

# 小推力捕获轨道的最大双曲剩余速度分析<sup>\*</sup>

武迪 张楠 蒋方华<sup>†</sup> 宝音贺西

(清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

**摘要** 针对捕获轨道设计中小推力捕获问题, 考虑推力幅值的限制, 分析了实现捕获的最大双曲剩余速度, 即航天器进入目标天体影响球时的最大速度, 从而使得航天器在小推力作用下能够被捕获于具有给定半长轴的目标环绕轨道。首先, 建立了求解最大剩余速度的轨迹优化模型, 并采用间接法将最优控制问题转化为两点边值问题进行求解, 分析了协态变量特性并将两点边值问题建模为以目标环绕轨道偏心率和真近点角为变量的非线性方程。其次, 以火星捕获为例, 揭示了最大剩余速度随推力加速度幅值、捕获时间和环绕轨道半长轴变化的规律, 分析了捕获时间的上下限及其对应的最优控制, 给出了航天器进入影响球并捕获至目标环绕轨道的多圈最优轨迹。最后, 总结了最大双曲剩余速度分析在任务设计中的应用与未来的研究展望。

**关键词** 小推力, 深空探测, 捕获轨道, 双曲剩余速度, 轨迹优化

中图分类号:V448.2

文献标志码:A

## Maximum Hyperbolic Excess Velocity Analysis for Low-Thrust Capture Orbit<sup>\*</sup>

Wu Di Zhang Nan Jiang Fanghua<sup>†</sup> Baoyin Hexi

(School of Aerospace Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** The low-thrust capture orbit design is considered by analyzing the maximum hyperbolic excess velocity that can realize the capture with constrained thrust magnitude and given semi-major axis of the target elliptical capture orbit. The optimal control problem is formulated and transformed into a two-point boundary value problem by the indirect method. The characteristics of costate variables are analyzed to obtain two-dimensional nonlinear equations, where the eccentricity and true anomaly of the target elliptical orbit are identified as the independent variables. As for the Mars capture, the maximum hyperbolic excess velocity increases when the maximum thrust acceleration, capture time, and semi-major axis become larger. The minimum and maximum capture times are revealed, and the corresponding optimal control laws and multi-revolution capture trajectories are presented. Finally, the application of the maximum hyperbolic excess velocity analysis is discussed, and possible future research is summarized.

**Key words** low-thrust, deep-space exploration, capture orbit, hyperbolic excess velocity, trajectory optimization

2024-05-13 收到第 1 稿, 2024-05-25 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助项目(12302058, U21B2050), 青年人才托举工程(2023QNRC001), National Nature Science Foundation of China (12302058, U21B2050), Young Elite Scientists Sponsorship Program by CAST (2023QNRC001)。

† 通信作者 E-mail:jiangfh@tsinghua.edu.cn

## 引言

近年来,深空探测蓬勃发展,月球、各大行星及其卫星探测对探究太阳系形成与演化、探索生命起源、利用地外资源等具有重大意义,是当前空间探测的一大热点。轨道设计是空间探测任务设计的重要部分,而捕获轨道的设计则是实现高效环绕、着陆探测的前提条件,关乎任务成败<sup>[1]</sup>。传统化学推进系统的推力大,开机时间短,可以先用瞬时脉冲近似处理,再用有限推力模型精细设计。相较之下,连续推进系统(如电推进系统、太阳帆等)具有比冲高、省燃料的优势,但推力幅值小,需要长时间的开机作用才能产生所需的速度增量<sup>[2,3]</sup>。连续小推力作用下的捕获轨道设计有待进一步研究。

