

鸭式布局自旋尾翼弹箭系统 Hopf 分岔及稳定性分析^{*}

罗中琦^{1,2} 王立峰^{1†} 张涪² 曹天笑¹ 杨鹏²

(1. 南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

(2. 中国航天科工集团六院二一〇所, 西安 710065)

摘要 本文推导了鸭式布局自旋尾翼弹箭的非线性角运动方程组,并通过 Hopf 分岔特性分析来研究系统的角运动稳定性.以某型鸭式布局自旋尾翼弹为例,根据计算所得系统特征值的变化及所得 Hopf 分岔曲线,将角运动稳定性区间划分为稳定收敛域、稳定锥动域和不稳定域,并通过仿真计算加以验证.通过计算 Hopf 分岔点、极限环分岔点位置随参数的改变,定性研究参数对系统稳定性边界的影响.采用 Hurwitz 稳定性判据获取不稳定极限环半径,定量研究参数对系统稳定性边界的影响.结果表明:非线性气动力矩系数和控制舵偏角的变化均会对系统的分岔特性有较大影响,设计者应合理选取这些参数从而使其具有良好的气动特性与稳定性.

关键词 鸭式布局, 自旋尾翼, 非线性动力学, Hopf 分岔, 稳定性

中图分类号:V212.12

文献标志码:A

Analysis of Hopf Bifurcation and Stability of Canard Self-Rotating Projectile System^{*}

Luo Zhongqi^{1,2} Wang Lifeng^{1†} Zhang Fu² Cao Tianxiao¹ Yang Peng²

(1. State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

(2. The 210th Institute of the Sixth Academy of CASIC, Xi'an 710065, China)

Abstract This paper derives the nonlinear angular motion equations of canard self-rotating projectile and investigates the stability of the system's angular motion through Hopf bifurcation analysis. Taking a specific model of a canard self-rotating projectile as an example, based on the variation of the system's eigenvalues and the calculated Hopf bifurcation curve, the angular motion stability region is divided into the stable convergence region, stable coning region, and unstable region, which is further validated through simulation calculations. By calculating the changes in the positions of the Hopf bifurcation point and limit cycle bifurcation point with respect to parameter variations, the qualitative influence of parameters on the system's stability boundary is studied. Additionally, the unstable limit cycle radius is obtained using the Hurwitz stability criterion, allowing for a quantitative investigation of the influence of parameters on the system's stability boundary. The results indicate that nonlinear aerodynamic moment coefficients and control deflections significantly affect the system's bifurcation characteristics. Therefore, designers should carefully select these parameters to ensure optimal aerodynamic performance and stability.

Key words canard, self-rotating fins, nonlinear dynamics, Hopf bifurcation, stability

2024-11-24 收到第 1 稿,2024-12-10 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(U2341230), National Nature Science Foundation of China (U2341230).

[†] 通信作者 E-mail:walfe@nuaa.edu.cn

引言

弹箭的稳定性问题在外弹道学方面一直是国内外专家学者研究的重点与难点。弹箭的气动布局在不断地改变以适应不同的使用环境和战略目的,然而在一些实战和试验中出现了一些新的角运动现象。例如在高原试验中,观测到火箭弹在大射角射击时多次出现近弹和掉弹现象,根据姿态测量结果,这些弹丸在主动段结束时曾出现不同程度的锥形运动,有的甚至发生角运动发散。这些角运动现象通过线性理论往往难以解释,近年来的研究表明这可能是非线性运动造成的。

20 世纪 60 年代初,美国外弹道专家 Murphy^[1]就建立了弹丸的线性角运动方程,较好地描述了弹丸的复攻角角运动,并在一段时间内被学者采纳,解决了早期弹丸稳定性相关问题。进入 21 世纪,早期理论难以解释弹箭在复杂甚至极端环境下的一些运动现象,例如西班牙 Teruel 144 mm 火箭弹出现的高原飞行不稳定现象,在 28 次飞行试验中出现了 9 次锥形运动,使得飞行速度大幅降低^[2];美国 Nitehawk 探空火箭飞行试验 50 多次飞行试验中出现了 20 多次锥形运动发散^[3]。近些年来,众多专家学者将非线性振动理论引入外弹道学,对弹箭的各种非线性运动现象进行了讨论与解释。韩子鹏^[4]采用振幅平面法分析了弹箭的非线性角运动特性并给出了非线性角运动的动态稳定性判据。钟扬威等^[5]针对火箭弹在高原试验时出现的近弹、掉弹问题,以密度作为分岔参数,运用中心流形定理在分岔点对角运动方程进行降维,然后通过构造超临界 Hopf 分岔对火箭弹角运动进行分析,结果很好地解释了弹箭在高原低密度环境下飞行时出现的锥动现象,并且采用数值方法求解在很大程度上保留了角运动的非线性,具有较高精度。邢炳楠等^[6]用同样的方法对某尾翼式弹道修正弹进行了计算,通过数值仿真验证了理论分析方法的正确性,并在此基础之上分析了修正机构参数对角运动稳定性的影响,结果发现将修正机构靠近质心安装更有利于弹箭飞行的稳定性。进一步,杨志伟等^[7]通过构造次临界 Hopf 分岔计算不稳定极限环半径从而预测旋转稳定弹的非线性角运动吸引域边界,并且计算了不同参数对边界的影响。李东阳等^[8]采用平方和规划法求解弹箭非线性角运动

的吸引域,为弹箭非线性运动研究提供新的理论工具。周文涛等^[9]针对一有控自旋卷弧尾翼弹箭,分别建立了 7 自由度刚体动力学模型和非线性角运动方程,同样利用平方和规划法计算了该弹箭特征点处的非线性角运动吸引域并通过仿真加以验证。赵新新等^[10]推导了固定式鸭舵双旋弹的非线性角运动方程组,采用系数冻结法计算了角运动状态矩阵的特征方程,利用 Hurwitz 方法获取了角运动稳定性判据,通过判据计算不稳定极限环半径,这本质上也为获取弹箭吸引域边界的计算方法提供了一种思路。通过上述可以看出,应用 Hopf 分岔不仅可以计算弹箭非线性角运动的稳定和不稳定极限环,而且根据非线性稳定性理论,不稳定极限环包含一个稳定平衡点,所以不稳定极限环可以看作平衡点吸引域的边界^[7],然而相较于传统方法利用平方和规划来计算吸引域边界^[11],Hopf 分岔在计算上更加简便和容易理解。

在其他学科方面,利用 Hopf 分岔求解系统稳定性也有广泛的应用^[12-14]。研究人员通过构造超、次临界 Hopf 分岔单独计算了弹箭非线性角运动的稳定极限环或者不稳定极限环并且加以验证^[5-7]。本文在此基础上,以某型鸭式布局自旋尾翼弹为例,考虑气动非线性,对其进行动力学建模并推导非线性角运动方程,仍然选取大气密度作为分岔参数,选用成熟的延续算法工具 Matcont^[15]计算系统的 Hopf 分岔曲线,从而避免了繁杂的数学推导与计算。本文由计算所得分岔曲线来定义角运动稳定性区间,并通过仿真计算加以验证;随后分析非线性气动力矩系数和控制舵偏角对 Hopf 分岔点和极限环分岔点坐标位置的影响,定性研究参数对系统稳定性边界的影响;最后利用 Hurwitz 稳定性判据获取不稳定极限环半径,定量研究非线性气动力矩系数对系统稳定性边界的影响。

1 动力学建模

为解决鸭式布局弹箭难以控滚的问题,工程上常采用自旋尾翼气动布局,即将尾翼与弹身解耦,中间采用轴承联接,轴承将弹箭分为前、后体,后体在气动力矩、轴承滚动摩擦力矩和黏性阻尼力矩的作用下自由旋转,前体通过鸭舵不断微调始终保持“X”型,某型鸭式布局自旋尾翼弹箭如图 1 所示。本节将对其进行动力学建模,并推导其非线性角运

动方程组,为后续分岔计算做准备.

