

一类线性多时滞系统模态频率的直接计算方法^{*}

孙高源 胥奇[†] 李映辉

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

摘要 时滞系统的特征根具有无穷多个, 分布较为复杂. 经典定积分法是一种分析线性多时滞系统稳定性的有效方法, 但其不能直接求解系统特征根虚部对应的模态频率, 而是需要先求解特征根实部, 再借助其他方法如二维牛顿迭代等来对模态频率进行求解. 对于大部分稳定系统而言, 往往模态频率更受关注, 间接对其进行求解会引入冗余步骤, 增加计算量. 因此本文改进了定积分法, 使用新的积分路径和新的特征根平移方向, 可以直接求解时滞系统的模态频率, 同时保留了经典定积分法适用于多时滞系统、编程简单、效率较高的优点. 论文通过两个工程实例, 验证了本文方法计算系统模态频率的适用性和便捷性.

关键词 时滞微分方程, 辐角原理, 特征根, 多时滞, 模态频率

中图分类号: O313

文献标志码: A

Improved Definite Integral Method for Directly Calculating Modal Frequencies of Multiple Time Delayed Systems^{*}

Sun Gaoyuan Xu Qi[†] Li Yinghui

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract The eigenvalues of a time-delay system are infinite, and exhibit complex distributions. The classical definite integral method is an effective approach for analyzing the stability of multi-time-delay systems. However, it cannot directly solve the modal frequencies, i. e., the imaginary parts of the eigenvalues of the system, and instead requires first determining the real parts and then applying additional techniques, such as two-dimensional Newton iteration to solve the modal frequencies. For most stable systems, modal frequency is often of greater concern, and indirect determination introduces unnecessary steps and increases computational complexity. Therefore, this article extends the definite integral method by using a new integration path and a new characteristic root translation direction, which can directly solve the modal frequency of time-delay systems, while retaining the advantages of the classical definite integral method, such as being suitable for multi time-delay systems, simple programming, and high efficiency. The paper verifies the wide applicability and the effectiveness of the proposed method for calculating the modal frequencies of time-delay systems through two engineering examples.

Key words delay differential equations, argument principle, characteristic roots, multiple delays, modal frequencies

2025-06-03 收到第 1 稿, 2025-07-09 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12472025, 12072292, 12272323), 四川省自然科学基金资助项目(23NSFSC0955, 2025NSFTD0002); National Natural Science Foundation of China(12472025, 12072292, 12272323), Natural Science Foundation of Sichuan Province(23NSFSC0955, 2025NSFTD0002).

[†] 通信作者 E-mail: xuqi@swjtu.edu.cn

引言

当一个系统的动力学行为同时受到当前状态和过去状态的影响时,这类系统就被称为时滞动力系统^[1-3].例如,在飞行器的颤振问题中,通过引入时滞控制,可以将亚临界颤振转换为有益的超临界颤振,且大幅降低极限环幅值^[4].在具有时滞吸振器的建筑结构中,时滞反馈控制能够降低主结构的位移幅值,并能抑制混沌响应^[5].在小车倒立摆的控制中,引入适当的时滞,可以同时优化瞬态时域特性和增强稳定性^[6,7].主动电磁悬浮系统中的时滞显著影响磁浮列车运行稳定性和乘坐舒适性,一直是电磁悬浮型磁浮列车提速改造需要重点关注的问题^[8].热声系统中存在热时滞,它描述了热释放率与声介质粒子振速之间的相位差,会显著影响系统的稳定性^[9].在机器人控制回路中,传感器输入与执行器输出之间存在多种时滞,可能导致控制律失效^[10-12].在实时通讯和视频会议等应用场景下,毫秒级别的时滞可能导致用户体验显著下降^[13].因此,研究时滞对系统动力学行为的影响具有重要意义.

特征根方法是分析线性时滞系统动力学行为的一类常用方法.特征根的实部和虚部分别对应系统稳定性和模态频率,并与初始条件、外激励等因素一起决定了系统响应.时滞动力系统的特征方程为超越方程,难以解析求解特征根.常用时滞系统特征根数值求解方法如:Matlab 程序包 DDE-Biftool^[14]将时滞系统微分方程离散为常微分方程,近似求解其特征根;QPmR 方法^[15-17]通过拟多项式映射得到特征方程实部和虚部分别为零的两组曲线,曲线交点即为特征根近似解.此外,辐角原理通过积分计算特征方程在复平面特定区域内零点的个数,也被用于时滞系统的特征根计算.例如,直接将求解区域划分为多个子区域并在子区域边缘上使用辐角原理进行积分可以得到特征根的近似解^[18,19].将辐角原理与二分法结合^[20],可通过不断缩小积分范围得到特征根的近似解.经典定积分法^[21]将特征根平移与辐角原理结合,通过观察平移过程中积分值的不连续变化,来近似估计特征根实部.该方法具有编程简便,计算效率较高,适用多时滞系统的优点.

