

基于粒子群与遗传算法优化的机械臂柔性末端 振动抑制研究^{*}

罗青鹏 李承林 刘显波[†]

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要 为了提高机械臂末端细长柔性执行器在预定轨迹上的运行精度, 并减少在狭小空间作业时由机械臂运动引起的振动, 本研究提出了一种基于粒子群优化算法和遗传算法的轨迹规划策略, 以实现机械臂末端振动的有效抑制。研究中, 细长执行器被抽象为柔性梁并附加末端集中质量, 采用笛卡尔建模方法对柔性梁的动力学进行简化。通过优化算法对机械臂末端轨迹规划的插值参数进行调整, 同时考虑了执行任务过程中末端振动及停止时的残余振动, 构建了以最小化振动幅值为目标的优化模型。仿真结果表明, 优化后的轨迹显著降低了末端在整个运动过程中的振动幅度。随后, 为确保实验中的机械臂能够精确执行该轨迹, 建立了机械臂系统的多刚体运动学模型, 并在奇异空间和避障约束条件下求解得到了最优的关节运动轨迹。最后, 利用六自由度机械臂执行所编写的关节运动指令, 并通过双目视觉系统监测柔性末端的实际运动情况, 实验结果验证了本研究基于动力学的轨迹规划与优化算法在振动抑制方面的有效性。

关键词 柔性机械臂, 轨迹规划, 振动抑制, 粒子群优化算法, 遗传算法

中图分类号:O328;TH113

文献标志码:A

Vibration Suppression of a Robotic Arm with a Flexible Beam Based on Particle Swarm Optimization and Genetic Algorithm^{*}

Luo Qingpeng Li Chenglin Liu Xianbo[†]

(School of Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract To improve the running accuracy of the end-actuator of a flexible manipulator in the desired trajectory and reduce the vibrations caused by the motion of the manipulator in a confined space, this study proposed a trajectory planning strategy based on the particle swarm optimization algorithm and genetic algorithm to effectively suppress vibrations. In the study, the slender actuator was abstracted as a flexible beam with concentrated terminal mass attachment, and the dynamics of the flexible beam were simplified using the Cartesian modeling method. The interpolation parameters of the end-actuator trajectory planning were adjusted by the optimization algorithm, considering the end-actuator vibrations during the task execution and the residual vibrations at the end of the task, and an optimization model was built to minimize the amplitude of vibrations. The simulation results show that the optimized trajectory significantly reduces the vibration amplitude of the end-actuator throughout the motion process. To ensure that the manipulator can accurately execute the trajectory, a multi-body kinematic model of the manipulator system was established, and the optimal joint motion trajectory was obtained by solving the problem under the singularity space and obstacle constraint conditions. In the experiment, the joint motion commands were executed by the manipulator, and the actual motion of the flexible end-actuator was

2024-10-14 收到第 1 稿, 2024-11-21 收到修改稿。

* 国家自然科学基金资助项目(202272218), 国家重点研发计划资助项目(2023YFF0713400), National Natural Science Foundation of China (202272218), Ministry of Science and Technology of China (2023YFF0713400).

† 通信作者 E-mail:liuxianbo@sjtu.edu.cn

monitored by the binocular vision system to verify the effectiveness of the dynamics-based trajectory planning in vibration suppression.

Key words flexible robotic arm, trajectory planning, vibration suppression, particle swarm optimization, genetic algorithm

引言

机械臂作为各领域中最常见且通用的一种机器人,以其独特的灵活性、敏锐的感知能力、强大的适应能力被广泛应用于太空探索、工业装配、战场防爆等危险场景^[1]。在早期研究中,刚性机械臂因其结构简单、控制方便而得到了广泛关注和应用,但随着对机械臂应用场景的深入探索,意识到刚性机械臂在处理复杂环境和执行复杂任务时存在局限性,例如,刚性机械臂在非结构化环境中的操作能力有限,它们通常无法完成如易碎物品的抓取或在复杂环境中的探测等任务。这是因为刚性机械臂缺乏必要的柔顺性和适应性^[2],而柔性机械臂具有结构柔软、变形能力强、作业空间大、人机交互安全等特点^[3],能够适应这些挑战。柔性机械臂凭借其环境的适应性和任务执行灵活性,在工业自动化和航空航天等领域展现出了广泛的应用潜力^[4]。

为了提升机械臂的控制精度,研究者们开展了多方面的研究工作,主要包括以下几个方向:一是开发优化算法与控制算法的结合,以增强机械臂的轨迹跟踪精度^[5];二是致力于减少机械臂柔性结构引起的振动问题;三是设计优化轨迹以抵消外部因素的干扰。在工程实践中,人们特别关注低能耗的柔性臂杆、机械臂末端的负载能力和其精确到达目标位置的能力。在这些应用场景中,柔性因素引起的振动对机械臂的控制精度影响尤为显著。Rosannini 等^[6]提出了用 PID 结合细菌觅食优化算法提高了机械臂控制精度。为了构建更精确的动力学模型,研究者们采取了多种方法。张海波等^[7]采用绝对坐标法和几何非线性变形假设,基于一般连续介质理论建立了三维梁的动力学模型。王桐桐^[8]也提出了基于绝对坐标法的柔性板模型。在机械臂领域中,孙巍伟等^[9]提出了目前空间柔性机械臂的建模常采用的方法有有限元法、假设模态法、集中质量法以及绝对坐标系法,描述梁坐标系的方法有绝对坐标法、浮动坐标法和几何精确,其中绝对坐标法

基于全局坐标系,更适合于描述梁的绝对位置和变形,便于分析和理解。相比于浮动坐标法,几何精确能更好地进行全局的动力学建模,从而简化抑振轨迹方案设计。描述梁的变形并建立动力学模型上最为流行的方法为假设模态法和拉格朗日法,其中假设模态法适用于小变形情况,而拉格朗日法的建模过程较为复杂,使得推导建模方程变得更加复杂,增加了寻优算法的计算复杂度。在对机械臂末端执行器进行动力学建模时,通常将其简化为柔性末端,并采用基于绝对坐标法的有限元集中质量法^[10]。该方法建立的柔性动力学模型更为简洁清晰,且能保持较高精度。

机械臂的柔性特性不仅体现在其连杆上,关节部分同样具有柔性,王航^[11]结合关节柔性和臂杆柔性,使用假设模态法和 Lagrange 方程建立全柔性机械臂动力学方程,采用免疫遗传算法得到机械臂残余振动最小轨迹。谭加林^[12]对机械臂系统末端关节进行柔性化处理,关注末端运动状态,提出了基于混沌粒子群优化算法的振动抑制方案。Zhang^[13]提出了通过柔性变形来避免柔性机器人操纵器在整个柔性尖端轨迹中的振动,通过比例—微分控制器调节滞后或领先单侧变形,从而保持中性表面和关节轴步调一致。Park^[14]将特征向量分配算法应用到了柔性机械臂的控制中,在实验中验证得出了振动幅度减少 30% 至 50%。随着研究的进一步深入,机械臂抑振不再依赖于复杂的控制方法,更多的关注点在于柔性机械臂抑振轨迹规划方案。娄军强^[15]提出结合遗传算法 (genetic algorithm, GA) 和插值多项式优化关节轨迹, Cui^[16]则是结合了粒子群优化算法 (particle swarm optimization, PSO) 和插值多项式约束关节加速度获得抑振轨迹。Liang 等^[17]基于关节轨迹优化的终端残余抑振方法,提高了机器人运动的精度和稳定性。Huang 等^[18]则是利用改进的麻雀搜索算法 (improved sparrow search algorithm, ISSA) 对机械臂关节轨迹进行规划来抑振。Meng 等^[19]基于虚拟阻