一般情况下,在近星点附近制动效率高,可以快速降低轨道能量实现捕获,例如,“伽利略”号探测器经过一次近木点减速制动即可捕获至大椭圆轨道,所需速度增量约为 630 m/s<sup>[4]</sup>。考虑有限推力,捕获制动可以看作有限时间的推力弧段,并采用惯性定向、匀角速率、沿速度反向等<sup>[5]</sup>捕获策略实现,由于化学推进系统的推力大,最终捕获轨迹与脉冲设计结果近似一致<sup>[6,7]</sup>。若考虑多天体系统中的低能量转移轨道,可以应用弱稳定边界理论实现弹道捕获设计<sup>[8]</sup>,这一方法在 Hitenn 任务中得到了应用与验证。Howell 等<sup>[9]</sup>采用李雅普诺夫指数图分析了多天体系统中的逃逸与捕获规律。上述方法主要针对传统化学推进系统的捕获轨道设计,长时间连续小推力作用下的捕获轨道具有不同特性:一是由于推力幅值远小于化学推进,可能需要多圈多弧段的开机才能到达目标轨道,无法视为脉冲处理;二是作用时间长、最优控制规律未知,难以利用传统弹道捕获理论直接分析。

直接法、间接法和混合法是求解连续小推力轨迹优化问题的几类主要方法<sup>[10]</sup>。Casalino 等<sup>[11]</sup>将小推力地球捕获分为影响球至高轨的接近段和高轨到低轨的转移段,采用间接法分析了给定推力下的最大双曲剩余速度(超过该速度则无法实现捕获),但该分析基于 Edelbaum 方法估计的转移结果且局限于圆目标轨道。Gao<sup>[12]</sup>基于轨道平均化模型下的给定控制律和多段轨迹拼接讨论了含逃逸与捕获段的地火转移优化问题;Topputto 等<sup>[13]</sup>求解了给定控制律下的小推力火星捕获和脉冲弹道

逃逸相结合的地火转移问题。但上述研究均人为预设了捕获阶段的推力控制律,仅能得到次优的近似结果。彭坤等<sup>[14]</sup>基于混合法和轨道逆推思路求解了月球小推力捕获轨道,但未进一步分析实现小推力捕获的临界情况。通常,电推进的推力幅值远小于目标捕获轨道上的中心天体引力,需要多圈减速才能到达目标轨道;另一方面,推力幅值在捕获过程的第一圈或前几圈部分弧段可能与引力相当,最优控制规律难以估计。因此,有必要建立捕获全过程的轨迹优化模型,分析能够捕获的最大双曲剩余速度及其对应的最优控制规律。

本文建立了最大化双曲剩余速度的小推力捕获轨迹优化模型并推导了最优控制的一阶必要条件。通过分析协态变量的特性,提出了以目标轨道偏心率和真近点角为打靶变量的逆向积分打靶求解方法。以火星捕获为例,探讨了不同推力幅值、捕获时间下的最大双曲剩余速度,从而为能否实现小推力捕获提供了判断标准,分析了末端轨道偏心率与真近点角分布,给出了最优的捕获轨迹与控制规律。在此基础上,进一步分析了不同目标捕获轨道半长轴情况下的最大双曲剩余速度并探讨了各个关键参数的影响规律,从而为小推力捕获的目标轨道选择与参数设计提供参考。

## 1 最大双曲剩余速度的轨迹优化模型

考虑采用太阳能电推进系统的航天器以双曲剩余速度  $v_\infty$  进入探测天体的影响球,电推进系统开机工作,航天器在中心引力和推力作用下最终捕获至环绕轨道。通常,捕获过程的时间较短,不妨设航天器与太阳的距离基本不变,电推进系统提供的推力近似为常数;电推进系统比冲高,短时间的燃料消耗相比航天器的质量可忽略不计,航天器的最大推力加速度为常数  $a_{\max}$ 。为评估连续小推力能够实现捕获的最大双曲剩余速度,最终环绕轨道应与双曲剩余速度共面,因此采用如下平面极坐标描述航天器的动力学方程<sup>[15]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{r} = v_r \\ \dot{\theta} = \frac{v_\theta}{r} \\ \dot{v}_r = -\frac{\mu - rv_\theta^2}{r^2} + a_r \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + a_\theta \end{cases} \quad (1)$$

其中 $[r, \theta, v_r, v_\theta]^T$ 表示航天器的位置速度,  $\mu$ 为探测天体的引力常数,  $\mathbf{a} = [a_r, a_\theta]^T$ 为电推进系统提供的推力加速度, 沿径向和横向分解, 其幅值满足约束 $\|\mathbf{a}\| \leq a_{\max}$ .