在各类实际工程中,不同时滞系统关注的动力

学特性也不同.例如热声系统中^[22],热声振动是由于系统热声模态失稳导致的自激振荡,因此对应稳定性的特征根实部受关注.对于很多时滞系统可能因为共振现象导致系统破坏^[23],因此需要计算清楚系统的模态频率和阶次.此时,使用经典定积分法求解模态频率,需要先计算特征根实部.这引入了多余的计算,导致分析效率降低.本文针对此问题展开分析,发现若是直接改变特征根平移方向,仍然沿用经典定积分法的积分路径,会由于时滞系统无穷个特征根的分布规律导致方法失效.因此,本文基于辐角原理,使用新的积分路径和新的特征根平移方向,提出了一种改进的定积分法,可以直接求解系统模态频率,提高计算效率.

本文内容安排如下:第一节介绍本文所研究的时滞动力系统及经典定积分法;第二节提出了直接求解系统模态频率的改进定积分法;第三节通过两个工程实例验证了本文方法的有效性以及较广的适用性;最后对本文进行了总结.

1 多时滞系统及其特征根计算

1.1 线性多时滞系统

时滞系统通常使用时滞微分方程(delay differential equation, DDE)进行建模.与常微分方程(ordinary differential equation, ODE)不同的是, DDE 中包含有过去状态,或者过去状态的微分.本文的研究对象为下面一类线性定常时滞微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i \dot{\mathbf{x}}(t - \tau_i) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^m \mathbf{B}_j \mathbf{x}(t - \tau_j) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量, $\mathbf{A}, \mathbf{B}_i, \mathbf{N}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) 为常数系数矩阵, $\tau_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, m$) 为时滞.系统(1)的特征函数为

$$f(\lambda) = \sum_{j=0}^n p_j (e^{-\lambda \tau_1}, \dots, e^{-\lambda \tau_m}) \lambda^j \quad (2)$$

其中, $\lambda, p_j \in \mathbb{C}$ ($j = 0, 1, \dots, n$).式(2)的零点即为系统的特征根.

1.2 经典定积分法

首先回顾辐角原理

引理 1 假设

(1) C 为一简单闭曲线;

- (2) 函数 $F(\lambda)$ 在 C 内除有限个极点外解析;
 (3) $f(\lambda)$ 在 C 上没有零点且解析.

C 内的零点与极点个数之差可以表示为

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \quad (3)$$

其中 N 为 $f(\lambda)$ 在 C 内的零点个数, P 为 $f(\lambda)$ 在 C 内的极点个数, $\arg f(\lambda)$ 为函数 $f(\lambda)$ 的辐角.

当函数 $f(\lambda)$ 为式(2)所示拟多项式时, $f(\lambda)$ 在任何有界区域内没有极点且仅包含有限个零点^[24]. 因此式(3)可表示为

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \quad (4)$$

当系统满足强稳定性条件^[24]时, 分布在复平面右侧的特征根个数是有限的. 因此, 如图1所示, 选择一半径无穷大的半圆作为积分路径 $C = C_1 \cup C_2$, $R \rightarrow +\infty$. 其中, $\{C_1: (-iR, iR)\}$, $\{C_2: R e^{i\theta}, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$, 则右半平面内的零点个数可以表示为

$$N = \text{round} \left\{ \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^R \Re \left[\frac{f'(i\omega)}{f(i\omega)} \right] d\omega \right\} \quad (5)$$

其中 n 为 $f(\lambda)$ 的最高阶次, round 为取整函数. 根据经典定积分法^[25], 当积分上限大于特定值时, 式(3)可以简化为定积分

$$N = \text{round} \left\{ \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^T \Re \left[\frac{f'(i\omega)}{f(i\omega)} \right] d\omega \right\} \quad (6)$$

上式中积分上限 T 的确定方法由文献[17]给出. 接下来令特征根向左平移 $\delta > 0$, 此时复平面右半平面内特征根个数^[21]为

$$N_\delta = \text{round} \left\{ \frac{n}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^T \Re \left[\frac{f'(i\omega + \delta)}{f(i\omega + \delta)} \right] d\omega \right\} \quad (7)$$