尼和在线轨迹矫正技术,为机械手的两个连杆规划了运动轨迹,并开发了自适应跟踪控制器,实现了高精度跟踪. Phan 等^[20]提出了一种多目标优化函数,并基于遗传算法对机械臂轨迹进行规划,得到了适用性更强的抑振轨迹方案. Xiao 等^[21]增加时间最优轨迹规划方法,将规划问题转化为多约束问题,有效解决了柔性机械臂在狭窄三维空间内进行连续路径视频检测的轨迹规划问题. Abe^[22]考虑了刚柔耦合的二连杆系统,在大变形情况下提出了抑振轨迹方案,通过立方样条函数确定关节角,并使用粒子群优化算法优化轨迹以最小化振动. 这些研究表明,通过精心设计的轨迹规划和优化算法,可以有效抑制柔性机械臂在执行任务过程中的振动,从而提高其性能和可靠性.

刘锦阳和和兴锁等^[23,24]通过建立考虑几何非线性的空间梁的刚柔耦合动力学方程,并采用有限元方法对梁进行离散化处理,为机械臂的精确控制提供了理论基础. 在实际应用中,机械臂末端的细长执行器在狭小空间执行任务时,由于其大的细长比和显著的弯曲变形,常采用空间梁的形式进行模拟. 为了确保机械臂末端执行器的精确运动,需要考虑机械臂自身运动状况与避障问题. Mohanan 等^[25]就提出了在动力学模拟环境中考虑机械臂避障问题;田金文^[26]设计了双机械臂避障轨迹,不仅识别自身碰撞,也识别与另一机械臂的碰撞.

尽管机械臂对关节空间和梁空间轨迹的直接规划方面已有诸多研究成果,但关于如何实现这些轨迹并进行实际轨迹抑振实验验证的研究相对较少. 本文以 JAKA Zu5 机械臂为研究对象,考虑到机械臂关节仅提供转动角度,因此不讨论关节柔性,而是着重研究如何在实际应用中实现规划的轨迹并验证抑振效果. 本文采用粒子群与遗传算法优化轨迹规划参数,构建了基于动力学的轨迹优化模型,实现了机械臂末端柔性执行器运动精度的提升和振动抑制,并通过搭建双目立体视觉检测实验验证了其有效性.

1 机械臂柔性末端动力学模型

在狭窄空间作业时,机械臂配备的细长末端执行器易因振动引发碰撞;在大范围机动作业工况下,末端执行器的振动也会导致运动轨迹偏差. 为此,本文将机械臂末端执行器建模为柔性杆件,并

在其末端附加集中质量小球,以模拟实际操作时末端的工具. 实验中,采用了 JAKA Zu5 机械臂来提供驱动梁的运动,实验系统相关示意图见图 1.

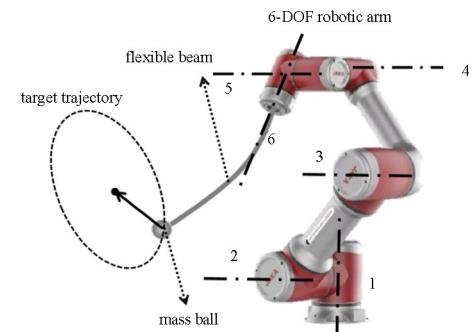


图 1 带柔性末端的机械臂系统示意图
Fig. 1 Diagram of a robotic arm system with the flexible end

1.1 柔性末端模态提取

在进行机械臂末端执行器的动力学建模时,本文采用结合绝对坐标法的有限元集中质量法简化柔性动力学模型^[10],将柔性末端划分为 n 个节点,每相邻节点间形成 1 个梁单元,具体如图 2 所示. 每个节点拥有 6 个自由度,但在振动抑制过程中,机械臂末端细长执行器的剪切和扭转效应通常不明显,采用欧拉梁理论进行动力学建模. 欧拉梁理论主要关注梁的弯曲变形,适用于忽略剪切变形和转动惯量影响的情况.

根据曾攀的有限元分析理论^[27]可以得到空间梁单元的刚度矩阵为 \mathbf{K}^e ,质量矩阵为 \mathbf{M}^e ,空间梁分为 n 个单元,将 n 个单元刚度矩阵和质量矩阵组集为整根梁的刚度矩阵 \mathbf{K} ,质量矩阵 \mathbf{M} ,计算 $\mathbf{K}-\xi^2\mathbf{M}$ 的特征向量 Φ , ξ 为梁的自由振动频率,一阶振动频率为 3.9636 Hz,二阶振动频率为 62.0160 Hz,三阶振动频率为 318.7027 Hz. 特征向量 $\Phi = [\Phi^1, \dots, \Phi^n]$ 即为空间梁的振动模态振型,将用于之后的动力学建模.

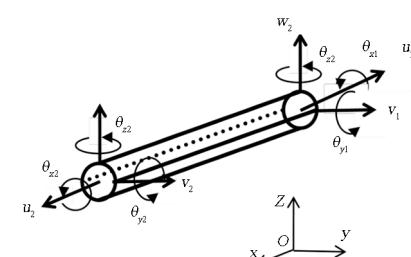


图 2 空间梁单元
Fig. 2 Spatial beam element

1.2 考虑空间大范围运动的柔性梁动力学建模

考虑第 k ($k=1, \dots, n$) 个节点, 将单元质量 m_k 集中到节点上去, 并设该节点的位置矢径为 $\underline{\rho}^k$, 其未变形之前的位置矢径为 $\underline{\rho}_0^k$, 如图 3 所示, 记两者之间的变形矢量为 \underline{h}^k . 定义机械臂末端与梁连接处为浮动坐标系 e_f , 世界坐标系定义为 e , 也称为绝对坐标系. 两个坐标系之间的相对运动即表示机械臂柔性的末端的运动状态. 对于第 k 个单元在浮动坐标系下可采用模态坐标来描述, 而模态坐标由模态向量与模态函数共同组成即 $\underline{h}_k = \underline{\Phi}^k \underline{a}$, 其中 $\underline{\Phi}^k = [\phi_1^k, \dots, \phi_s^k]$, s 表示需要考虑的 s 阶模态, \underline{a} 表示 s 阶模态的模态函数 $\underline{a} = [a_1, \dots, a_s]$. 本研究主要针对的振动抑制模态是对柔性的末端振动影响较大的前三阶振动模态 $s=3$. 浮动坐标系 e_f 与绝对坐标系 e 之间存在方向余弦矩阵 \underline{A} , 因此模态向量需要左乘方向余弦矩阵得到绝对坐标系下的模态向量阵 $\underline{\Phi}_a^k$. 对于浮动坐标系在绝对坐标系下的矢径设为 \underline{r} , 而第 k 个单元的绝对矢径为 \underline{r}^k , 两者之间的关系为 $\underline{r}^k = \underline{r} + \underline{\rho}^k$, 其中 $\underline{\rho}^k = \underline{\rho}_0^k + \underline{h}^k$.