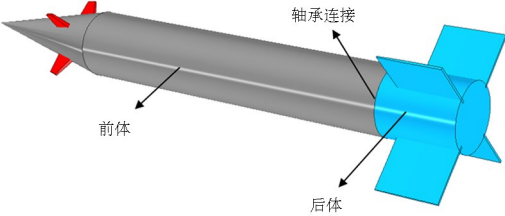


图1 鸭式布局自旋尾翼弹箭模型示意图
Fig.1 Schematic of canard self-rotating fins projectile model

1.1 坐标系定义

动力学建模采用外弹道学中常用的地面坐标系、基准坐标系、弹道坐标系、弹轴坐标系,为便于建模,还建立了前体坐标系和后体坐标系.地面坐标系 $O_1x_Ey_Ez_E$ 原点在发射口断面中心, O_1x_E 轴沿水平轴指向射击方向, O_1y_E 轴铅直向上, O_1z_E 轴按右手法则确定为垂直射击面指向右方,如图2所示.基准坐标系 $Ox_Ny_Nz_N$ 是由地面坐标系平移至弹箭质心 O 而形成,随质心一起平动,此坐标系用于确定速度和弹轴的空间方位.弹道坐标系为 $Ox_2y_2z_2$,其中 Ox_2 轴指向质心速度方向, Oy_2 轴垂直于速度矢量向上, Oz_2 轴按右手法则确定.弹道坐标系可由基准坐标系经两次旋转变换得到,如图2所示, θ_e 为弹道高低角, ψ_a 为弹道方位角.

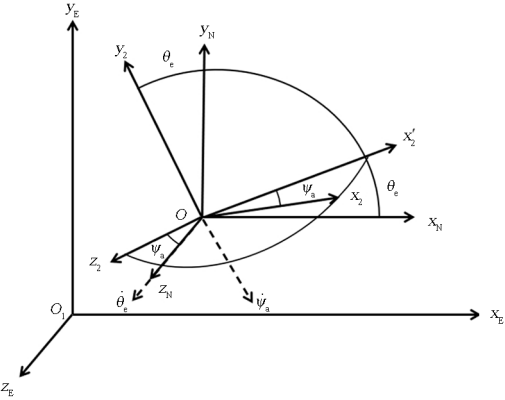


图2 地面坐标系、基准坐标系、弹道坐标系
Fig.2 Ground coordinate system, reference coordinate system, ballistic coordinate system

弹轴坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 也由基准坐标系经两次变换得到,其中 $O\xi$ 轴为弹轴, $O\eta$ 轴垂直于 $O\xi$ 轴指向上方, $O\zeta$ 垂直于 $O\xi\eta$ 指向右方,如图3所示, φ_e 为弹轴高低角, φ_a 为弹轴方位角.

由于弹箭前体始终保持“X”型,所以前体坐标系 $Ox_fy_fz_f$ 与弹轴坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 重合,可看作“非滚系”,后体坐标系 $Ox_ay_az_a$ 是在弹轴坐标系的基础

上绕弹轴 $O\xi$ 转过角度 γ 得到,坐标示意图如图4所示.

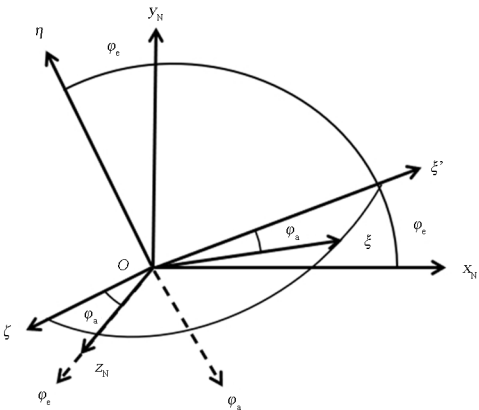


图3 基准坐标系、弹轴坐标系
Fig.3 Reference coordinate system, projectile axis coordinate system

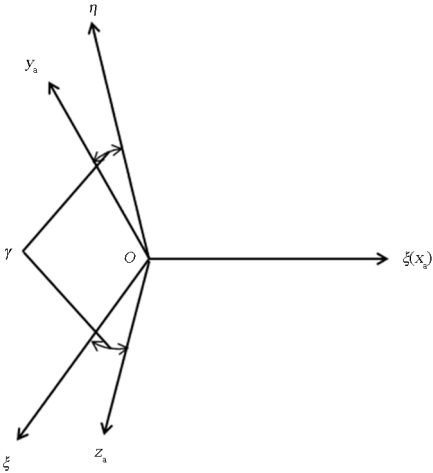


图4 前体坐标系、后体坐标系
Fig.4 Forebody coordinate system, afterbody coordinate system

1.2 空气动力和力矩模型

在建立动力学模型时,为突出主题的同时简化公式推导,本文忽略风场的影响,不计气动偏心引起的附加力与力矩,仅考虑必要的气动力与力矩.

1.2.1 作用在弹体的空气动力

忽略较小的马格努斯力,作用于弹体的空气动力主要为升力 F_y 、阻力 F_x 和重力 G ,其矢量表达式为:

$$\begin{cases} F_x = \frac{1}{2}\rho S c_x v(-v) \\ F_y = \frac{1}{2}\rho S c'_y v \times (-v \times \xi) \\ G = mg \end{cases} \quad (1)$$

式中 ρ 为空气密度; v 为速度矢量; $S = \pi d^2/4$ 为特征面积, d 为弹径; c_x 为弹体阻力系数; c'_y 为弹体

升力系数对 δ 的导数; ξ 为弹轴坐标系 $O\xi$ 上的单位向量; \mathbf{g} 为重力加速度矢量。

非线性阻力系数和升力系数导数分别为:

$$\begin{cases} c_x = c_{x0} + c_{x2}\delta^2 \\ c_y' = c_{y0} + c_{y2}\delta^2 + c_{y4}\delta^4 \end{cases} \quad (2)$$

式中: c_{x0} 、 c_{x2} 分别为阻力系数的常数项和平方项; c_{y0} 、 c_{y2} 、 c_{y4} 分别为升力系数导数的常数项、平方项和 4 次方项; δ 为总攻角。

1.2.2 鸭舵控制力

为简化问题仅考虑俯仰舵偏下的控制力和力矩,在弹轴坐标系中,鸭舵控制力可以表示为:

$$\begin{cases} F_{c,\xi} = -\frac{1}{2}\rho S v^2 c_{c,x} \\ F_{c,\eta} = \frac{1}{2}\rho S v^2 c_{c,y}' \delta_c \end{cases} \quad (3)$$

式中, $F_{c,\xi}$ 、 $F_{c,\eta}$ 分别表示舵面偏转所产生的阻力和升力在弹轴坐标系中的分量; δ_c 为舵偏角; $c_{c,y}'$ 为鸭舵升力系数对 δ_c 的导数; $c_{c,x} = c_{c,x_0}(1 + \sigma\delta_c^2)$ 为鸭舵阻力系数, c_{c,x_0} 为鸭舵零升阻力系数, σ 为攻角系数。

利用坐标变换关系,将式(3)投影到弹道坐标系中,可得鸭舵控制力在弹道坐标系的表达式为:

$$\begin{cases} F_{c,x_2} = F_{c,\xi} \cos\delta_e \cos\delta_a - F_{c,\eta} \sin\delta_e \\ F_{c,y_2} = F_{c,\xi} \sin\delta_e \cos\delta_a + F_{c,\eta} \cos\delta_e \\ F_{c,z_2} = F_{c,\xi} \sin\delta_a \end{cases} \quad (4)$$

式中, δ_e 为高低攻角, δ_a 为方位攻角; F_{c,x_2} 、 F_{c,y_2} 、 F_{c,z_2} 分别为鸭舵控制力在弹道坐标系中的投影分量。