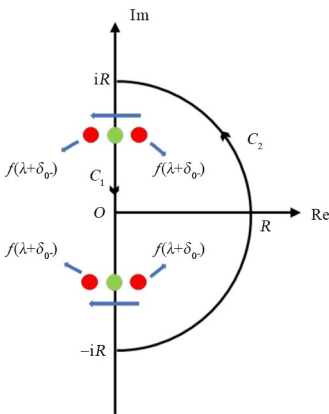


图1 半圆积分路径及特征根的平移

Fig. 1 Semicircular integration contour and the translation of the characteristic roots

当特征根穿过 C_1 (虚轴) 从右进入左半平面时, N_δ 在 δ_0 处会产生不连续变化, 即发生跳变. 此时 $f(\lambda + \delta_0)$ 有特征根在虚轴上, 据此可知 $f(\lambda)$ 存在实部为 δ_0 的特征根.

经典定积分编程简单, 可处理多时滞问题, 在求解特征根的实部时具有优势. 但其不能直接求解特征根虚部 (即模态频率), 而是需要在求解实部后, 进一步借助如 QPmR、二维牛顿迭代等其他方法. 在下一节将改进定积分法, 以直接求解系统模态频率.

2 直接计算模态频率的改进定积分法

本节基本思路是改变式(3)中的曲线 C , 并将特征根平移方向改为向下平移.

容易想到, 曲线 C 可由图1中的无穷大半圆逆时针旋转 90° 得到, 如图2所示. 但由于时滞系统有无穷多个虚部无穷大的特征根^[1], 图2所示曲线 C 内的根数量亦为无穷大, 不会在平移时发生跳变. 因此本文对积分路径做出改进, 选择图3所示矩形区域边界为曲线 C , 即 $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$.

由式(3), 图3所示矩形区域内特征根个数为

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + \\ &\quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_4} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda \quad (8) \end{aligned}$$

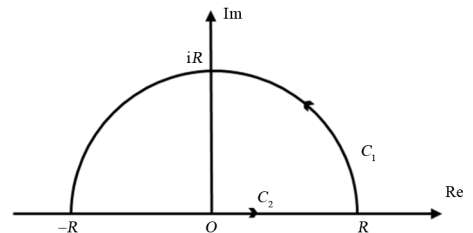


图2 旋转后半圆积分路径

Fig. 2 The rotated semicircular integration contour

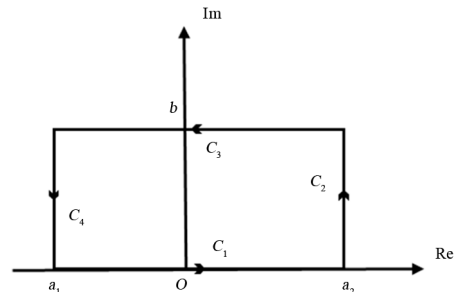


图3 矩形积分路径

Fig. 3 The rectangular integration contour

在 C_1 上, 由于其为实轴, 为保持积分变量一致, 故令 $\lambda = \omega$ (注意此时 ω 并非特征根虚部), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a_1}^{a_2} \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Im \left[\frac{f'(\omega)}{f(\omega)} \right] d\omega \quad (9) \end{aligned}$$

在 C_2 上令 $\lambda = a_2 + i\omega$, 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda &= \frac{1}{2\pi} \int_{b_1}^{b_2} \frac{f'(i\omega + a_2)}{f(i\omega + a_2)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Re \left[\frac{f'(i\omega + a_2)}{f(i\omega + a_2)} \right] d\omega \quad (10) \end{aligned}$$

同理, 在 C_3 上令 $\lambda = \omega + ib$, 在 C_4 上令 $\lambda = i\omega + a_1$, 则 N 可以表示为定积分形式

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2\pi} \int_0^b \Re \left[\frac{f'(i\omega + a_2)}{f(i\omega + a_2)} - \frac{f'(i\omega + a_1)}{f(i\omega + a_1)} \right] d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Im \left[\frac{f'(\omega)}{f(\omega)} - \frac{f'(\omega + ib)}{f(\omega + ib)} \right] d\omega \quad (11) \end{aligned}$$

令特征根向下平移 δ , 此时矩形区域内特征根个数变为

$$\begin{aligned} N_\delta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^b \Re \left[\frac{f'(i\omega + a_2 + i\delta)}{f(i\omega + a_2 + i\delta)} - \frac{f'(i\omega + a_1 + i\delta)}{f(i\omega + a_1 + i\delta)} \right] d\omega + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{a_1}^{a_2} \Im \left[\frac{f'(\omega + i\delta)}{f(\omega + i\delta)} - \frac{f'(\omega + ib + i\delta)}{f(\omega + ib + i\delta)} \right] d\omega \quad (12) \end{aligned}$$

引理 2 考虑式(2)的 $f(\lambda)$, 假设

(1) 特征根在平移时不经过 C_2 和 C_4 ;

(2) 平移过程中, 函数 $f(\lambda)$ 在简单闭曲线 C 内除有限个极点外解析;

(3) 除零点穿过 C_1 和 C_3 时, $f(\lambda)$ 在 C 上没有零点且解析.