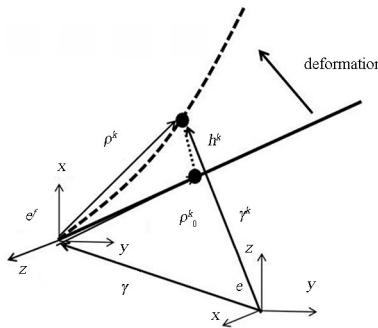


图 3 空间梁变形示意图

Fig. 3 Schematic diagram of spatial beam deformation

节点 k 相对于浮动坐标系的速度记为 $\underline{v}_r^k = \underline{\dot{\rho}}^k = \underline{\Phi}^k \underline{a}$, 相对于浮动坐标系的加速度记为 $\underline{v}_r^k = \underline{\ddot{\rho}}^k = \underline{\Phi}^k \underline{\ddot{a}}$, 浮动坐标系相对于绝对坐标系的角速度记为 $\underline{\omega}$, 则节点 k 的绝对速度与加速度用式(1)表示如下:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}}^k &= \dot{\underline{r}} + \dot{\underline{\rho}}^k = \dot{\underline{r}} + \underline{\omega} \times \underline{\rho}^k + \underline{v}_r^k \\ \ddot{\underline{r}}^k &= \ddot{\underline{r}} + \ddot{\underline{\omega}} \times \underline{\rho}^k + \dot{\underline{v}}_r^k + 2\underline{\omega} \times \underline{v}_r^k + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\rho}^k) \end{aligned} \quad (1)$$

节点 k 的绝对矢径、速度与加速度在绝对参考坐标系的坐标关系式为如下式(2)所示:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{r}}^k &= \dot{\underline{r}} + \dot{\underline{\rho}}^k = \dot{\underline{r}} + \underline{A} \underline{\rho}_0^k + \underline{A} \underline{\Phi}^k \underline{a} \\ \ddot{\underline{r}}^k &= \ddot{\underline{r}} - \underline{A} \underline{\dot{\rho}}^k \underline{A}^T \underline{\omega} + \underline{A} \underline{\Phi}^k \underline{\ddot{a}} \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{r}}^k = \dot{\underline{r}} - \underline{A} \underline{\dot{\rho}}^k \underline{A}^T \underline{\omega} + \underline{A} \underline{\Phi}^k \underline{\ddot{a}} + 2\underline{\omega} \underline{A} \underline{\Phi}^k \underline{\dot{a}} + \underline{\omega} \underline{\omega} \underline{A} \underline{\rho}^k \quad (2)$$

由速度变分原理, 整根梁的速度变分形式的动力学方程为

$$\sum_{k=1}^n \delta \dot{\underline{r}}^k (-m^k \dot{\underline{r}}^k + \underline{F}^k) - \delta \dot{\underline{\epsilon}}^k \underline{\sigma}^k = 0 \quad (3)$$

其中 $\underline{\epsilon}$ 为应变量, $\underline{\sigma}$ 为应变力. 将所有坐标式转换到绝对坐标系下, 并根据大范围空间柔性的运动的需求可知浮动坐标系的运动是由机械臂提供的, 即浮动坐标系的轨迹是已设定完成的, 因此其中的 \underline{r} 以及 $\underline{\omega}$ 已知, 柔性梁大范围空间运动的动力学方程可简化为下式:

$$\underline{M} \ddot{\underline{a}} + \underline{F}_{in} - \underline{f}^0 + \underline{f}^u = 0 \quad (4)$$

其中 $\underline{M} = [\underline{M}_1, \underline{M}_2, \underline{M}_3]$ 为动力学方程的质量矩阵, \underline{F}_{in} 为广义惯性力阵, \underline{f}^0 为外力矢量, \underline{f}^u 为模态阻尼力, 表达式如下:

$$\begin{aligned} \underline{M}_1 &= \underline{A} \sum_{k=1}^n m^k \underline{\Phi}^k \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ \underline{M}_2 &= \underline{A} \sum_{k=1}^n m^k \underline{\dot{\rho}}^k \underline{\Phi}^k \in \mathbb{R}^{3 \times s} \\ \underline{M}_3 &= \sum_{k=1}^n \underline{\Phi}^{kT} \underline{\Phi}^k \in \mathbb{R}^{s \times s} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \underline{F}_{in} &= 2 \sum_{k=1}^n m^k \underline{\Phi}^{kT} \underline{A}^T \underline{\omega} \underline{A} \underline{\Phi}^k \underline{\dot{a}} + \dots + \sum_{k=1}^n m^k \underline{\Phi}^{kT} \cdot \\ &\quad \underline{A}^T \underline{\omega} \underline{\omega} \underline{A} \underline{\rho}^k \in \mathbb{R}^{s \times 1} \\ \underline{f}^0 &= (\underline{C}_a \underline{\dot{a}} + \underline{K}_a \underline{a})^T \in \mathbb{R}^{s \times 1} \\ \underline{f}^u &= \sum_{k=1}^n \underline{\Phi}^{kT} \underline{F}^k \in \mathbb{R}^{s \times 1} \end{aligned} \quad (6)$$

其中 \underline{C}_a 和 \underline{K}_a 分别为梁的模态阻尼矩阵和模态刚度矩阵, \underline{F}^k 为外力相对于绝对坐标系的坐标向量.

2 空间抑振轨迹规划

2.1 五次插值优化轨迹

在机械臂末端执行器的轨迹规划中, 尤其是在狭小空间作业时, 全面考虑运动过程对于确保精确性至关重要. 研究者通常使用多项式、样条曲线或 S 型曲线函数等来描述柔性的末端的运动, 使轨迹光滑达到末端抑振的效果. 其中五次多项式因其计算简便和参数优化效率高而广受青睐, 通过起始和终止位置的约束, 有效简化了优化过程.

为使机械臂末端能够在笛卡尔空间中按照所

需要的狭小工作空间约束进行运动,考虑1种末端画圆的示例,并设定关节末端的姿态保持不变。对于机械臂末端画圆的半径设为 r ,单位为m,在某个平面内画圆运动的转动角度为 Θ 。该平面相对于机械臂坐标系采用3个向量进行描述,分别是 \mathbf{p}_0 、 \mathbf{p}_1 、 \mathbf{p}_2 ,根据机械臂摆放这3个向量设为式如下:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0 &= [-0.1, 0.4, 0.5] \\ \mathbf{p}_1 &= [-0.1, 0.2, 0.5] \\ \mathbf{p}_2 &= [-0.1, 0.4, 0.6]\end{aligned}\quad (7)$$

根据上述3个向量规划机械臂末端姿态为

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \mathbf{B} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{X} \times \mathbf{B}, \mathbf{Y} = \mathbf{Z} \times \mathbf{X} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{X} / |\mathbf{X}|, \mathbf{y} = \mathbf{Y} / |\mathbf{Y}|, \mathbf{z} = \mathbf{Z} / |\mathbf{Z}| \\ \mathbf{R} &= [\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T], \mathbf{J} = [\mathbf{R}, \mathbf{p}_0^T]\end{aligned}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r\cos(\Theta) \\ 0 & 1 & 0 & r\sin(\Theta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