航天器在初始 $t_0$ 时刻位于影响球边界处, 初始速度为 $\mathbf{v}_\infty = [v_\infty \cos \alpha, v_\infty \sin \alpha]^T$ , 其中 $\alpha \in [\pi/2, 3\pi/2]$ 为双曲剩余速度与径向的夹角, 该角度可以通过航天器进入影响球前的轨道修正进行调整. 捕获轨道设计的末端约束为使航天器到达给定半长轴的椭圆环绕轨道, 即

$$\frac{1}{2}[v_r^2(t_f) + v_\theta^2(t_f)] - \frac{\mu}{r(t_f)} = -\frac{\mu}{2a} \quad (2)$$

其中 $t_f$ 为末端时刻,  $a$ 为给定的椭圆轨道半长轴. 轨迹优化目标为最小化

$$J = -\frac{1}{2}\lambda_0 v_\infty^2 = -\frac{\lambda_0}{2}[v_r^2(t_0) + v_\theta^2(t_0)] \quad (3)$$

即最大化双曲剩余速度的大小, 其中 $\lambda_0$ 取任意正数, 不影响实际优化指标.

由于轨迹优化问题的性能指标、初末状态约束均与航天器的状态 $\theta$ 无关, 求解时无需考虑此量. 为分析捕获过程的最优控制律并采用间接法求解得到最优控制, 引入协态变量 $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_r, \lambda_{vr}, \lambda_{v\theta}]^T$ , 建立系统的哈密顿函数为

$$H = \lambda_r v_r + \lambda_{vr} \left( -\frac{\mu - rv_\theta^2}{r^2} + a_r \right) + \lambda_{v\theta} \left( -\frac{v_r v_\theta}{r} + a_\theta \right) \quad (4)$$

为最小化哈密顿函数, 推力加速度应取为

$$a_r = -\frac{\lambda_{vr} a_{\max}}{\sqrt{\lambda_{vr}^2 + \lambda_{v\theta}^2}}, \quad a_\theta = -\frac{\lambda_{v\theta} a_{\max}}{\sqrt{\lambda_{vr}^2 + \lambda_{v\theta}^2}} \quad (5)$$

通过对哈密顿函数求偏导, 可得欧拉—拉格朗日方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{rv_\theta(\lambda_{vr}v_\theta - v_r\lambda_{v\theta}) - 2\mu\lambda_{vr}}{r^3} \\ \dot{\lambda}_{vr} = -\frac{\partial H}{\partial v_r} = \frac{v_\theta\lambda_{v\theta}}{r} - \lambda_r \\ \dot{\lambda}_{v\theta} = -\frac{\partial H}{\partial v_\theta} = \frac{v_r\lambda_{v\theta} - 2v_\theta\lambda_{vr}}{r} \end{cases} \quad (6)$$

式(1)和(6)为常微分方程组, 若已知初始状态和协态, 则可以通过式(5)得到最优控制, 并积分到末端时刻得到末端状态和协态.

根据初末状态约束和性能指标可以推导得到横截条件分别为:

$$\lambda_{vr}(t_0) = \lambda_0 v_r(t_0), \lambda_{v\theta}(t_0) = \lambda_0 v_\theta(t_0) \quad (7)$$

$$\lambda_r(t_f) = \frac{\chi\mu}{r^2(t_f)}, \lambda_{vr}(t_f) = \chi v_r(t_f), \\ \lambda_{v\theta}(t_f) = \chi v_\theta(t_f) \quad (8)$$

其中 $\chi$ 为待定系数, 可以通过整理式(8)得到两个方程. 若设 $\lambda_0 = 1$ , 初始时刻的位置协态和速度分量的值分别为 $\lambda_r(t_0)$ 、 $v_r(t_0)$ 和 $v_\theta(t_0)$ , 初始位置 $r = r_0$ 为影响球半径, 初始速度协态由式(7)给出, 打靶变量应为 $\mathbf{z} = [\lambda_r(t_0), v_r(t_0), v_\theta(t_0)]^T$ , 末端打靶方程为式(2)和(8). 至此, 轨迹优化最优控制问题被转化为两点边值问题, 可以通过求解3个变量的非线性打靶方程得到最优控制. 非线性方程的求解依赖于良好的初值设计, 可以采用智能优化或随机猜测估计等方法提供初值<sup>[16,17]</sup>.