当 $\delta = \delta_0$ 时, 若式(12)中的 N_δ 向下跳变 $-\tilde{n}$, 即满足

$$N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = -\tilde{n} \quad (13)$$

时, 函数 $f(\lambda)$ 有且仅有 $\tilde{n}$ 个虚部为 δ_0 、实部属于 (a_1, a_2) 的特征根.

证明: 当某个特征根向下平移时, 特征根与矩形区域的关系可分为如图 4 所示的三种情况.

情况 1 $\delta = \delta_0$ 时, 特征根穿越 C_3 进入矩形区域时, 矩形内部特征根数目增加 $\tilde{n}$ ($\tilde{n}$ 为进入矩形区域内特征根个数), N_δ 向上发生不连续跳变, 即 $N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = \tilde{n}$.

情况 2 $\delta = \delta_0$ 时, 特征根穿越 C_1 离开矩形区域时, 矩形内部特征根数目减少 $\tilde{n}$, N_δ 向下发生跳变, 即 $N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = -\tilde{n}$.

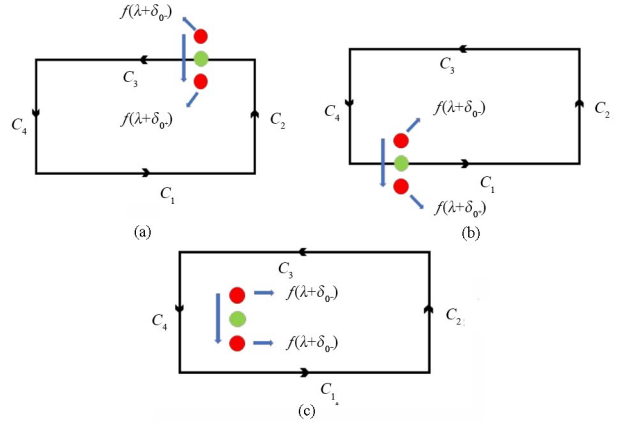


图 4 特征根平移时与矩形区域的三种关系

Fig. 4 Three possible relationships between the characteristic roots (under translation) and the rectangular region

情况 3 $\delta = \delta_0$ 时, 没有特征根穿越矩形边界, N_δ 不发生跳变, 即 $N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = 0$.

结合上述三种情况, $\tilde{n}$ 个特征根在 $\delta = \delta_0$ 时穿越 C_1 当且仅当 N_δ 向下发生跳变 $\tilde{n}$, 即满足 $N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = \tilde{n}$.

不妨假设其中一个特征根为 $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, 当特征根向下平移 δ_0 时, 平移后的特征根为 $\tilde{\lambda}_0 = \alpha + i \cdot (\beta - \delta_0)$, 若特征根此时恰好穿越 C_1 , 亦即穿越实轴时, 则有 $\beta - \delta_0 = 0$, 表明特征根 λ_0 的虚部为 δ_0 . 同理, 如图 4 所示, 当特征根向下平移 δ_0 穿越 C_1 时, 平移后的特征根为 $\tilde{\lambda}_0 = \alpha + i \cdot (\beta - \delta_0)$, 此时有

$$\begin{cases} \beta - \delta_0 = 0 \\ \alpha \in (a_1, a_2) \end{cases} \quad (14)$$

由此可得, 平移前特征根虚部为 δ_0 , 实部属于 (a_1, a_2) . 综上, 当且仅当有 $\tilde{n}$ 个虚部为 δ_0 、实部属于 (a_1, a_2) 的特征根时, N_δ 会在 $\delta = \delta_0$ 处向下发生跳变 $\tilde{n}$, 即满足 $N_{\delta_{0+}} - N_{\delta_{0-}} = \tilde{n}$. 证明完毕.

上述理论将特征根的虚部与定积分值的跳变联系起来, 进而直接求解多时滞系统模态频率. 进一步, 本文总结该改进定积分法的具体步骤如下.

步骤一 计算系统的特征函数 $f(\lambda)$, 确定要分析的频率范围, 得到矩形区域 $[a_1, a_2] \times [0, b] \cdot i$.

步骤二 向 $\delta \in [0, b]$ 网格化, 并按照式(12)计算 N_δ .

步骤三 找到 N_δ 向下跳变处对应的 δ_0 , δ_0 即为某阶模态频率的近似值.