该轨迹在机械臂坐标系中以 \mathbf{p}_0 为圆心, r 为半径($r=|\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_0|=0.2$ m), Θ 为转动角度的圆形轨迹,机械臂末端的位姿为 $\mathbf{T}_{\text{end}} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{T}$ 。其中需要进行规划的为转动角度 Θ ,起始位置角度为0,终点位置为 2π ,且起始与终点的速度为0,五次多项式轨迹设为式(9)。设终点时间为 t_f ,根据起始和终点运动状态的约束可以得到式(10)。

$$\Theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \quad (9)$$

$$\begin{aligned}a_0 &= 0, a_1 = 0 \\ a_2 &= (6\pi + a_4 t_f^4 + 2a_5 t_f^5) / t_f^2 \\ a_3 &= (-4\pi - 2a_4 t_f^4 - 3a_5 t_f^5) / t_f^3\end{aligned}\quad (10)$$

空间梁的运动轨迹实现是由机械臂实现的,在实际运动中加入了软启动和软终止的条件,约束为启动和终止的加速度绝对值不超过 π ,因此得到约束式(11)以及优化轨迹的目标函数设计式(12)。

$$\begin{aligned}\frac{12\pi - \pi t_f^2}{t_f^5} &\leq a_5 \leq \frac{12\pi + \pi t_f^2}{t_f^5} \\ \frac{-\pi t_f^2/2 - 6\pi - 2a_5 t_f^5}{t_f^4} &\leq a_4 \leq \frac{\pi t_f^2/2 - 6\pi - 2a_5 t_f^5}{t_f^4} \\ \frac{-\pi t_f^2/2 + 6\pi - 3a_5 t_f^5}{t_f^4} &\leq a_4 \leq \frac{\pi t_f^2/2 + 6\pi - 3a_5 t_f^5}{t_f^4}\end{aligned}\quad (11)$$

$$w_{\text{object}} = \lambda_1 \int_0^{t_f} \|\mathbf{P}\|_1 dt + \lambda_2 \int_{t_f}^{t_{\text{end}}} \|\mathbf{P}\|_1 dt \quad (12)$$

P 为细长执行器即末端柔性臂的末端振动位移, λ_1 和 λ_2 为各自的权重系数,于是在执行器执行任务的过程中以及运动结束后的振动最小即使得目标函数最小。

2.2 粒子群优化轨迹以及遗传优化轨迹

机械臂末端细长执行器由一段长度为40 cm、直径为5 mm的细长亚克力棒代替,在执行器末端的实物如激光等,用直径3 cm的PC材料的集中质量小球代替。在设计该轨迹时,在满足关节角速度最大限制以及软启动和软终止的约束条件下要求轨迹必须在5 s内完成,结束运动后振动幅值大大减小,做到执行任务的快速、准确以及抑振。其中目标函数为式(12),目标函数中的 \mathbf{P} 由式(4)计算得到的模态函数 \mathbf{a} 与绝对坐标系下的末端模态向量阵 Φ_a^n 构成的 $\mathbf{P} = \Phi_a^n \mathbf{a}$ 获得,仿真优化即找到使目标函数最小的轨迹规划参数 a_4 、 a_5 。

粒子群优化算法(PSO)是一种基于群体智能的优化技术,在PSO中每个解决方案被视为搜索空间中的一个“粒子”,粒子在解空间中飞行,通过跟踪个体和群体的历史最佳位置来更新自己的位置和速度,从而寻找最优解,优化的目标函数效果如图4所示。

遗传算法(GA)是一种模拟自然选择和遗传学机制的搜索启发式算法。它通过模拟“适者生存”的进化过程来解决优化问题。在遗传算法中,问题的潜在解决方案被编码为染色体或基因串,然后通过选择、交叉(或称为杂交)、变异等操作来迭代生成新的种群,其优化轨迹参数过程如图5所示。

对比两种优化算法可知PSO在前10次左右来到了第一个低值,但通过200多次迭代后才再一次下降到最低值0.676 02。从GA的结果中可以看到每代中最低和最高的个体值以及平均值,并且仅通过了120次迭代就来到了算法所得最低值1.8807,随后不再变化。为得到更优良的参数,将PSO和GA进行串行式混合^[28-30],首先利用PSO快速定位近似最优解,并将其作为GA的初始种群,以增强解的质量和减少搜索过程中的随机性。PSO和GA进行串行式混合表现形式为利用PSO快速定位最优解(如图4中的first mutaon),再代入GA中(如图5),即将PSO第一次搜寻到的优化值位置代入GA,利用GA的全局搜索能力快速找

寻最优点.单独使用 PSO 时计算时间为 20 min 左右,单独使用 GA 时计算时间为 10 min 左右,而串行式优化算法的计算时间成本为 5 min 左右.这在保证了计算速率的同时也保证了目标函数的最优搜寻.这种算法协同作用显著提升了整体优化性能,最终实现了目标函数值 0.5968 的最优解.结果显示串行式混合优化算法不仅在时间上得到了优化,同时目标函数的最优值搜寻效果也得到了提升.

优化后的 Θ 如图 6 所示,PSO 单独优化得到的角度轨迹与 PSO 和 GA 串行优化得到的角度轨迹相似,但两者之间存在细微差异,这导致了柔性末端的振动表现也略有不同.图中“GA-PSO”表示 PSO、GA 串行式混合算法.

为验证优化轨迹的抑振效果,将优化轨迹后的末端振动位移与机械臂程序中默认圆轨迹进行对比.其中机械臂程序中自带的默认圆轨迹进行数据采集后 4 次插值拟合后描述如下:

$$\Theta_{\text{default}} = \begin{cases} -0.0187t + 0.1414t^2 + \\ 1.0861t^3 - 0.1645t^4, & t \leq t_f \\ 2\pi, & t_f < t < t_{\text{end}} \end{cases} \quad (13)$$

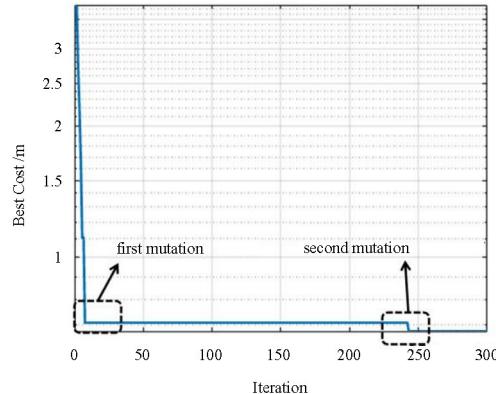


图 4 PSO 优化结果图

Fig. 4 Graph of PSO optimization result

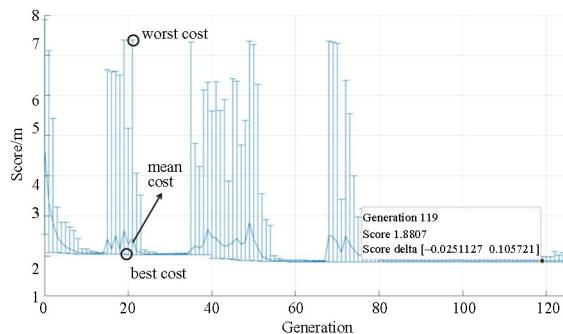


图 5 GA 优化目标函数值的高低线图

Fig. 5 High and low plot of GA optimization objective function value

式中 t_{end} 为停止运动后再等待 5 s 的时间,对比产生的末端振动位移如图 7 所示,细长梁的模型中轴向(相对于机械臂坐标系即为 x 方向)的振动不计.可见优化轨迹后 y 、 z 方向抑振效果显著.在 5 s 内的执行任务区间振动位移大大减小,5 s 后的残余振动抑振效果也较为显著,其中 PSO 与 PSO、GA 串行式混合的振动位移相比几乎贴合.