1.2.3 作用在弹体的空气动力矩

弹体在飞行过程中还受到的空气动力矩包括静力矩 \mathbf{M}_z 、赤道阻尼力矩 \mathbf{M}_{zz} 、后体极阻尼力矩 \mathbf{M}_{xz} 、马格努斯力矩 \mathbf{M}_y 的矢量表达式分别为:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_z = \frac{1}{2}\rho S l v m_z' (\mathbf{v} \times \xi) \\ \mathbf{M}_{zz} = -\frac{1}{2}\rho S l d v m_{zz}' \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{M}_{xz} = -\frac{1}{2}\rho S l d v m_{xz}' \omega_\xi \xi \\ \mathbf{M}_y = \frac{1}{2}\rho S l v m_y' \xi \times (\mathbf{v} \times \xi) \end{cases} \quad (5)$$

以上各非线性力矩系数导数可表示为:

$$\begin{aligned} m_z' &= m_{z0} + m_{z2}\delta^2 + m_{z4}\delta^4 \\ m_{zz}' &= m_{zz0} + m_{zz2}\delta^2 + m_{zz4}\delta^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{xz}' &= m_{xz0} + m_{xz2}\delta^2 + m_{xz4}\delta^4 \\ m_y' &= m_{y0} + m_{y2}\delta^2 + m_{y4}\delta^4 \end{aligned} \quad (6)$$

式中 m_{z0} 、 m_{z2} 、 m_{z4} 和 m_{y0} 分别为各力矩系数导数的常数项, m_{zz2} 、 m_{zz4} 和 m_{y2} 分别为各力矩系数导数的平方项, m_{xz4} 和 m_{y4} 分别为各力矩系数导数的 4 次方项。

1.2.4 鸭舵控制力矩

鸭舵控制力矩在弹轴坐标系中的投影可表示为:

$$\begin{cases} M_{c,\xi} = 0 \\ M_{c,\eta} = 0 \\ M_{c,\xi} = F_{c,\eta} l_d \end{cases} \quad (7)$$

式中, l_d 为舵面压心到全弹质心的距离。

1.2.5 滚转约束力矩

将前后体间联接轴承产生的滚动摩擦力矩与黏性阻尼力矩统一折算为一约束力矩 M_v , 表达式如下:

$$M_v = c_v \dot{\gamma} \quad (8)$$

式中, c_v 为滚转约束力矩系数。

1.3 角运动方程推导

由质心运动定理和绕质心的动量矩定理可推得到:

$$\frac{d\theta_e}{dt} = \frac{F_{y_2} + F_{c,y_2}}{mv \cos\phi_a} \quad (9)$$

式中: θ_e 表示弹道高低角; t 表示时间; F_{y_2} 表示作用在导弹上的空气动力在弹道坐标系 Oy_2 轴下的分量; m 表示导弹质量; v 表示导弹质心速度; ϕ_a 表示弹道方位角,

$$\frac{d\phi_a}{dt} = \frac{F_{z_2} + F_{c,z_2}}{mv} \quad (10)$$

F_{z_2} 表示作用在导弹上的空气动力在弹道坐标系 Oz_2 轴下的分量,

$$\frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{1}{A} M_\eta - \frac{C}{A} \omega_\xi \omega_\zeta + \omega_\zeta^2 \tan\varphi_a \quad (11)$$

ω_ξ 、 ω_η 、 ω_ζ 表示弹轴绕质心的角速度在弹轴坐标系三坐标系上的投影; C 表示后体极转动惯量; A 表示赤道转动惯量; M_η 表示作用在导弹上的空气动力矩在弹轴坐标系 $O\eta$ 轴上的分量; φ_a 表示弹轴方位角,

$$\frac{d\varphi_a}{dt} = -\omega_\eta \quad (12)$$

$$\frac{d\omega_\zeta}{dt} = \frac{1}{A} M_\zeta + \frac{C}{A} \omega_\xi \omega_\eta + \omega_\eta \omega_\xi \tan\varphi_a \quad (13)$$

M_η 表示作用在导弹上的空气动力矩在弹轴坐标系 $O\eta$ 轴上的分量,

$$\frac{d\varphi_e}{dt} = \frac{\omega_\zeta}{\cos\varphi_a} \quad (14)$$

φ_e 表示弹轴高低角.

式(9)~(14)为6自由度弹道方程中的角运动方程,详细推导过程可参考文献[16].由于上述方程组封闭但难以求得解析解,为了便于理论分析,应用线性化理论对其进行简化处理,近似认为理想弹道倾角 $\theta = \theta_e$, $\delta_e = \varphi_e - \theta_e$, $\delta_a = \varphi_a - \psi_a$, 将式(9)~(14)化简,可解如下微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_e = \frac{F_{y_2} + F_{c,y_2}}{-mv} + \frac{\omega_\zeta}{\cos\delta_a} \\ \dot{\delta}_a = -\omega_\eta + \frac{F_{x_2} + F_{c,x_2}}{-mv\cos\delta_e} \\ \dot{\omega}_\eta = \frac{1}{A}M_\eta - \frac{C}{A}\omega_\xi\omega_\zeta + \omega_\zeta\omega_\xi\tan\varphi_a \\ \dot{\omega}_\zeta = \frac{1}{A}M_\zeta + \frac{C}{A}\omega_\xi\omega_\eta - \omega_\eta\omega_\xi\tan\varphi_a \end{cases} \quad (15)$$

弹箭绕质心运动学方程组为:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \omega_\xi - \omega_\zeta\tan\varphi_a \\ \dot{\varphi}_e = \omega_\zeta/\cos\varphi_a \\ \dot{\varphi}_a = -\omega_\eta \end{cases} \quad (16)$$

为便于表示,引入如下组合参数:

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{\rho S}{2m}c_x, b_{c,x} = \frac{\rho S}{2m}c_{c,x}, b_y = \frac{\rho S}{2m}c'_y, \\ b_{c,y} &= \frac{\rho S}{2m}c'_{c,y}, k_c = \frac{\rho S l_D}{2A}c'_{c,y}, k_z = \frac{\rho S l}{2A}m'_z, \\ k_{zz} &= \frac{\rho S l d}{2A}m'_{zz}, k_y = \frac{\rho S l}{2A}m'_y \end{aligned}$$

将1.2节中的力和力矩代入式(15),整理可得:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_e = \omega_\zeta - v \left[b_y\delta_e - b_{c,x}\delta_e + b_{c,y}\delta_c + \frac{g}{v^2}\cos\theta \right] \\ \dot{\delta}_a = -\omega_\eta - v \left[b_y\delta_a - b_{c,x}\delta_a - \frac{g}{v^2}\sin\theta\sin\varphi_a \right] \end{cases} \quad (17)$$

$$\dot{\omega}_\eta = v^2(-k_z\delta_a + k_y\delta_e - k_{zz}\omega_\eta/v) - \frac{C}{A}\dot{\gamma}\omega_\zeta$$

$$\dot{\omega}_\zeta = v^2(k_z\delta_e + k_y\delta_a - k_{zz}\omega_\zeta/v + k_c\delta_c) + \frac{C}{A}\dot{\gamma}\omega_\eta \quad (18)$$

将式(17)、(18)写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1 \begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_a \end{bmatrix} + \mathbf{B}_2 \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{bmatrix} + \mathbf{b} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_\eta \\ \dot{\omega}_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\zeta \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{bmatrix} + \mathbf{d} \quad (20)$$

式中,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_2 = v \begin{bmatrix} 0 & -b_y + b_{c,x} \\ b_y - b_{c,x} & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D}_1 &= \begin{bmatrix} -k_{zz} & -P \\ P & -k_{zz} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_2 = v^2 \begin{bmatrix} k_y & -k_z \\ k_z & k_y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= v \begin{bmatrix} \frac{g}{v^2}\sin\theta\sin\varphi_a \\ \frac{g}{v^2}\cos\theta + b_{c,y}\delta_c \end{bmatrix}, \mathbf{d} = v^2 \begin{bmatrix} 0 \\ k_c\delta_c \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

联立式(19)和式(20),利用导数关系 $\dot{(\cdot)} = v(\cdot)', \ddot{(\cdot)} = v^2(\cdot)'' + \dot{v}(\cdot)'$ 将方程自变量转换为对弹道弧长 s 的导数,并略去小量($b_x, b_y, k_{zz}, g\sin\theta/v^2$ 等)的乘积项,可得状态空间形式的角运动方程:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\delta}_e \\ \ddot{\delta}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H & -P \\ P & -H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\delta}_e \\ \dot{\delta}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M & -PT \\ PT & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_e \\ \delta_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_e \\ R_a \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中, $H = k_{zz} + b_y - b_x - b_{c,x} - \frac{g\sin\theta}{v^2}$, $P = \frac{C\dot{\gamma}}{Av}$,

$$M = k_z, T = b_y - \frac{k_y}{P}, R_e = k_c\delta_c - \frac{\ddot{\theta}}{v^2} - k_{zz}\frac{\dot{\theta}}{v},$$

$$R_a = Pb_{c,y}\delta_c + P\frac{\dot{\theta}}{v}.$$

进一步,令

$$\mathbf{x} = [\delta_e, \delta_a, \delta'_e, \delta'_a]^T \quad (22)$$

则式(21)可表示为:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{Z} \quad (23)$$

$$\text{式中, } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ M & -PT & -H & -P \\ PT & M & P & -H \end{bmatrix}, \mathbf{Z} =$$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & R_e & R_a \end{bmatrix}^T$. 式(23)即为非线性角运动方程.