注 1: 改进定积分法的误差主要由数值积分产生, 表现为 N_δ 及其跳变值并非整数. 该误差可以通过对 N_δ 取整以避免.

注 2: 实际编程中 δ 为离散值, 频率的误差严格小于 δ 的步长. 若步长超过 b , 可能会遗漏特征根.

注 3: 当有两个特征根同时穿越 C_1 和 C_3 时, 积分值的跳变为 0. 但在一般情况下, 选取的矩形框宽度不太可能为两个特征值的频率差, 所以其发生概率很小. 实际当中为了规避此情况, 可以使用两组宽度不同的矩形框来进一步减小其概率.

3 数值算例

为验证方法的有效性及其在工程问题上的应用潜力, 本节计算了两个工程实例的模式频率, 分别为一维声学管道和时滞减振器.

例 1 考虑图 5 所示的 Rijke 管, 其参数如表 1 所示, 其中 R_1 和 R_2 分别为左右两端反射系数, c 为声速, ρ 为气体密度, A 为横截面积, L 表示管长, γ 为比热比, b 为放热系数, x_q 为热源相对位置, τ 为放热时滞.

系统的控制方程为^[26]

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} = \frac{\gamma - 1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{q} \delta(x - x_q)] \quad (16)$$

其中, p 为声压, u 为介质例子振动速度, $\tilde{q}$ 为热放率. 根据行波法, 式(16)中声压 p 和介质粒子振动速度 u 可以表示为前行波和后行波的叠加

$$\begin{cases} p(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \\ u(x, t) = \frac{1}{c\rho} \left[f\left(t - \frac{x}{c}\right) - g\left(t + \frac{x}{c}\right) \right] \end{cases} \quad (17)$$

结合热源处的能量守恒及力平衡, 可得^[27]

$$\begin{cases} f_+(t) - R_2 f_+ \left[t - \frac{2(L - x_q)}{c} \right] + \\ R_1 g_- \left(t - \frac{2x_q}{c} \right) - g_-(t) = 0 \\ f_+(t) + R_2 f_+ \left[t - \frac{2(L - x_q)}{c} \right] + \\ R_1 g_- \left(t - \frac{2x_q}{c} \right) + g_-(t) - \frac{\gamma - 1}{c} \tilde{q} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中, f_+ 为热源右侧的前行波, f_- 为热源左侧的前行波, g_+ 为热源右侧的后行波, g_- 为热源左侧的后行波. 对其进行 Laplace 变换可得系统特征方程^[27]

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\frac{2L}{c}\lambda} R_1 R_2) [2Ac^2 \rho (\tau \lambda + 1) + \gamma b - b] + \\ b [e^{-\frac{2x_q}{c}\lambda} R_1 - e^{-\frac{(-2x_q + 2L)}{c}\lambda} R_2] (\gamma - 1) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

代入参数可得系统的特征方程为多时滞方程

$$f(\lambda) = e^{-0.00717} (-0.86\lambda - 449) + 0.99\lambda +$$

$$519.22 + 17.88e^{-0.00119\lambda} - 17.88e^{-0.00598\lambda} \quad (20)$$

当系统为如图 6 所示的简单的一维声学管道时, $b=0$, 系统的特征方程退化为单时滞方程

$$f(\lambda) = -0.416\lambda + 0.36\lambda e^{-0.00717\lambda} - 208 + 180e^{-0.00717\lambda} \quad (21)$$

使用本文方法对角频率在 5000 rad/s 以内的特征根进行求解. 设置矩形区域为 $[-60, 30] \times [0, 5000] \cdot i$, 通过式计算矩形区域内特征根个数 N_δ 与平移距离 δ 的关系, 其中 Rijke 管的计算结果如图 7 所示.

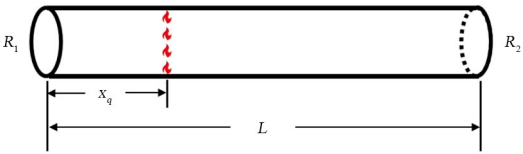


图 5 Rijke 管示意图
Fig. 5 Schematic illustration of the Rijke tube

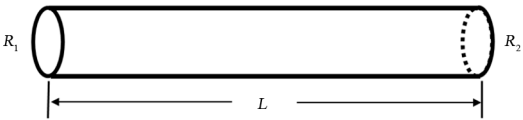


图 6 一维声学管道示意图
Fig. 6 Schematic illustration of a one-dimensional acoustic duct

表 1 Rijke 管相关参数
Table 1 Relevant parameters of the Rijke tube

参数	数值	单位
R_1	-0.93	—
R_2	-0.93	—
c	340	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
ρ	1.2	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
A	0.000 75	$\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
L	1.219	m
γ	1.4	—
b	200	—
x_q	0.1665	—
τ	0.002	s