对比 PSO、GA 串行式混合和默认轨迹在起始、终止处振动幅值,得到 y 、 z 方向在终止处几乎达到 100% 抑振,起始处则分别约为 90.1% 和 80.0%.对该轨迹进行时间求导获得末端运动偏差速度即振动速度如图 8 所示,在 z 方向上 3 种优化方法得到的速度变化图趋势是一致的,在 3 s 附近

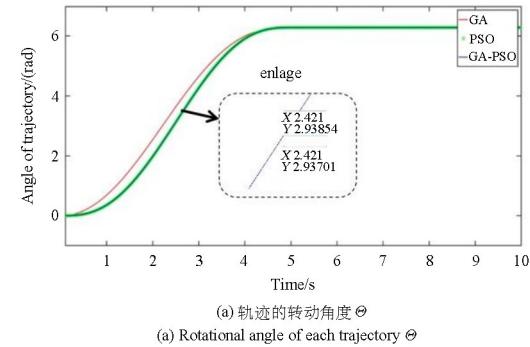
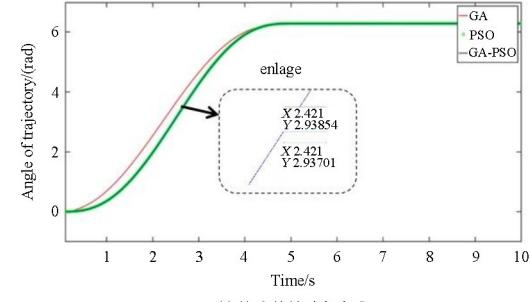
(a) 轨迹的转动角度 Θ
(a) Rotational angle of each trajectory(a) 轨迹的转动角度 Θ
(a) Rotational angle of each trajectory

图 6 优化圆轨迹的转动角度及角速度

Fig. 6 Rotational angle and angular velocity for optimal circle

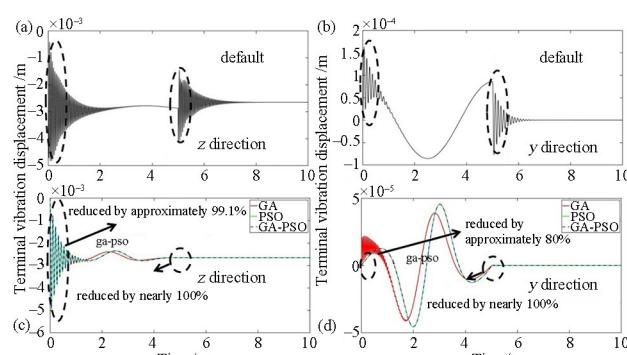


图 7 优化轨迹与默认圆轨迹的末端振动位移图,并对比 ga-pso 和默认圆轨迹在起始、终止处振幅

Fig. 7 Terminal vibration displacement diagram of optimization trajectory and random trajectories, and compare ga-pso and default circle trajectory amplitudes at start/end

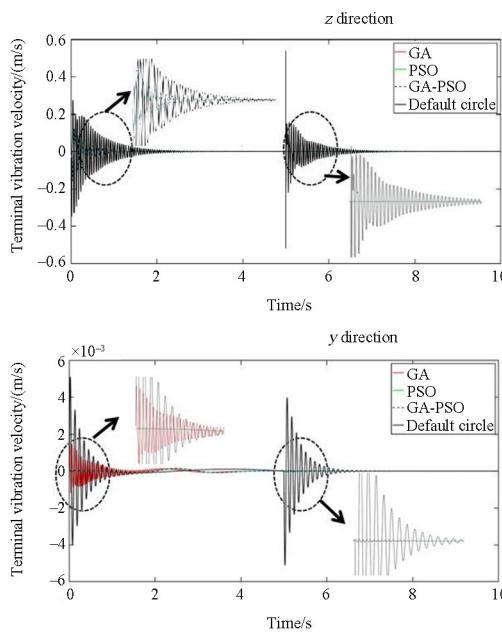


图 8 优化轨迹与默认圆轨迹的末端振动速度图
Fig. 8 Terminal vibration velocity diagram of optimization trajectory and random trajectories

振动速度恒为 0, 表示振动停止. 默认圆轨迹的末端振动速度在初始和停止阶段都产生了振动, 且在初始阶段振幅始终大于优化轨迹. y 方向上 PSO 优化轨迹与 PSO、GA 串行混合后优化轨迹所产生的振动速度轨迹相吻合, 并优于 GA 优化和默认圆轨迹.

综合考虑柔性末端运动偏差产生的振动位移和求导得到的振动速度, PSO、GA 串行优化的抑振轨迹不仅提升了执行任务中的整体振动抑制效果, 还对残余振动有着优良表现, 最优解为 $a_4 = -0.1492$, $a_5 = 0.0119$, 与单独使用 PSO 获得的最优解相近, 并且这一结果也与以往的研究结果相符合^[30]. 这种结合方法的优势在于其简洁性, 它简化了优化过程, 避免了 PSO 可能陷入局部最优的问题.

3 机械臂关节轨迹设计

3.1 机械臂奇异空间规避

为确保机械臂末端精准执行轨迹, 需规避腕部、肘部和肩部的奇异空间. 通过数值方法将笛卡尔轨迹转换为关节空间轨迹是常见做法, 但接近奇异位置时, 微小的关节调整可能导致轨迹追踪误差. 因此, 采用解析解法评估轨迹的可行性, 优化轨迹设计, 避免奇异空间, 确保机械臂运行的精确性和稳定性. 这种方法在设计阶段对轨迹进行优化,

有助于提高机械臂的操作效率和安全性.

JAKA Zu5 是一款具有 6 个自由度的协作机械臂, 能在工业自动化中灵活应用. 该机械臂的 MDH 参数是运动学建模的基础, 如表 1 所示. 在运动学方程的构建中, 末端执行器的坐标系被定义为最后 1 个关节坐标系, 这确保了机械臂在执行复杂任务时的精确性和重复性. 通过这种方法, 机械臂能够实现高效的路径规划和操作, 满足工业自动化中的多样化需求, 建立式(14)的运动学模型:

$$\mathbf{T}_{\text{end}} = {}^0\mathbf{T}_1^1 \mathbf{T}_2^2 \mathbf{T}_3^3 \mathbf{T}_4^4 \mathbf{T}_5^5 \mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

根据优化轨迹得到的机械臂末端姿态 \mathbf{T}_{end} 和每一个关节与相邻关节之间的转换矩阵可以得到机械臂各个关节的解析解, 每个空间点会对应产生 8 组关节角度, 由于本研究中的机械臂在桌面上运行, 则考虑 $z > 0$ 的情况. 在经过某个区域时会有几组无解的区域, 其中 3 个无解区域刚好对应了肘部奇异、腕部奇异和肩部奇异空间, 如图 9 所示.