进一步分析可以发现, 协态变量的幅值不影响最优控制律、欧拉拉格朗日方程的形式, 仅改变公式(7)和(8)中的系数 $\lambda_0$ 和 $\chi$ 的取值. 为避免求解无实际物理意义的打靶变量, 本文采用从末端逆向积分打靶求解的方法. 首先, 不妨设协态变量的幅值可以恰好使待定系数 $\chi = 1$ , 末端的协态可以根据式(8)得到, 末端的位置速度可以通过椭圆轨道的偏心率 $e$ 和真近点角 $f$ 得到:

$$\begin{cases} r(t_f) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \\ v_r(t_f) = e\sin f \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \\ v_\theta(t_f) = (1+e\cos f) \sqrt{\frac{\mu}{a(1-e^2)}} \end{cases} \quad (9)$$

因此, 打靶变量可以设置为 $\mathbf{z} = [e, f]^T$ , 通过式(9)和(8)分别得到末端的状态和协态, 积分到初始时刻得到初始状态和协态, 打靶方程为

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} r(t_0) - r_0 \\ v_r(t_0)\lambda_{v\theta}(t_0) \\ -v_\theta(t_0)\lambda_{vr}(t_0) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (10)$$

通过上述方法, 打靶变量具有明确的物理意义和取值范围, 非线性打靶方程的维度降低为2, 更易于数值求解.

## 2 火星捕获最大剩余速度分析

以火星探测为例, 本节探究航天器到达火星时可以实现小推力捕获的最大双曲剩余速度及其最优捕获控制律. 火星的引力常数 $\mu$ 取值为 $42\,828,376 \text{ km}^3/\text{s}^2$ , 火星的半径取为 $3396,000 \text{ km}$ ,

影响球半径取为  $5.77 \times 10^5$  km, 捕获后环绕轨道的半长轴设为  $5.0 \times 10^4$  km. 在仿真计算中, 通过归一化方法将火星半径和火星引力常数归一化到单位1, 单位时间为 956.28 s. 使用 C++ 编程调用 Minpack-1 工具包<sup>[18]</sup>打靶求解式(10), 打靶变量偏心率范围为  $[0, 1]$ , 真近点角范围为  $[0, 2\pi]$ , 打靶迭代收敛的判据为打靶方程的残差小于  $1.0 \times 10^{-7}$ .

测试不同推力加速度和不同捕获时间下的最大双曲剩余速度, 推力加速度取值为  $0.4, 0.6, 0.8$  mm/s<sup>2</sup>. 捕获时间存在最短时间, 当捕获时间设置小于最短时间时, 无法求解打靶方程; 当捕获时间设置过长时, 存在航天器进入影响球后飞出影响球并再次重新进入的情况, 在此予以剔除. 针对任一推力加速度取值, 首先采用随机猜测初值的方法求解得到某一适中捕获时间下的解, 然后逐步增大或减小时间, 并用上一个收敛的结果作为此次求解的打靶初值, 若该初值可以收敛, 则继续求解下一个捕获时间情况; 若无法收敛, 则仍采用随机猜测求解, 直至随机猜测 1000 次仍无法收敛则认为违反了最短捕获时间.