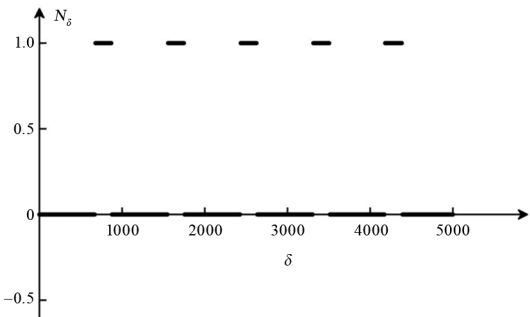


图 7 N_δ 随 δ 的变化
Fig. 7 Variation of N_δ with respect to δ

图中 N_{δ} 共发生 10 次跳变,其中 5 次向下跳变,5 次向上. 根据步骤三, 5 次向下跳变代表有特征根穿越 C_1 边界,对应的横坐标 δ 即为系统的 5 个模态频率,结果如表 2 所示.

表 2 Rijke 管前 5 阶模态频率/Hz
Table 2 The first five modal frequencies of the Rijke tube/Hz

模态阶数	伽辽金法	本文方法
1	143.10	143.88
2	280.02	280.54
3	418.43	418.78
4	557.64	557.79
5	697.71	697.59

同理,可以得到一维声学管道的前 5 阶模态频率,结果如表 3 所示.

表 3 一维声学管道前 5 阶模态频率/Hz
Table 3 The first five modal frequencies of the one-dimensional acoustic duct/Hz

模态阶数	伽辽金法	本文方法
1	139.41	139.96
2	278.83	278.97
3	418.25	418.78
4	558.64	558.58
5	697.01	697.59

在去掉热源后,系统的前两阶模态频率略微下降,但下降幅度较小,后三阶几乎不变. 这是由于热源的加入可能会激发或抑制某些模态的振荡,主要对系统的稳定性产生影响,对模态频率影响较小. 同时,伽辽金法给出的结果和本文方法基本一致. 相较伽辽金法,本文方法使用时滞系统的方法进行建模和计算,计算相对简单.

例 2 考虑图 8 所示带时滞动力吸振器的系统,其动力学方程为

$$\begin{cases} m_a \ddot{x}_a(t) + c_a \dot{x}_a(t) + k_a x_a(t) - c \dot{x}(t) - kx(t) + g \dot{x}_a(t - \tau) = 0 \\ m \ddot{x}(t) + (c_a + c) \dot{x}(t) + (k_a + k)x(t) - c_a \dot{x}_a(t) - k_a x_a(t) - g \dot{x}_a(t - \tau) = f(t) \end{cases} \quad (22)$$

其中 m 、 m_a 为主系统和吸振器的质量, c 、 c_a 为主系统和吸振器的阻尼, k 和 k_a 为刚度. 相关参数取值如表 4 所示.

令外激励和初始条件为

$$\begin{cases} f(t) = 0.1 \sin 15t \\ x_a(t) = x(t) = 0.001 \\ \dot{x}_a(t) = \dot{x}(t) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

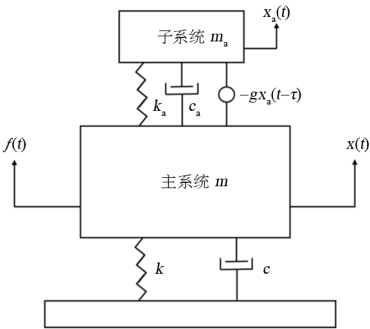


图 8 带时滞动力吸振器的单自由度减振系统
Fig. 8 A single-degree-of-freedom system with a time-delayed vibration absorber

表 4 减振器相关参数
Table 4 Relevant parameters of the damper

参数	数值	单位
m_a	0.1	kg
c	2.0	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
c_a	0.2	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
k	100	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
k_a	10	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$
τ	0.12026	s
g	0.857	$\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

可得系统时域响应如图 9 所示,系统响应是稳定的,且存在明显的拍现象,说明某阶模态频率与外激励频率接近.

接下来使用本文方法对该模态频率进行求解. 系统的特征方程为

$$p(\lambda) = (0.857\lambda^3 + 1.714\lambda^2 + 85.7\lambda)e^{-0.12026\lambda} + 0.1\lambda^4 + 0.42\lambda^3 + 21.4\lambda^2 + 40\lambda + 1000 \quad (24)$$

由图 9 可得,系统稳定且衰减率很低,因此选择在靠近虚轴的区域搜索,设置矩形区域为 $[-1, 0] \times [0, 25] \times i$. 通过式(12)可得矩形区域内特征根个数 N_{δ} 与平移距离 δ 的关系如图 10 所示.