在求解关节轨迹时会发现之前设计的轨迹空间在经过肘部奇异空间时, 机械臂逆运动学解析解

表 1 机械臂 MDH 参数
Table 1 MDH parameters of the robotic arms

i	$\theta_i / (^\circ)$	d_i / m	a_{i-1} / m	$\alpha_{i-1} / (^\circ)$
1	θ_1	0	0.1201	0
2	θ_2	0	0	90
3	θ_3	0.4300	0	0
4	θ_4	0.3685	-0.1140	0
5	θ_5	0	0.1135	90
6	θ_6	0	0.1070	-90

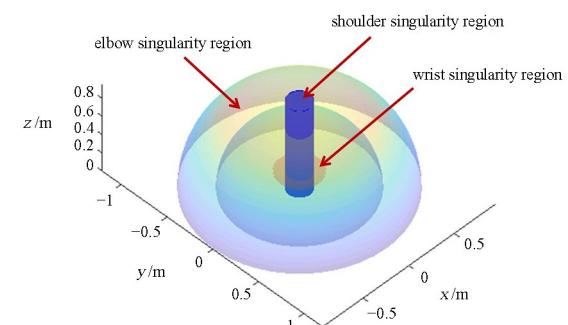


图 9 机械臂无解区域
Fig. 9 Unsolvable region of robotic arm

会存在4组无解、4组有解,因此在设计轨迹时则需要提前考虑该轨迹是否为机械臂可执行轨迹以及是否存在奇异位姿。

3.2 机械臂轨迹避障

在验证仿真结果并检验优化得到的抑振轨迹的实际效果时,需要将机械臂的关节轨迹发送到机械臂中进行测试。机械臂在非奇异空间正常情况下有8组解,而在奇异空间可能只有4组有效解。在机械臂末端增加末端执行器后,运行过程中可能会导致机械臂末端执行器与机械臂产生碰撞,机械臂臂杆之间也可能产生碰撞。为使得设计的抑振轨迹方案能够切实地运行在实际的机械臂中,在机械臂提供实际运行轨迹之前,需要对带有柔性末端的机械臂系统进行避障轨迹规划。

采用轴对齐的包围盒(axis-aligned bounding box, AABB)方法对每根机械臂连杆以及末端执行器进行模拟,通过判断每个包围盒之间的距离是否小于安全间隙,可以确定机械臂在运行轨迹下是否可能发生碰撞。机械臂有6个自由度,其中第5自由度和第6自由度由机械臂的一根T型连杆进行连接,在不影响整个避障设计下建立包围盒模型时简化为1根圆柱连杆,在每个相邻连杆间设计1 cm的间隙,检测碰撞后得到无碰撞的机械臂关节空间解,选择1条作为机械臂的运行轨迹,得到图10所示的包围盒模型以及机械臂运行情况。

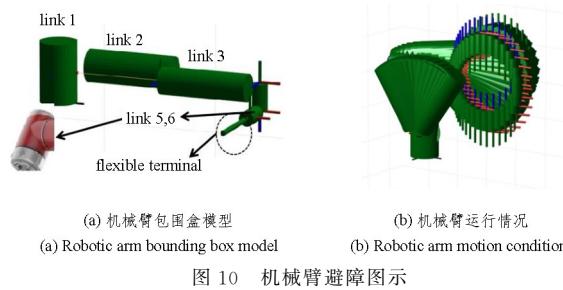


Fig. 10 机械臂避障图示

3.3 机械臂实际运行效果

在机械臂执行预设轨迹后,通过机械臂控制柜收集了其实际运行轨迹,并与规划轨迹进行了对比分析。如图11所示,“plan”为规划理想轨迹,“robot”为机械臂实际运行轨迹,“identified”为后续双目视觉辨识所得轨迹,实际运行轨迹与规划轨迹非常接近,坐标系的设定是相对于机械臂自身的。在对比中发现,对于圆轨迹的平面位置,距离误差最

大不超过1.4 mm;而对于圆心半径的精度,误差仅为0.9155 mm。在计划轨迹时处于理想状态,实际运行中存在电机角度与实际关节转动角度之间的差异、信号的接收误差、噪声干扰等因素导致轨迹实际运行存在滞后、偏差等,但其与圆轨迹运行基本一致。

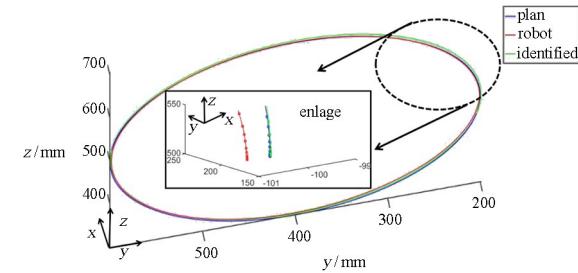


Fig. 11 Planning and true trajectory

4 实验验证抑振轨迹

4.1 实验设计

一个长度为40 cm,直径为5 mm的亚克力棒被用作模拟柔性末端执行器,其末端固定了一个半径为1.5 cm的白色PC材料小球,用于模拟执行器末端的集中质量,该亚克力棒安装在JAKA Zu5机械臂的末端。实验中,采用两个大恒工业相机(型号MER2-160-227U3M)构成了双目立体视觉系统,用于捕捉小球的空间坐标位置。通过对相机系统进行标定和数据采集,小球的三维坐标被准确获取,并从小球坐标系转换至机械臂坐标系,以便监测小球在空间中的动态运动,如图12所示。

通过网线将电脑连接至机械臂控制柜,以125 Hz的频率发送由MATLAB规划的关节位置信息,指令机械臂关节转动至特定角度。机械臂各个关节的关节轨迹即图10(b)中描述的关节运动情况,该设计下机械臂规避了奇异空间,同时也避免了末端柔性臂与机械臂自身的碰撞,以及机械臂与外界搭载平台的碰撞,提高了作业的连续性和可靠性。通过精确的轨迹规划和避障,机械臂能够更加灵活地适应多变的工作环境,这对保障操作安全至关重要。

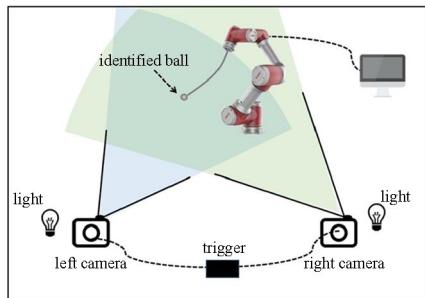
利用树莓派拓展板构建的双目相机同步拍摄触发板同步记录左右视觉相机数据,以捕获机械臂的运行状况。相机帧率为80 Hz,分辨率为1440×1880,通过25 mm规格的棋盘格对相机进行畸变

矫正,其中标定误差为0.06个像素,确保了图像特征点的准确提取和畸变矫正,从而使得后续实验中的三维重建和空间定位更加精确。对图像进行视觉处理后,精确提取柔性杆末端小球的圆心位置,进一步转换到三维坐标空间中,以测定末端执行器的运动状态。