2 Hopf 分岔与稳定性分析

2.1 分岔计算与稳定性区间划分

在数值计算中,后体转速 $\dot{\gamma}$ 直接给出,所以计算不涉及极阻尼力矩和滚转约束力矩,将式(2)和式(6)中其余气动力系数(导数)改写为如下参数形式:

$$\begin{cases} c_x = c_{x0}(1+t_1\delta^2) \\ c'_y = c_{y0}(1+t_2\delta^2+k_2\delta^4) \\ m'_z = m_{z0}(1+t_3\delta^2+k_3\delta^4) \\ m'_{zz} = m_{zz0}(1+t_4\delta^2+k_4\delta^4) \\ m'_y = m_{y0}(1+t_5\delta^2+k_5\delta^4) \end{cases} \quad (24)$$

式中 t_i ($i=1,2,\cdots,5$) 为各空气动力和力矩系数(导数)的平方项与其常数项的比值,称作平方比值项; k_i ($i=2,3,\cdots,5$) 为各空气动力和力矩系数导数的 4 次方项与其常数项的比值,称作 4 次方比值项. 本算例中常数项: $c_{x0}=0.289$ 、 $c_{y0}=2.979$ 、 $m_{z0}=-0.86$ 、 $m_{zz0}=42.87$ 、 $m_{y0}=0.136$,平方比值项: $t_1=26.2$ 、 $t_2=-1.3$ 、 $t_3=2.4$ 、 $t_4=-2.2$ 、 $t_5=-12.2$,4 次方比值项: $k_2=-6.3$ 、 $k_3=-16.4$ 、 $k_4=9.2$ 、 $k_5=73.1$,鸭舵升力系数 $c'_{c,y}=2.2$,鸭舵零升阻力系数 $c_{c,x_0}=0.058$,攻角系数 $\sigma=25.2$,其余计算所需主要参数如下表所示.

表 1 主要参数
Table 1 Main parameters

参数 Parameter	数值 Value
m/kg	5.5
d/m	0.06
L/m	0.8
$C/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.0002
$A/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	0.17
S/m^2	0.002 827
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	1.226
$v/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	440
$\dot{\gamma}/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$	20
l_d/m	0.22
θ/rad	0
$g/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	9.8

选择空气密度 ρ 作为分岔参数,选择总攻角 δ 绘制极限环,得到如图 5 所示的 Hopf 分岔图. 系统在密度 $\rho_0=0.4774\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,对应海拔约 8800 m 处发生超临界 Hopf 分岔,在左侧分岔出稳定极限环,并且随着密度减小,稳定极限环半径增大;在 $\rho_1=0.1401\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,对应海拔约 17 000 m 处发生极限环分岔,极限环由稳定转变为不稳定,此外,在整个密度减小的过程中,不稳定极限环半径减小. 根据计算所得 Hopf 分岔曲线,结合计算过程中系统特征值的变化,对系统稳定性边界进行划

分,如图 6 所示. 当初始攻角处于不稳定极限环内且初始角速度不大时,在 $\rho>\rho_0$ 区间,系统特征值均有负实部,所以存在稳定平衡点 $(\rho,0)$,攻角最终振荡收敛到 0,将此区域称为稳定收敛域,如图 6 中绿色区域;在 $\rho_1<\rho<\rho_0$ 区间时,有两个特征值变为共轭纯虚数,系统稳定性发生改变,此时 $(\rho,0)$ 为不稳定平衡点,弹箭最终保持一定攻角绕轴作稳定圆锥运动,称此区域为稳定锥动域,如图 6 中蓝色区域;其他区域特征值存在正实部,攻角发散,为不稳定域,如图 6 中白色区域.

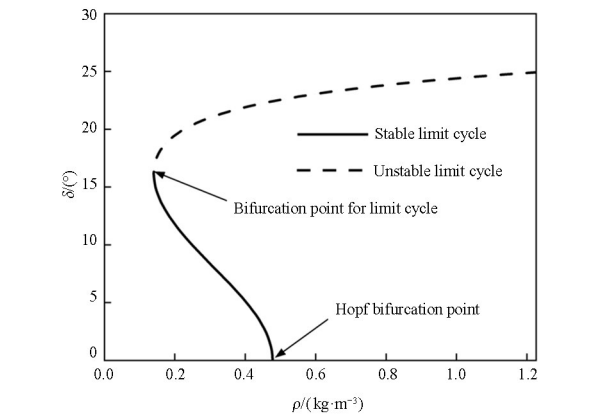


图 5 系统 Hopf 分岔图
Fig. 5 System Hopf bifurcation diagram

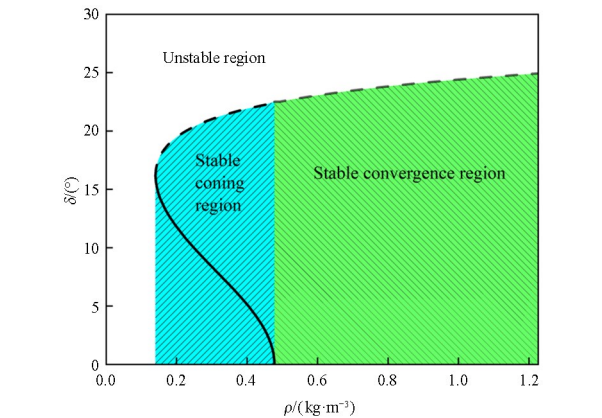


图 6 系统稳定性边界图
Fig. 6 System stability boundary diagram

为验证图 5 和图 6,分别取 $\rho=1.226\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ 和 $\rho=0.3\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$,令初始攻角在不稳定极限环内和不稳定极限环外,仿真验证结果如图 7 所示. 在图 7(a)中,当初始攻角在不稳定极限环外时,攻角迅速发散,当攻角位于不稳定极限环内时,攻角逐渐收敛为 0;在图 7(b)中,当初始攻角在不稳定极限环外时,攻角同样迅速发散,而当攻角位于不稳定极限环内时,攻角逐渐收敛形成半径约 8.5° 的稳定极限环. 以上结果验证了图 5 和图 6 结果的合理性.