图中 N_{δ} 共发生 2 次跳变,其中 1 次向下跳变,1 次向上. 根据步骤三, 向下跳变对应的横坐标约 δ 为 15.57,此即为系统的模态角频率. 该模态角频率与外激励角频率 15 rad/s 接近,这验证了前述关于拍现象产生原因的分析.

需要注意的是,本算例中响应中与外激励相等的频率成分 15 rad/s,无法通过本文方法求解,而

且需要借助快速傅里叶变换等方法.

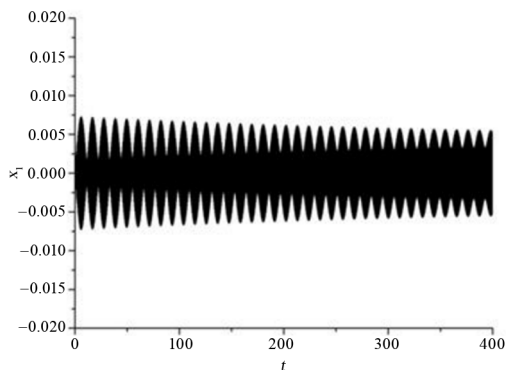


图9 减振系统的时域响应

Fig. 9 Time-domain response of the main system of Eq. (2)

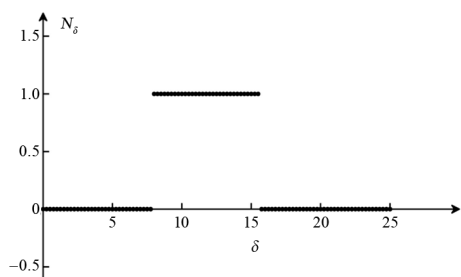


图10 减振系统中的 N_δ 随 δ 的变化

Fig. 10 Variation of N_δ with respect to δ for Eq. (2)

4 结论

本文结合辐角原理,提出了一种直接计算时滞系统模态频率的改进定积分法.首先说明使用经典定积分法的无穷大半圆积分路径,在特征根复平面内上下平移的过程中,积分值不会在模态频率处发生跳变.因此该积分路径不适用于直接计算时滞系统模态频率.而改进的定积分法,使用新的积分路径,结合特征根上下平移解决了积分值跳变问题.该方法编程简便,效率较高,且作为一种半解析的方法,不易遗漏特征根.本文分别以声学管道和吸振器系统为例,计算了两类系统的模态频率,验证了本文方法有效性和适用性.

参考文献

- [1] RICHARD J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems [J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667–1694.
- [2] 严尧, 张丽, 陈龙祥. 时滞动力学与控制研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(8): 1–5.
YAN Y, ZHANG L, CHEN L X. Progress in dy-

namics and control of time-delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 1–5. (in Chinese)

- [3] 孙中奎, 金晨. 时滞系统非线性动力学研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(8): 6–18.
SUN Z K, JIN C. Advances in nonlinear dynamics for delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 6–18. (in Chinese)
- [4] 瞿思雨, 刘豪杰, 高秀敏, 等. 两自由度气动弹性系统亚临界颤振的时滞控制 [J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(8): 42–49.
QU S Y, LIU H J, GAO X M, et al. Time-delay control of subcritical flutter in two-degree-of-freedom aeroelastic system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(8): 42–49. (in Chinese)
- [5] 管明杰, 茅晓晨. 含时滞轨道吸振器的建筑结构的动力学分析 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(8): 68–74.
GUAN M J, MAO X C. Dynamical analysis of a building structure with a time-delay track vibration absorber [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 68–74. (in Chinese)
- [6] 冯欣炜, 胥奇, 杨正兵, 等. 一类小车倒立摆的起摆稳摆时滞控制研究 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(8): 82–91.
FENG X W, XU Q, YANG Z B, et al. Delayed swing up and stability control of a class of cart-pendulum system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 82–91. (in Chinese)
- [7] 王强, 梁松, 王在华. 基于采样 PD 反馈的倒立摆控制系统的稳定性 [J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(4): 377–384.
WANG Q, LIANG S, WANG Z H. Stability of an inverted pendulum with a sampled-data PD feedback control [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(4): 377–384. (in Chinese)
- [8] 万成麒, 冯洋, 赵春发, 等. 含时滞电磁悬浮系统的 Smith 预估线性自抗扰控制研究 [J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(11): 47–57.
WAN C Q, FENG Y, ZHAO C F, et al. Study on Smith predictive linear active disturbance rejection control of the electromagnetic levitation system with time delays [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(11): 47–57. (in Chinese)
- [9] 钟世林, 邓远灏, 马存祥, 等. 航空发动机燃烧技术发展展望 [J]. 燃气轮机试验与研究, 2025, 38(2): 33–44.