安装固定小球于机械臂本体末端,视觉系统辨识效果如图11所示,视觉系统辨识的轨迹与理想平面圆轨迹的最大平面距离误差 $1.96e-3$ mm,半径误差0.6980 mm,放大观察轨迹,三条轨迹之间存在一定差异,但辨识后的轨迹与理想轨迹更加贴合,其中存在的误差主要由图像检测系统和外部因素导致。虽然轨迹误差不可避免,但并不影响振动位移验证的准确性。



(a) 机械臂实验平台
(a) Experimental platform of robotic arm



(b) Diagram of binocular vision detection system

图 12 总体实验方案示意图

Fig. 12 Schematic diagram of the overall experiment

4.2 实验结果

实验通过两相机构成的双目视觉测量系统图[12(b)],由硬件触发信号控制左右相机,保证两相机每一帧图像均同步拍摄。机械臂的默认圆轨迹和优化轨迹下末端位移如图13所示。在机械臂的抑振实验中,辨识得到的轨迹存在图像检测误差和机械臂运行误差,这些误差在三维标定过程中被放大,导致了 y 、 z 方向上的偏差,但对于抑振效果的

检验影响较小。实验结果表明,两轨迹在 x 方向上产生的振动极小。在优化轨迹的作用下,机械臂的柔性末端在 z 方向上的抑振效果相较于 y 方向更为显著。在停止后5 s内两个方向上都表现出良好的抑振效果。此外,优化轨迹采用了软启动和软终止约束,降低了加速度,提高了操作安全性。

末端轨迹的振动幅度相对较小,为了更清晰地分析振动情况,通过对比辨识得到的轨迹与理想轨迹的差值,得到末端振动位移图如,图14所示。在

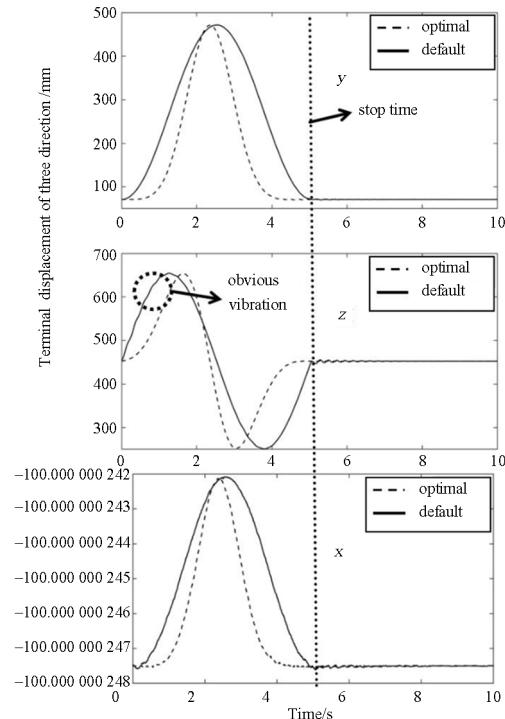


图 13 优化轨迹以及默认圆轨迹的末端识别
Fig. 13 The terminal identification of the optimal and random trajectory

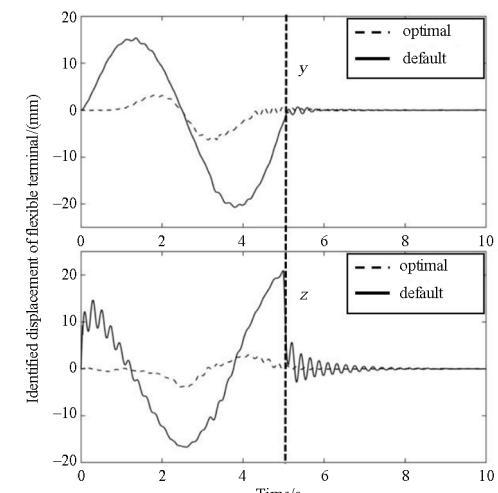


图 14 y 和 z 方向振动位移曲线优化前后对比
Fig. 14 Comparison of the displacement of y - and z -direction with/without optimization

y 和 z 方向上, 优化轨迹相较于默认圆轨迹在任务执行期间和任务结束后的振动都得到了显著抑制。这一结果验证了采用 PSO、GA 串行式混合优化的五阶插值轨迹能够有效地平滑运动路径, 减少因振动造成的位移。尽管在实验过程中, 机械臂的运行误差和视觉测量系统的误差可能导致了一定的额外位移, 但优化轨迹在抑制振动方面的性能仍然表现得十分明显。这些结果表明, 所提出的优化方法在实际应用中具有潜在的实用价值, 能够提高机械臂运动的精度和稳定性。

5 总结

本论文研究了具有柔性末端的 6 自由度机械臂末端振动控制问题。研究中, 末端细长执行器被简化为柔性梁并附加末端集中质量, 采用笛卡尔方法简化其动力学建模, 建立了柔性末端执行器的动力学模型。结合粒子群优化 (PSO) 和遗传算法 (GA), 利用五次多项式插值技术, 规划出抑振轨迹。通过引入软启动和软终止约束, 优化了轨迹规划过程。动力学仿真结果表明, 与未优化轨迹相比, 优化后的轨迹在机械臂系统坐标系的 y 轴方向起始和结束阶段振动幅值下降几乎达到了 99.1% 和 100%, 在 z 轴方向则分别达到了大约 80.0% 和 100% 的抑振效果, 验证了 PSO 与 GA 串行式混合算法在抑振轨迹规划中的有效性。

针对 JAKA Zu5 机械臂多自由度的复杂结构建立了其运动学模型, 从而获得了机械臂的逆运动学解析解, 提出了基于约束条件的关节空间轨迹规划方法, 有效避免了奇异点和自碰撞的风险, 考虑了实际工作场景的需求, 实验验证了其在机械臂轨迹规划中的有效性和实用性。此外, 在机械臂末端振动控制的验证实验中, 采用双目立体视觉的方法捕捉机械臂柔性末端的空间运动坐标, 补充并完善了目前柔性机械臂大范围运动工况下的运动测量与振动控制的实验方案, 同时证明了本研究提出的 PSO 与 GA 串行混合轨迹优化算法能够对机械臂柔性末端振动进行有效抑制。

