y J. Analysis methodology of compatibility between motion control and mechanical architecture of a newly designed gantry virtual track train and the path-tracking control strategy [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2022, 236(13): 6985—7005.
- [6] ZHANG D H, YANG C J, ZHANG W H, et al. A novel tracking control method for the distributed-drive and active-steering articulated virtual rail train [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering, 2022, 236(2): 418—440.
- [7] 赵煜,杨蔡进,王谭明,等. 多铰接车辆路径跟踪控制及仿真分析[J]. 系统仿真学报, 2024, 36(10): 2300—2313.
ZHAO Y, YANG C J, WANG T M, et al. Path following control and simulation analysis of multi-articulated vehicles [J]. Journal of System Simulation, 2024, 36(10): 2300—2313. (in Chinese)
- [8] 孙帮成,刘志明,崔涛,等. 汽车列车多轴转向控制方法及仿真研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(4): 154—163.
SUN B C, LIU Z M, CUI T, et al. Research on multi-axis steering control method and simulation of train-like vehicle [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(4): 154—163. (in Chinese)
- [9] 张众华,杨蔡进,张卫华. 虚拟轨道列车超螺旋滑模自适应导向控制[J]. 交通运输工程学报, 2023, 23(5): 163—182.
ZHANG Z H, YANG C J, ZHANG W H. Adaptive guidance control of super-twisting sliding mode for virtual track train [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2023, 23(5): 163—182. (in Chinese)
- [10] MENG Y, GAN X, WANG Y, et al. LQR-GA controller for articulated dump truck path tracking system [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University (Science), 2019, 24(1): 78—85.

- [11] NI Z T, HE Y P. Design and validation of a robust active trailer steering system for multi-trailer articulated heavy vehicles [J]. *Vehicle System Dynamics*, 2019, 57(10): 1545—1571.
- [12] 杜荣华, 胡鸿飞, 高凯, 等. 基于变预测时域 MPC 的自动驾驶汽车轨迹跟踪控制研究[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(24): 275—288.
- DU R H, HU H F, GAO K, et al. Research on trajectory tracking control of autonomous vehicle based on MPC with variable predictive horizon [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(24): 275—288. (in Chinese)
- [13] ZHANG B, ZONG C F, CHEN G Y, et al. An adaptive-prediction-horizon model prediction control for path tracking in a four-wheel independent control electric vehicle [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 2019, 233(12): 3246—3262.
- [14] 王艺, 蔡英凤, 陈龙, 等. 基于模型预测控制的智能网联汽车路径跟踪控制器设计[J]. *机械工程学报*, 2019, 55(8): 136—144, 153.
- WANG Y, CAI Y F, CHEN L, et al. Design of intelligent and connected vehicle path tracking controller based on model predictive control [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 55(8): 136—144, 153. (in Chinese)
- [15] VIVEK K, AMBALAL SHETA M, GUMTA-PURE V. A comparative study of Stanley, LQR and MPC controllers for path tracking application (ADAS/AD) [C]//2019 IEEE International Conference on Intelligent Systems and Green Technology (ICISGT). New York: IEEE, 2019: 67—674.
- [16] YUAN X W, HUANG R P, ZHANG X R, et al. Development and validation of an automatic steering control system for rubber-tire transit revenue service [C]//2019 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC). New York: IEEE, 2019: 1—6.
- [17] FENG J H, HU Y Q, YUAN X W, et al. Development and validation of an automatic all-wheel steering system for multiple-articulated rubber-tire transit [J]. *IET Electrical Systems in Transportation*, 2021, 11(3): 227—240.
- [18] ZHANG Y B, KHAJEPOUR A, HASHEMI E, et al. Reconfigurable model predictive control for articulated vehicle stability with experimental validation [J]. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2020, 6(1): 308—317.
- [19] 徐晓美, 张磊, 刘凯, 等. 半挂汽车列车挂车主动转向控制研究[J]. *汽车技术*, 2018(11): 36—40.
- XU X M, ZHANG L, LIU K, et al. Research on active steering control of trailer wheels for a tractor-semitrailer [J]. *Automobile Technology*, 2018(11): 36—40. (in Chinese)
- [20] 杨一博, 杨蔡进, 陆野, 等. 虚拟轨道列车全轮主动转向控制研究[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(6): 59—67.
- YANG Y B, YANG C J, LU Y, et al. Research on all-wheel steering control of the virtual rail train [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(6): 59—67. (in Chinese)
- [21] ABDELMONIEM A, OSAMA A, ABDELAZIZ M, et al. A path-tracking algorithm using predictive Stanley lateral controller [J]. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 2020, 17(6): 1729881420974852.
- [22] 邓涛, 李鑫. 基于模型预测控制的智能车辆避障跟踪仿真[J]. *系统仿真学报*, 2020, 32(8): 1556—1566.
- DENG T, LI X. Simulation on obstacle avoidance tracking of intelligent vehicle based on model predictive control [J]. *Journal of System Simulation*, 2020, 32(8): 1556—1566. (in Chinese)
- [23] 胡杰, 钟鑫凯, 陈瑞楠, 等. 基于模糊 LQR 的智能汽车路径跟踪控制[J]. *汽车工程*, 2022, 44(1): 17—25, 43.
- HU J, ZHONG X K, CHEN R N, et al. Path tracking control of intelligent vehicles based on fuzzy LQR [J]. *Automotive Engineering*, 2022, 44(1): 17—25, 43. (in Chinese)
- [24] VAN ZANTEN A T. Bosch ESP systems: 5 years of experience [J]. *SAE Transactions*, 2000, 109(7): 428—436.
- [25] 李韶华, 王伟达. 车辆动力学与控制研究进展[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(3): 1—4.
- LI S H, WANG W D. Research advance in vehicle dynamics and control [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(3): 1—4. (in Chinese)