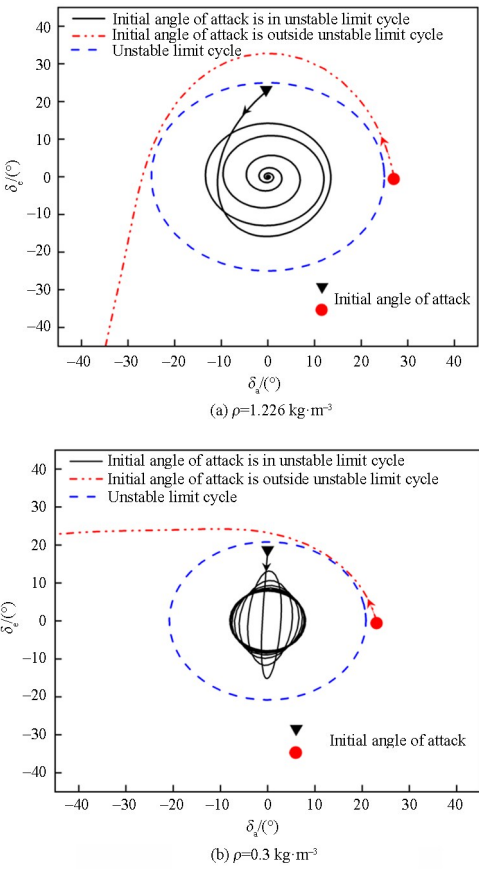


图7 不同初值下的复攻角运动曲线
Fig. 7 Complex angle of attack motion curves under different initial values

2.2 非线性气动力矩系数导数及控制舵偏角对 Hopf 分岔的影响

对于由 Hopf 分岔曲线划分出的稳定性区域, 只需确定 Hopf 分岔点和极限环分岔点的坐标位置即可大致了解系统稳定性边界, 所以分析参数对 Hopf 分岔的影响可转化为分析两个分岔点位置随参数变化情况, 由此来定性研究对稳定性边界的影响. 因工程上比较关心平衡点的吸引域边界大小, 本文定义若参数改变后使得稳定收敛域与稳定锥动域上边界变大, 即使得不稳定极限环半径增大, 则该参数变化为有利因素, 否则为不利因素.

注意到式(21)中升力项 b_y 处在 H 项和 PT 项中, 但是在 PT 中, b_y 乘上 P 后的数值很小, 和马格努斯力矩项 k_y 相比可忽略, 而阻力项 b_x 只存在于 H 中, 并且 b_y 和赤道阻尼力矩项 k_{zz} 同号, b_x 和 k_{zz} 反号, 即说明弹箭升力有助于增大阻尼, 阻力有助于减小阻尼, 它们分别对分岔的影响可以通过分析赤道阻尼力矩系数导数对分岔的影响得出, 而通过计算发现弹箭升阻力对角运动及分岔的影响较小, 所以本节主要研究静力矩、赤道阻尼力矩、马格努

斯力矩系数导数对系统角运动分岔特性的影响.

2.2.1 平方比值项对分岔的影响

图 8 为取不同 t_i ($i=3,4,5$) 时的 Hopf 分岔图, 由于 k_i ($i=3,4,5$) 的分析方法与 t_i 相同, 变化规律与 t_i 类似, 且影响程度相对较小, 因此不再赘述. 由图 8 可知, 改变比值项并不改变系统 Hopf 分岔点的位置. 如图 8(a) 和 (b) 所示, 增大 t_3 和 t_4 , 极限环分岔点横坐标减小, 纵坐标增大, 使得稳定锥动域的左边界横坐标减小, 相同密度下稳定极限环半径减小, 不稳定极限环半径增大, 稳定收敛域和稳定锥动域的上边界坐标增大. 增大 t_5 如图 8 (c) 所示, 展现出相反的结果.

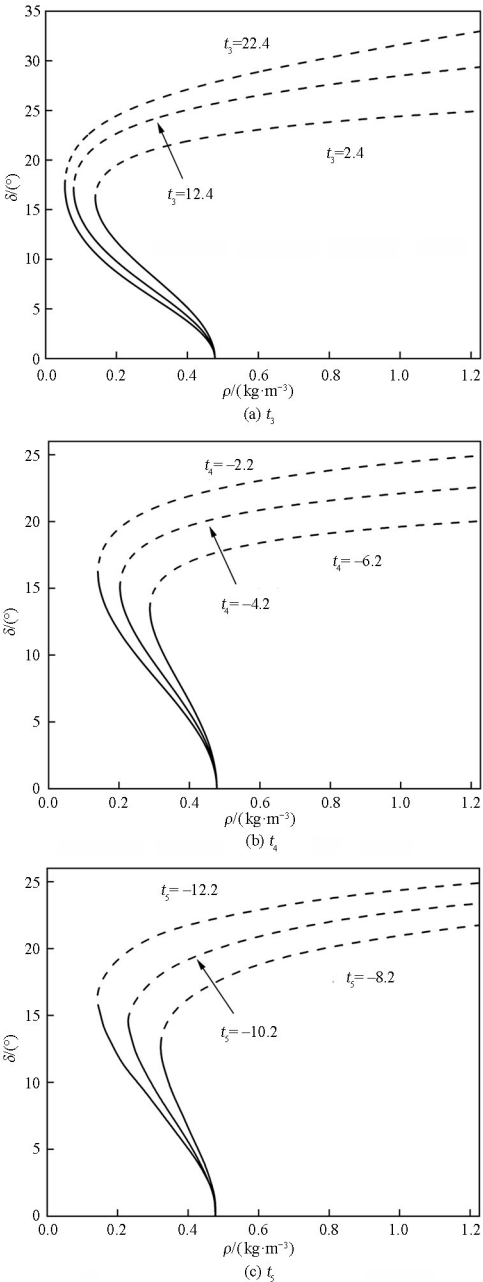


图8 不同平方比值项的 Hopf 分岔图
Fig. 8 Hopf bifurcation diagrams for different square ratio terms

为进一步掌握平方比值项对分岔的影响规律,极限环分岔点对空气密度 ρ 和 t_i ($i=3,4,5$) 的双参数分岔图如图 9 所示。图中黑色实线代表双分岔曲线,红色虚线代表参数变化时与之对应的极限环分岔点坐标变化。从图 9 可知,在 $\rho \in (0, 0.4774)$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 的范围内,极限环分岔点的横纵坐标均对 t_i ($i=3,4,5$) 的变化表现出单调性。从图 9(a)和图 9(b)可知,随着 t_3 从 -24.3 增大至 6.4 , t_4 从 -14.56 增大至 4.78 ,分岔点横坐标迅速从 0.4774 减小至 0.05 ,纵坐标分别迅速从 0 增大到 17.4 和 17.7 ,当 t_3 与 t_4 继续增大趋近于无穷时,分岔点横坐标缓慢无限趋近于 0 ,而纵坐标分别无

限趋近于 17.5 和 19.2 。从图 9(c)可知,相较于 t_3 和 t_4, t_5 的双分岔图变化曲线较为平缓,当 t_5 从 -0.64 减小至 -16.67 时,分岔点横坐标从 0.4774 减小到 0 ,纵坐标从 0 增大至 19.3 。上述分析表明,在一定参数变化范围内,通过增大 t_3 和 t_4 分别使弹箭静力矩系数导数和赤道阻尼力矩系数导数数值增大,可使极限环分岔点朝左上移动,两稳定域上边界增大,为有利因素;增大 t_5 使马格努斯力矩系数导数数值增大,将展现出相反的结果,为不利因素。

从以上分析不难发现,参数的分析范围仅局限在 $\rho \in (0, 0.4774)$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,即在 Hopf 分岔点的左侧,对于超出此范围的参数,以 t_5 为例,当 $t_5 < -16.47$ 或 $t_5 > -0.64$ 时的 Hopf 分岔图如图 10 所示。从图 10 可知,当参数超出分析范围时, Hopf 分岔图的拓扑结构发生改变,分岔图中均不存在极限环分岔点。当 $t_5 > -0.64$ 时,此时不存在稳定锥动域,系统发生次临界 Hopf 分岔,仅向右侧分岔出不稳定极限环,且 t_5 越大不稳定极限环半径越小,稳定收敛域上边界越小;当 $t_5 < -16.47$ 时,分岔图中仅显示出 Hopf 分岔点左侧的稳定极限环,且 t_5 越大稳定极限环半径越大,但是稳定极限环并没有分岔出不稳定极限环,即无法确定稳定区域的上边界,对于不稳定极限环的进一步研究由下文阐述。