最大双曲剩余速度仿真结果如图 1 所示, 随着推力的增大、捕获时间的增长, 最大双曲剩余速度逐渐增大, 最大值约为  $1.4$  km/s (此时  $a_{\max} = 0.8$  mm/s<sup>2</sup>). 这一数值结果表明将连续小推力地火转移建模为交会 (相对速度接近 0) 是有问题的, 应结合捕获段一同优化分析. 相比而言, 传统化学推进捕获的双曲剩余速度约为  $4.0$  km/s<sup>[17]</sup>, 两种推进方式呈现明显的差异. 三种不同推力加速度下, 最短捕获时间  $T_{\min}$  依次为  $24.09, 17.44, 14.44$  d; 捕获时间最长  $T_{\max}$  可设置为  $52.58, 42.0, 36.78$  d. 若考虑有效排气速度在  $40.0$  km/s

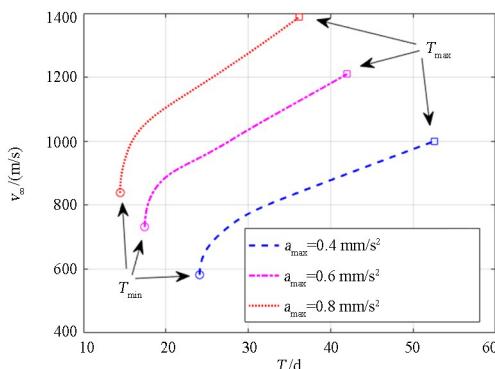


图 1 最大双曲剩余速度随推力加速度和捕获时间变化规律图  
Fig. 1 The maximum hyperbolic excess velocity with respect to the thrust acceleration and capture time

的电推进系统<sup>[18]</sup>, 则最长捕获时间下燃料消耗占总质量的比重依次为  $4.44\%, 5.30\%, 6.16\%$ , 因此假设捕获过程中燃料消耗相比航天器的质量可忽略不计是合理的.

针对上述结果, 进一步分析打靶变量, 即末端环绕轨道的偏心率和真近点角, 如图 2 所示. 可以发现, 最大双曲剩余速度下小推力捕获的末端轨道为大椭圆轨道, 偏心率均在 0.3 以上, 偏心率大于 0.92 时, 近星点过低, 需考虑近星点高度约束重新计算. 末端真近点角与捕获时间设置有关, 捕获时间较长时, 末端位置在远星点附近. 当  $a_{\max} = 0.6$  mm/s<sup>2</sup> 时, 末端偏心率和真近点角存在突变, 这是由捕获过程的圈数随捕获时间改变所导致的. 如图 3 所示, 部分情况下末端极角  $\theta_f \in [2\pi, 4\pi]$ , 其余情况下  $\theta_f \in [4\pi, 6\pi]$ , 随着推力加速度的减小和捕获时间的增长, 圈数逐渐增多. 在给定的几种推力下, 在 2~3 圈内即可实现捕获.

当  $a_{\max} = 0.6$  mm/s<sup>2</sup>,  $T = 20, 35$  d 对应的捕获轨迹与最优控制律如图 4 所示, 其中  $\beta$  为最优推力加速度与速度方向的夹角. 两种情况下, 最优的双曲剩余速度与径向的夹角  $\alpha$  不同, 捕获轨迹的圈数与末端偏心率也不同. 当捕获时间较短时, 最优加