参考文献

- [1] 吴琪, 王志刚, 杨宇, 等. 机械臂结构的发展与应用综述[J]. 航空科学技术, 2024, 35(5): 60—73.
WU Q, WANG Z G, YANG Y, et al. Review on development and application of structure of manipulator [J]. Aeronautical Science & Technology, 2024, 35(5): 60—73. (in Chinese)
- [2] 杨妍, 刘志杰, 韩江涛, 等. 软体机械臂的驱动方式、建模与控制研究进展[J]. 工程科学学报, 2022, 44(12): 2124—2137.
YANG Y, LIU Z J, HAN J T, et al. Overview of actuators, modeling, and control methods for soft manipulators [J]. Chinese Journal of Engineering, 2022, 44(12): 2124—2137. (in Chinese)
- [3] 方虹斌, 郑立, 张琦炜, 等. 柔性机械臂动力学建模研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 5—21.
FANG H B, ZHENG L, ZHANG Q W, et al. Research progress on dynamics modeling of flexible robotic arms: a review [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(12): 5—21. (in Chinese)
- [4] 娄军强, 魏燕定, 杨依领, 等. 空间柔性机械臂弯扭耦合振动的主动控制研究[J]. 振动工程学报, 2014, 27(3): 400—407.
LOU J Q, WEI Y D, YANG Y L, et al. Active control of bending-torsion-coupled vibration of a space flexible manipulator [J]. Journal of Vibration Engineering, 2014, 27(3): 400—407. (in Chinese)
- [5] 韩键美. 柔性机械臂最优抑振轨迹规划与跟踪控制研究[J]. 机械设计与制造, 2021(8): 25—30.
HAN J M. Flexible manipulator vibration suppression optimal trajectory planning and tracking control [J]. Machinery Design & Manufacture, 2021(8): 25—30. (in Chinese)
- [6] ROSNANI A A M, HADI M S, JAMALI A, et al. Hub angle control of double link flexible robotic arm manipulator using PID controller tuned by bacterial foraging optimization algorithm [C]//2023 13th International Conference on Power, Energy and Electrical Engineering (CPEEE). New York: IEEE, 2023: 144—148.
- [7] 张海波, 夏鸿建, 李德源, 等. 基于绝对节点坐标法的三维柔性旋转梁动力特性分析[J]. 广东工业大学学报, 2022, 39(2): 76—83.
ZHANG H B, XIA H J, LI D Y, et al. A dynamic characteristics analysis of 3D flexible rotating beam based on absolute node coordinate formulation [J]. Journal of Guangdong University of Technology, 2022, 39(2): 76—83. (in Chinese)
- [8] 王桐桐. 基于绝对节点坐标法的柔性板的模型建立和运动变形分析[D]. 石家庄: 石家庄铁道大学,

- 2023.
- WANG T T. Model establishment and motion deformation analysis of flexible plate based on the absolute nodal coordinate formulation [D]. Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University, 2023. (in Chinese)
- [9] 孙巍伟, 代锟, 马飞. 空间柔性机械臂建模、控制以及轨迹规划研究综述[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(1): 34—60.
- SUN W W, DAI K, MA F. Review of modeling, control and trajectory planning of space flexible manipulators [J]. Science Technology and Engineering, 2024, 24(1): 34—60. (in Chinese)
- [10] 洪嘉振. 多体系统动力学: 理论、计算方法和应用 [M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1992.
- HONG J Z. Dynamics of multibody systems [M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1992. (in Chinese)
- [11] 王航. 柔性关节柔性连杆机械臂抑振轨迹规划[J]. 机械设计与制造工程, 2018, 47(12): 28—32.
- WANG H. The trajectory planning for manipulator with flexible link and flexible joint [J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2018, 47(12): 28—32. (in Chinese)
- [12] 谭加林, 肖正明, 伍星, 等. 柔性关节机械臂轨迹规划及振动抑制研究[J]. 机械科学与技术, 2023, 42(4): 504—511.
- TAN J L, XIAO Z M, WU X, et al. Research on trajectory planning and vibration suppression of flexible joint manipulator [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2023, 42(4): 504—511. (in Chinese)
- [13] ZHANG W X. Vibration avoidance method for flexible robotic arm manipulation [J]. Journal of the Franklin Institute, 2018, 355(9): 3968—3989.
- [14] PARK H, LEE S H. Eigenvector assignment based vibration suppression control for a two link flexible joint robot arm [C]//2008 International Conference on Control, Automation and Systems. New York: IEEE, 2008: 2513—2516.
- [15] 娄军强, 魏燕定, 李国平, 等. 基于遗传优化算法的柔性机械臂抑振轨迹规划研究[J]. 振动与冲击, 2016, 35(11): 1—6, 40.
- LOU J Q, WEI Y D, LI G P, et al. Optimal trajectory planning of a flexible manipulator for its vibration suppression using genetic algorithm [J]. Journal of Vibration and Shock, 2016, 35(11): 1—6, 40. (in Chinese)
- [16] CUI L L, WANG H S, CHEN W D. Trajectory planning of a spatial flexible manipulator for vibration suppression [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2020, 123: 103316.
- [17] LIANG L, WU C D, LIU S C. A terminal residual vibration suppression method of a robot based on joint trajectory optimization [J]. Machines, 2024, 12(8): 537.
- [18] HUANG H, TANG G Y, CHEN H X, et al. Vibration suppression trajectory planning of underwater flexible manipulators based on incremental Kriging-assisted optimization algorithm [J]. Journal of Marine Science and Engineering, 2023, 11(5): 938.
- [19] MENG Q X, LAI X Z, YAN Z, et al. Motion planning and adaptive neural tracking control of an uncertain two-link rigid-flexible manipulator with vibration amplitude constraint [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2022, 33(8): 3814—3828.
- [20] PHAN V P, GOO N S, PARK H C. Vibration suppression of a flexible robot manipulator with a lightweight piezo-composite actuator [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2009, 7(2): 243—251.
- [21] XIAO Q, XIANG G F, CHEN Y K, et al. Time-optimal trajectory planning of flexible manipulator moving along multi-constraint continuous path and avoiding obstacles [J]. Processes, 2023, 11(1): 254.
- [22] ABE A. Trajectory planning for residual vibration suppression of a two-link rigid-flexible manipulator considering large deformation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(9): 1627—1639.
- [23] 刘锦阳, 李彬, 洪嘉振. 作大范围空间运动柔性梁的刚—柔耦合动力学[J]. 力学学报, 2006, 38(2): 276—282.
- LIU J Y, LI B, HONG J Z. Rigid-flexible coupling dynamics of a flexible beam with three-dimensional large overall motion [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2006, 38(2): 276—282. (in Chinese)
- [24] 和兴锁, 邓峰岩, 王睿. 具有大范围运动和非线性变形的空间柔性梁的精确动力学建模[J]. 物理学报, 2010, 59(3): 1428—1436.
- HE X S, DENG F Y, WANG R. Exact dynamic

- modeling of a spatial flexible beam with large overall motion and nonlinear deformation [J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 59(3): 1428—1436. (in Chinese)
- [25] MOHANAN M G, SALGOANKAR A. A survey of robotic motion planning in dynamic environments [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2018, 100: 171—185.
- [26] 田金文. 双机械臂避障路径规划算法研究[D]. 青岛: 青岛科技大学, 2023.
TIAN J W. Obstacle avoidance pathplanning algorithm of dualmanipulator [D]. Qingdao: Qingdao University of Science & Technology, 2023. (in Chinese)
- [27] 曾攀. 有限元分析及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
ZENG P. Finite element analysis and applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese)
- [28] 李红亚, 彭昱忠, 邓楚燕, 等. GA 与 PSO 的混合研究综述[J]. *计算机工程与应用*, 2018, 54(2): 20—28, 39.
- LI H Y, PENG Y Z, DENG C Y, et al. Review of hybrids of GA and PSO [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2018, 54(2): 20—28, 39. (in Chinese)
- [29] MOUSSA R, AZAR D. A PSO-GA approach targeting fault-prone software modules [J]. *Journal of Systems and Software*, 2017, 132: 41—49.
- [30] ZHANG Q, OGREN R M, KONG S C. A comparative study of biodiesel engine performance optimization using enhanced hybrid PSO-GA and basic GA [J]. *Applied Energy*, 2016, 165: 676—684.