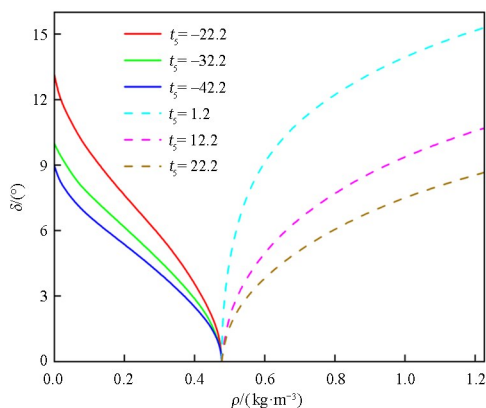


图 10 拓扑结构改变时的 Hopf 分岔图

Fig. 10 Hopf bifurcation diagram when the topological structure changes

2.2.2 常数项对分岔的影响

Hopf 分岔点对空气密度 ρ 和常数项 m_{z0} 、 m_{zz0} 、 m_{y0} 的双参数分岔图如图 11 所示,图中黑色实线表示 Hopf 双参数分岔曲线,小图中 3 种颜色的 Hopf 分岔曲线对应于黑色实线上的 3 个点,图 12 为极限环分岔点对密度和常数项的双参数分岔图。从图 11 和图 12 可知,改变 3 种气动力矩系数

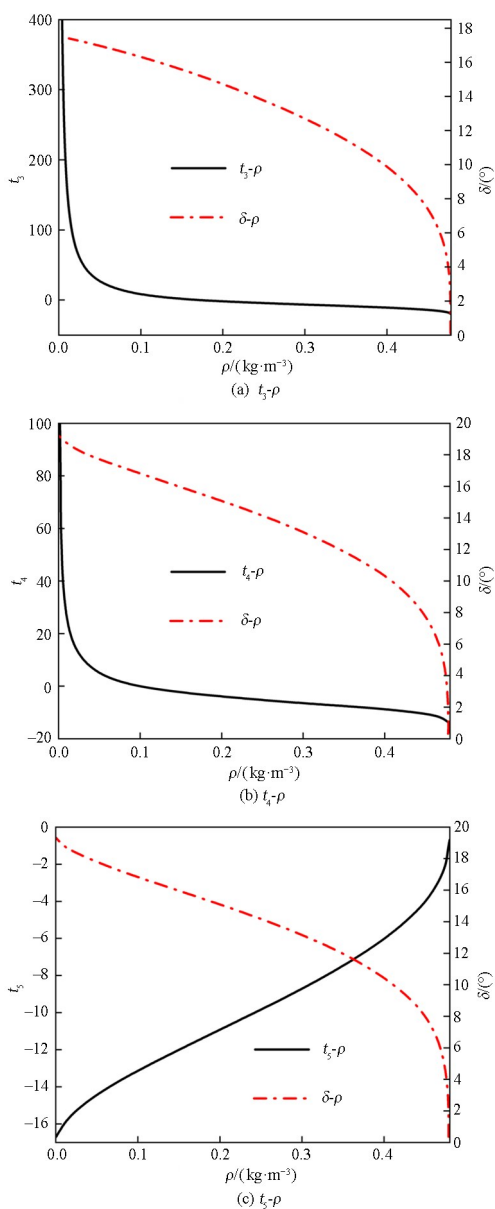


图 9 极限环分岔点对密度和平方比值项的双参数分岔图
Fig. 9 Two-parameter bifurcation diagram of bifurcation point for limit cycle with respect to density and square ratio terms

导数的常数项不仅可以改变 Hopf 分岔点的位置,还可以改变极限环分岔点的位置,并且两分岔点的横坐标随常数项的变化均呈相似单调性,从图中可以看出,极限环分岔点纵坐标随参数几乎不变,坐标与 Hopf 分岔点同样仅作近似横移变化,但由于横坐标随参数变化的快慢不同,向左横移时两分岔点横坐标之差减小,反之增大. 如图 11(a)、图 11(b)、图 12(a)、图 12(b)所示,通过减小 m_{z0} 和增大 $m_{z\infty}$ 使弹箭静力矩系数导数和赤道阻尼力矩系数导数数值增大,可使两分岔点均向左移动,两稳定域左边界横坐标均减小,稳定锥动域密度区间减小,

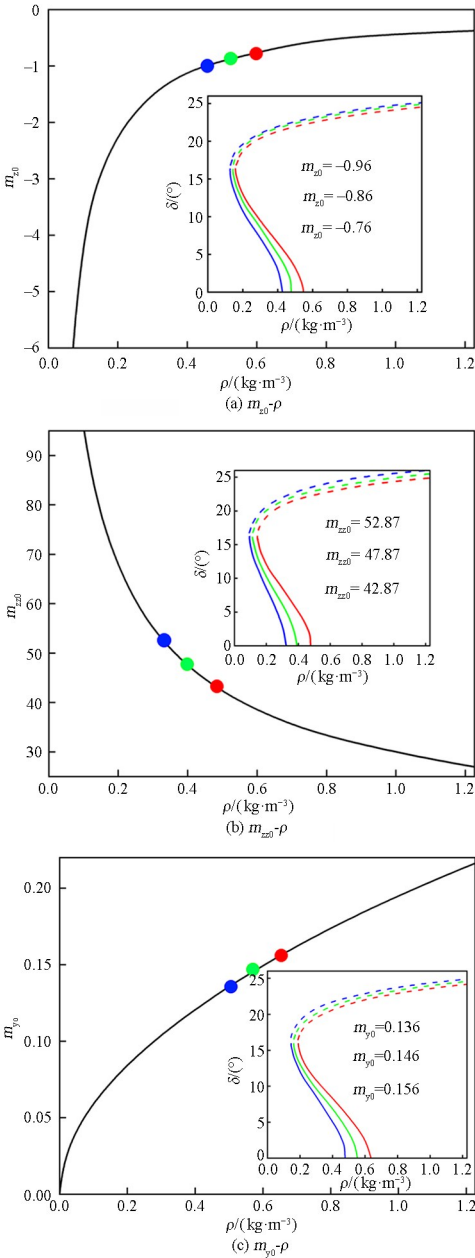


图 11 Hopf 分岔点对密度和常数项的双参数分岔图
Fig. 11 Two-parameter bifurcation diagram of Hopf bifurcation point with respect to density and constant term

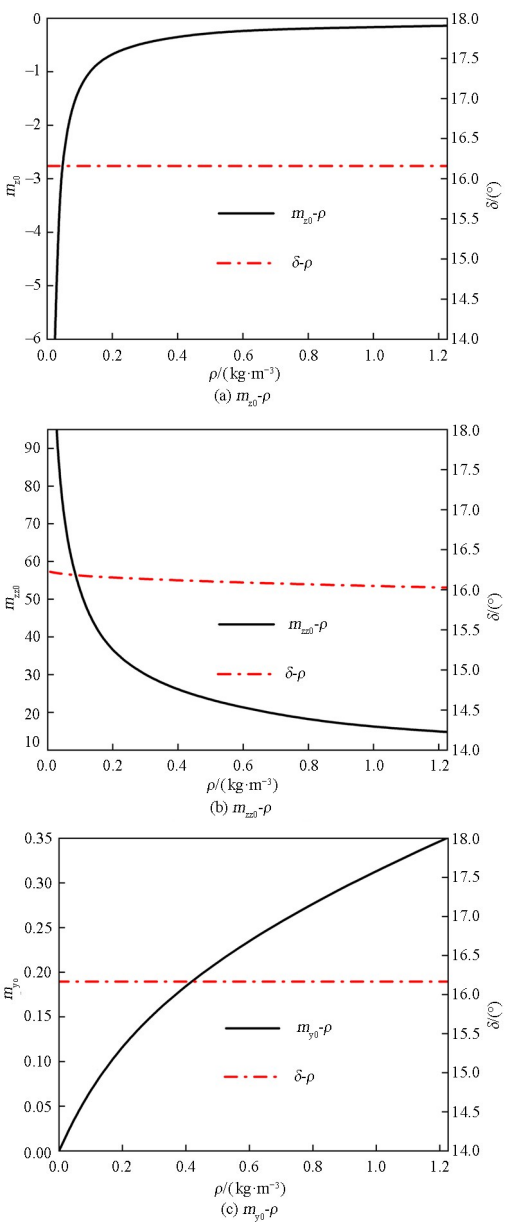


图 12 极限环分岔点对密度和常数项的双参数分岔图
Fig. 12 Two-parameter bifurcation diagram of bifurcation point for limit cycle with respect to density and constant term

相同密度下稳定极限环半径减小,稳定收敛域密度区间增大,两稳定域上边界均增大,为有利因素;通过增大 m_{y0} 使弹箭马格努斯力矩系数导数数值增大,如图 11(c)和图 12(c)所示,将展现出相反的结果,为不利因素.