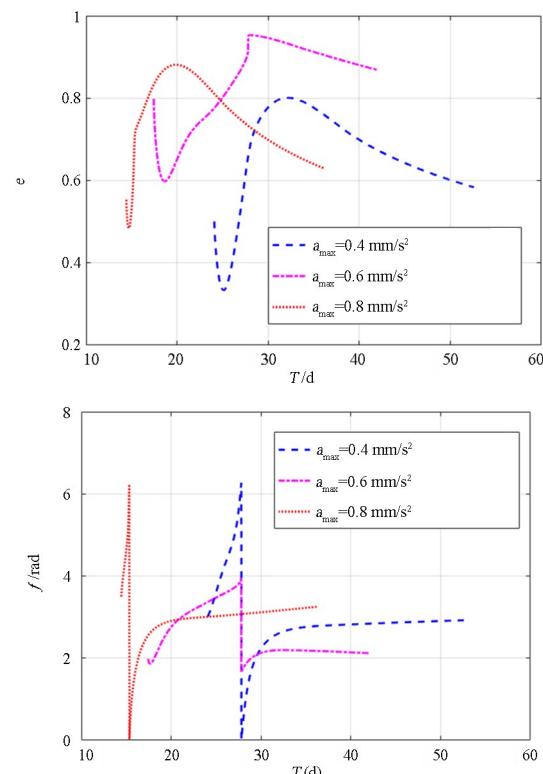


图 2 末端偏心率和真近点角随推力加速度和捕获时间变化规律图  
Fig. 2 The final eccentricity and true anomaly for different thrust acceleration and capture time

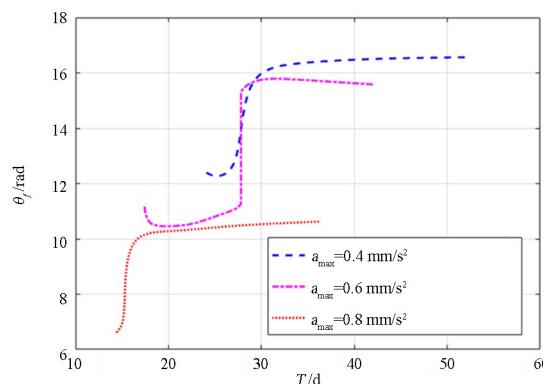
图3 极角随推力加速度和捕获时间变化规律图( $\theta_0=0$ )

Fig. 3 The final angular position for different thrust acceleration and capture time( $\theta_0=0$ )

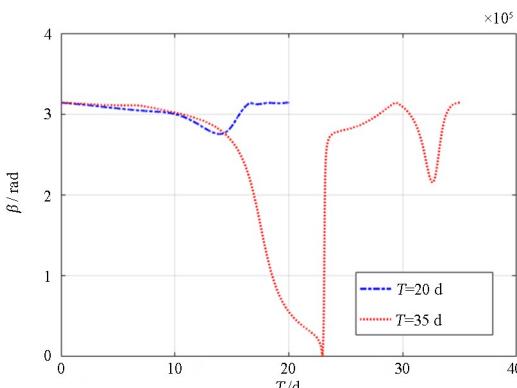
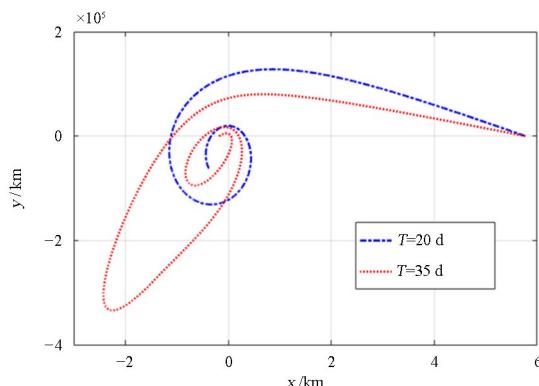


图4 捕获轨迹与捕获过程中推力与速度方向夹角  
Fig. 4 Capture trajectories and histories of thrust acceleration direction

速度方向基本和速度方向反向,提供减速;而当捕获时间较长时,航天器存在短暂的加速弧段以保证整体轨迹的最优化。

### 3 不同情况下的火星捕获最大剩余速度

针对给定的航天器加速度  $a_{\max} = 0.4 \text{ mm/s}^2$ , 本节进一步分析取不同的捕获环绕轨道半长轴和捕获时间时的最大双曲剩余速度特性。将环绕轨道半长轴在  $[2, 10] \times 10^4 \text{ km}$  之间以  $500 \text{ km}$  为步长离散,依次求解各个半长轴下的最短捕获和最长捕

获时间,在两个时间之间以  $0.2 \text{ d}$  为步长离散求解各个捕获时间设置下的最大双曲剩余速度,最终结果如图 5 所示。随着捕获半长轴的减小,最短和最长捕获时间均逐渐增大,航天器需要飞行更多的圈数才能实现捕获进入目标环绕轨道。此外,各个情况下的最大双曲剩余速度均在  $1.0 \text{ km/s}$  左右。该速度主要取决于航天器的最大推力加速度,当双曲剩余速度大于该速度时,航天器无法在第一圈内捕获并会再次飞出影响球。