- ZHONG S L, DENG Y H, MA C X, et al. Development and prospects of advanced combustion technologies for aero-engines [J]. *Gas Turbine Experiment and Research*, 2025, 38(2): 33—44. (in Chinese)
- [10] 方虹斌, 彭海军. 先进机器人中的动力学与控制专刊序[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(12): 1—4. FANG H B, PENG H J. Preface to the special issue: dynamics and control of advanced robots [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(12): 1—4. (in Chinese)
- [11] 陆畅, 吕阳, 张稳, 等. 时滞反馈储备池启发的步态协同映射建模与下肢假肢 FPGA 控制实现[J]. *动力学与控制学报*, 2025, 23(5): 91—97. LU C, LV Y, ZHANG W, et al. Delayed feedback reservoir inspired modeling of gait coordination mapping and FPGA-implementation for lower limb prosthesis [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2025, 23(5): 91—97. (in Chinese)
- [12] 蔡国平, 刘晓峰, 刘元卿. 空间机器人捕获动力学与控制[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(12): 22—36. CAI G P, LIU X F, LIU Y Q. Capturing dynamics and control of space robots [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(12): 22—36. (in Chinese)
- [13] MUYIZERE D, LETTING L K, MUNYAZIK-WIYE B B. Effects of communication signal delay on the power grid: a review [J]. *Electronics*, 2022, 11(6): 874.
- [14] ENGELBORGH S K, LUZYANINA T, SAMAIEY G. DDE-BIFTOOL: A Matlab package for bifurcation analysis of delay differential equations [J]. *TW Report*, 2000, 305(1): 1—36.
- [15] VYHLIDAL T, ZITEK P. Mapping based algorithm for large-scale computation of quasi-polynomial zeros [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 171—177.
- [16] VYHLIDAL T, ZÍTEK P. Quasipolynomial mapping based rootfinder for analysis of time delay systems [J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2003, 36(19): 227—232.
- [17] VYHLIDAL T, JEAN F L, RIFAT S, et al. Delay systems: From theory to numerics and applications [M]. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2013.
- [18] DELVES L M, LYNESS J N. A numerical method for locating the zeros of an analytic function [J]. *Mathematics of Computation*, 1967, 21(100): 543—560.
- [19] LYNESS J N, DELVES L M. On numerical contour integration round a closed contour [J]. *Mathematics of Computation*, 1967, 21(100): 561—577.
- [20] 曾莉, 胡广大. 中立型延时系统不稳定特征根的计算[J]. *自动化学报*, 2013, 39(1): 81—87. ZENG L, HU G D. Computation of unstable characteristic roots of neutral delay systems [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(1): 81—87. (in Chinese)
- [21] XU Q, WANG Z H, CHENG L. Calculating characteristic roots of multi-delayed systems with accumulation points via a definite integral method [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2021, 88(3): 83.
- [22] 韩飞, 沙家正. Rijke 管热声非线性不稳定增长过程的研究[J]. *声学学报*, 1996, 21(4): 362—367. HAN F, SHA J Z. Study on nonlinear increasing procedure of Rijke thermoacoustical instability [J]. *Acta Acustica*, 1996, 21(4): 362—367. (in Chinese)
- [23] 赵艳影, 徐鉴, 严志刚. 时滞对非线性饱和控制减振频带漂移的影响[J]. *力学学报*, 2010, 42(4): 747—757. ZHAO Y Y, XU J, YAN Z G. Effects of delay on effective band drift in nonlinear saturation control system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42(4): 747—757. (in Chinese)
- [24] PANDOLFI L. Stabilization of neutral functional differential equations [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1976, 20(2): 191—204.
- [25] XU Q, STEPAN G, WANG Z H. Delay-dependent stability analysis by using delay-independent integral evaluation [J]. *Automatica*, 2016, 70: 153—157.
- [26] 邢雪. 任意阻抗边界条件管腔热声耦合特性与不稳定抑制研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2022. XING X. Study on thermoacoustic coupling characteristics and its instability suppression of duct cavity with arbitrary impedance boundary conditions [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2022. (in Chinese)
- [27] OLGAC N, ZALLUHOGLU U, KAMMER A S. Predicting thermoacoustic instability: a novel analytical approach and its experimental validation [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2014, 30(4): 1005—1015.