2.2.3 控制舵偏角对分岔的影响

图 13 为 Hopf 分岔点对空气密度 ρ 和控制舵偏角 δ_c 的双参数分岔图. 当鸭舵打 5° 和 10° 俯仰舵偏时,弹箭最终分别形成 3.46° 和 6.78° 的平衡攻角,为了便于比较,将平衡点平移至 $\delta = 0^\circ$,平移后的 Hopf 分岔曲线如图 13 中小图所示. 图中显示,正负打舵时,在相同舵偏角下 Hopf 分岔点的位置

变化是基本相同的,随着舵偏角增大,Hopf 分岔点横坐标减小,稳定收敛域左边界减小,极限环分岔点纵坐标减小,横坐标略微增大,系统两稳定域上边界均减小,且舵偏角越大,减小幅度越大,所以为不利因素.以 $\rho = 1.226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 为例, $\delta_c = 5^\circ$ 比 $\delta_c = 0^\circ$ 的不稳定极限环半径减小了 8.19%, $\delta_c = 10^\circ$ 比 $\delta_c = 0^\circ$ 的不稳定极限环半径减小了 22.55%.

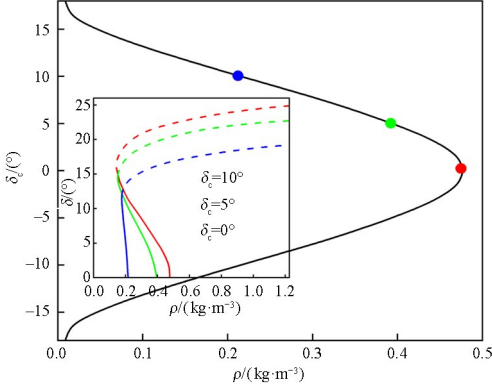


图 13 Hopf 分岔点对密度和舵偏角的双参数分岔图

Fig. 13 Two-parameter bifurcation diagram of Hopf bifurcation point with respect to density and deflection

3 不稳定极限环分析

上文通过确定分岔点的位置定性分析系统稳定性边界,但是极限环分岔点的分析范围仅局限于 Hopf 分岔点左侧.当参数变化超出此范围时,极限环分岔点不存在,此方法失效.工程上比较关心稳定区域上边界大小,即不稳定极限环的半径,为在更大的参数范围内求解不稳定极限环,可由定义转化为角运动状态矩阵特征值问题,以密度 $\rho = 1.226 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 为例,求解方法如下:当式(23)中状态矩阵 \mathbf{J} 为缓变系统时,可采用“系数冻结”法讨论式(23)的稳定性,由 Hurwitz 稳定性判据可知,其动态稳定的充要条件是特征方程的根实部均为负数.定义 \mathbf{I} 为四阶单位矩阵,根据:

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (25)$$

得到 \mathbf{J} 的特征方程为:

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (26)$$

特征根实部全部为负的充要条件为:

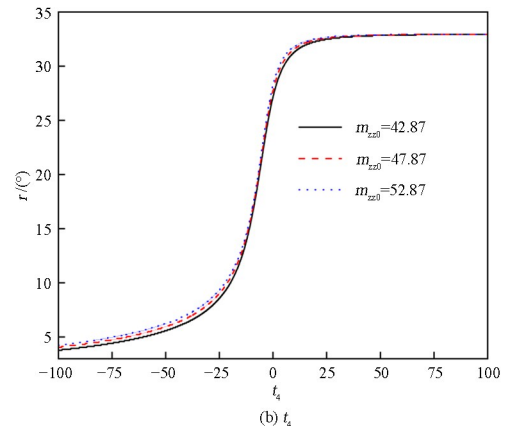
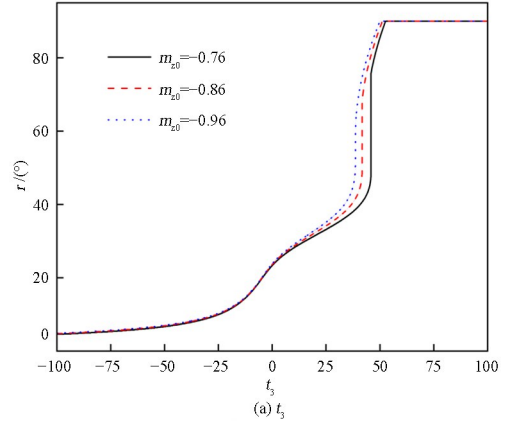
$$a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_1 a_2 a_3 > a_1^2 a_4 + a_3^2 \quad (27)$$

式中, $a_0 = 1, a_1 = 2H, a_2 = -2M + H^2 + P^2, a_3 = -2HM + 2P^2 T, a_4 = M^2 + P^2 T^2$,代入式(27)中可得稳定性判据为:

$$\begin{cases} f(1) = H > 0 \\ f(2) = P^2 T - HM > 0 \\ f(3) = P^2 T [H(H^2 + P^2 - TH) - P^2 T] - H^2 M(H^2 + P^2) > 0 \end{cases} \quad (28)$$

若存在 $\delta_0 \in (0^\circ, 90^\circ)$,使得当任意初始攻角 $\delta > \delta_0$ 时式(28)不成立, $\delta < \delta_0$ 时式(28)成立,则系统会在 δ_0 附近形成不稳定的极限环,极限环半径为 $r = \delta_0$,基于上述方法,在 $0^\circ \sim 90^\circ$ 范围内遍历求解,获取不稳定极限环位置.

设定 t_i ($i = 3, 4, 5$) 的变化范围为 $[-100, 100]$,对不稳定极限环半径的影响曲线如图 14.从图 14(a)和图 14(b)可知,随着 t_3 和 t_4 增大,不稳定极限环半径增大,表明在更大的参数范围内仍然保持同第 2.2 小节相同的规律.从图 14(c)可知,在更大的参数范围内,不稳定极限环半径随 t_5 并不单调,当 $t_5 < -26.13$ 时,半径随 t_5 增大而增大,当 $t_5 > -26.13$ 时,半径随 t_5 增大而减小.注意到 r 随 t_3 变化的极大值为 90° ,而 t_4 和 t_5 的极大值都为 33° ,说明不稳定极限环半径大小主要由静力矩主导,当攻角 $\delta > 33^\circ$ 时,由于攻角过大,压心前移至质心之前,此时静力矩反号,攻角发散.图 14 中还



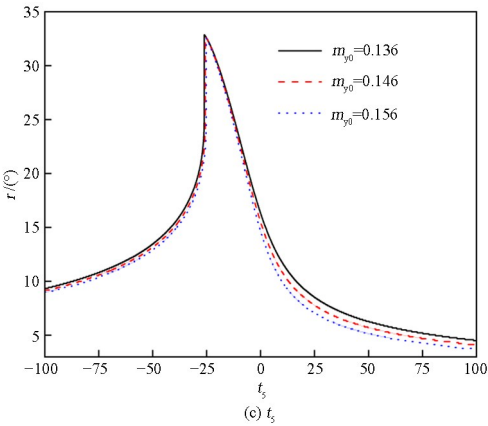


图 14 平方比值项对不稳定极限环半径影响曲线
Fig. 14 Effect curve of square ratio terms on the radius of unstable limit cycle

分别取了不同 m_{z0} 、 m_{zz0} 、 m_{y0} ，不稳定极限环的变化规律仍与第 2.2 小节相同，从而验证了上述结论。

计算过程中，通过比较各空气动力和力矩组合参数的数量级大小发现，式(28)是否成立主要看 $f(3)>0$ 是否成立， $f(3)$ 对 t_i ($i=3,4,5$)分别求导可得：

$$\begin{cases} \frac{\partial f(3)}{\partial t_3} = -H^2(H^2 + P^2)k_{z_0}\delta^2 \approx -H^4k_{z_0}\delta^2 \\ \frac{\partial f(3)}{\partial t_4} = [P^2T(3H^2 + P^2 - 2TH) - 4MH^3 - 2MP^2H]k_{zz0}\delta^2 \approx -4MH^3k_{zz0}\delta^2 \\ \frac{\partial f(3)}{\partial t_5} = P(P^2 + H^2)(2T - H)k_{y0}\delta^2 \end{cases} \quad (29)$$

式中 $k_{z_0} = \frac{\rho Sl}{2A}m_{z_0}$ ， $k_{zz0} = \frac{\rho Sl d}{2A}m_{zz0}$ ， $k_{y0} = \frac{\rho Sl}{2A}m_{y0}$ ，

从式(29)的求导结果可以解释图 14 中单调性的原因。注意到式(29)中的第 3 式，可以看到 $f(3)$ 在 $T=H/2$ 时取极值点，过大和过小的马格努斯力均会造成不稳定极限环半径减小。

4 结论

本文针对某型鸭式布局自旋尾翼弹箭非线性角运动动力学模型进行了 Hopf 分岔计算并定义了稳定性区域，分为稳定收敛域、稳定锥动域和不稳定域。主要通过计算不同参数对 Hopf 分岔曲线的影响进而研究对系统稳定性的影响，根据参数改变后对两稳定域上边界的影响将参数改变分为有利因素与不利因素，结果表明：

(1)在 Hopf 分岔曲线拓扑结构不发生改变的情况下，非线性气动力矩系数导数常数项的变化会同时改变极限环分岔点和 Hopf 分岔点的位置，而非线性气动力矩系数导数比值项的变化仅会影响极限环分岔点的位置。通过改变常数项或平方比值使得弹箭静力矩系数导数和赤道阻尼力矩系数导数数值增大，可使稳定锥动域中相同密度下稳定极限环半径减小，两稳定域上边界增大，为有利因素；改变常数项和平方比值项使得弹箭马格努斯力矩系数导数数值增大时，将展现相反的结果，为不利因素。

(2)鸭舵控制舵偏角越大，即控制力越大，两稳定域上边界越小，且舵偏角越大，减小幅度越大。因此，在弹箭控制时，有必要充分考虑鸭舵控制力和力矩对非线性角运动稳定性的影响。

(3)利用 Hurwitz 稳定性判据得到了不稳定极限环，其半径大小主要由静力矩主导，攻角过大将引起静力矩反号，攻角发散；马格努斯力矩的变化会使得不稳定极限环半径出现极大值，过大和过小的马格努斯力矩均会造成不稳定极限环半径减小。

参考文献

[1] MURPHY C H. Free flight motion of symmetric missiles: AD0442757 [R]. Aberdeen Proving Ground, MD, US: Ballistic Research Laboratories, 1963.

[2] MOROTE J, LIANO G. Stability analysis and flight trials of a clipped wrap around fin configuration [C]//AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit. Reston, Virginia: AIAA, 2004: 5055.

[3] 李臣明, 刘怡昕. 转速闭锁对远程弹箭的影响[J]. 弹道学报, 2010, 22(1): 45—48.

LI C M, LIU Y X. Effect of roll locking on long-range missile [J]. Journal of Ballistics, 2010, 22(1): 45—48. (in Chinese)

[4] 韩子鹏, 常思江, 史金光. 弹箭非线性运动理论 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2016: 145—190.

HAN Z P, CHANG S J, SHI J G. Nonlinear motion theory of projectile and rocket [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2016: 145—190. (in Chinese)

- [5] 钟扬威, 王良明, 傅健, 等. 弹箭非线性角运动稳定性 Hopf 分岔分析[J]. 兵工学报, 2015, 36(7): 1195—1202.
ZHONG Y W, WANG L M, FU J, et al. Hopf bifurcation analysis of nonlinear angular motion stability of projectile [J]. Acta Armamentarii, 2015, 36(7): 1195—1202. (in Chinese)
- [6] 邢炳楠, 张志安, 杜忠华, 等. 尾翼式弹道修正弹 Hopf 分岔特性分析[J]. 振动与冲击, 2020, 39(2): 255—261.
XING B N, ZHANG Z A, DU Z H, et al. Hopf bifurcation analysis for a fin-stabilized projectile with course correction fuse [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(2): 255—261. (in Chinese)
- [7] 杨志伟, 王良明, 钟扬威, 等. 旋转稳定弹丸非线性角运动吸引域计算方法[J]. 兵工学报, 2021, 42(6): 1195—1203.
YANG Z W, WANG L M, ZHONG Y W, et al. Calculation method for the nonlinear angular motion attraction domain of spin-stabilized projectile [J]. Acta Armamentarii, 2021, 42(6): 1195—1203. (in Chinese)
- [8] 李东阳, 常思江, 王中原. 弹箭角运动的非线性吸引域估计[J]. 兵工学报, 2023, 44(8): 2329—2341.
LI D Y, CHANG S J, WANG Z Y. Nonlinear region of attraction estimation for projectile's angular motion [J]. Acta Armamentarii, 2023, 44(8): 2329—2341. (in Chinese)
- [9] 周文涛, 常思江, 展鹏遥, 等. 有控自旋卷弧翼弹箭角运动的非线性吸引域[J/OL]. 北京航空航天大学学报, 2024: 1—22. (2024-02-29) [2024-09-26]. <https://bhxb.buaa.edu.cn/bhzhk/cn/article/doi/10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0732>.
ZHOU W T, CHANG S J, ZHAN P Y, et al. Nonlinear region of attraction of angular motion for a controlled projectile with self-rotating wraparound fins [J/OL]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2024: 1—22. (2024-02-29) [2024-09-26]. <https://bhxb.buaa.edu.cn/bhzhk/cn/article/doi/10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0732>. (in Chinese)
- [10] 赵新新, 史金光, 王中原, 等. 鸭舵式双旋弹非线性角运动及其分岔特性[J]. 兵工学报, 2023, 44(10): 3067—3078.
ZHAO X X, SHI J G, WANG Z Y, et al. Nonlinear angular motion and bifurcation characteristics of canard dual-spin projectiles [J]. Acta Armamentarii, 2023, 44(10): 3067—3078. (in Chinese)
- [11] PARRILO P A. Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization [D]. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 2000.
- [12] 文敬涵, 曾京, 毛冉成. 高速列车转向架蛇行运动 Hopf 分岔控制研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(5): 62—68.
WEN J H, ZENG J, MAO R C. Research on Hopf bifurcation control of bogie hunting motion of high-speed trains [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(5): 62—68. (in Chinese)
- [13] 蒋伟, 张明, 尹乔之, 等. 飞机刹车诱导颤振稳定性分析与减振设计[J]. 振动工程学报, 2024, 37(5): 770—779.
JIANG W, ZHANG M, YIN Q Z, et al. Stability analysis and vibration reduction design of aircraft brake induced chatter [J]. Journal of Vibration Engineering, 2024, 37(5): 770—779. (in Chinese)
- [14] 高燕鑫, 石剑平. 一类时滞分数阶计算机病毒模型的 Hopf 分岔控制研究[J]. 工程数学学报, 2023, 40(4): 647—660.
GAO Y X, SHI J P. Hopf bifurcation control analysis of a time-delay fractional computer virus model [J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2023, 40(4): 647—660. (in Chinese)
- [15] DHOOGHE A, GOVAERTS W, KUZNETSOV Y A, et al. New features of the software MatCont for bifurcation analysis of dynamical systems [J]. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, 2008, 14(2): 147—175.
- [16] 韩子鹏. 弹箭外弹道学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2014: 169—190.
HAN Z P. Exterior ballistics of projectiles and rockets [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2014: 169—190. (in Chinese)