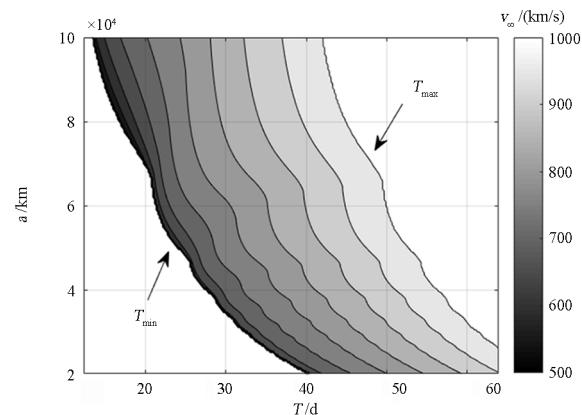


图5 不同捕获半长轴和时间下的最大双曲剩余速度

Fig. 5 The maximum hyperbolic excess velocity with different target semi-major axis and capture time

数值仿真表明,小推力捕获任务设计的主要参数是航天器的最大推力加速度,该参数直接限制了可行的最大双曲剩余速度。在此基础上,捕获环绕轨道的半长轴和捕获时间设计相互制约,同一双曲剩余速度下,捕获环绕轨道的半长轴越小,所需的捕获时间越长。长时间的捕获过程需要多圈实现,例如,当  $a = 2 \times 10^4 \text{ km}$ 、 $T = 60 \text{ d}$  时,最优轨迹的圈数为 12 圈,最终环绕轨道偏心率为  $e = 0.3$ ,捕获过程中的最优轨迹与最优控制律如图 6 所示。可以看出,捕获轨迹的第一圈仍包含加速弧段,并经过多圈减速进入最终环绕轨道。

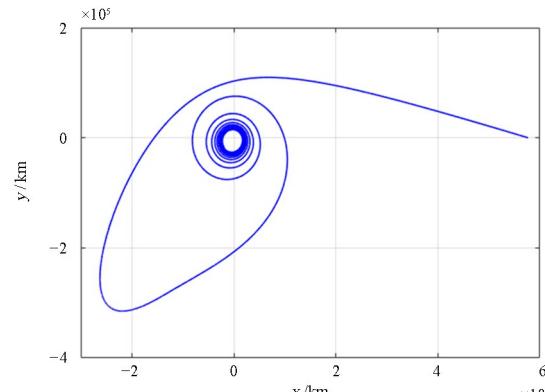


图6 多圈情况下的捕获轨迹与捕获过程中推力

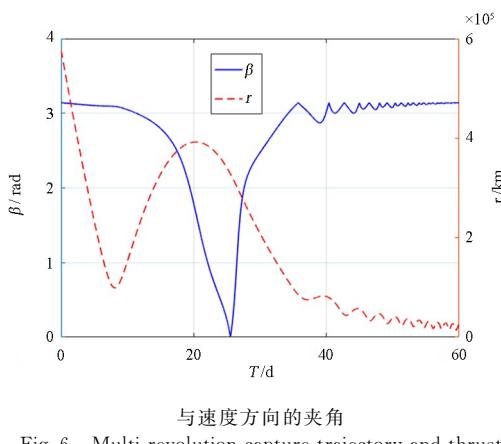


Fig. 6 Multi-revolution capture trajectory and thrust acceleration direction

## 4 总结与展望

本文分析了连续小推力捕获中的最大双曲剩余速度,建立了求解最大剩余速度的轨迹优化模型,并以火星捕获为例探讨了不同推力加速度幅值、捕获时间、环绕轨道半长轴情况下的剩余速度最大值及相应的最优控制规律。受限于电推进较小的推力幅值,当航天器以更大的剩余速度进入影响球时,无法在第一圈内获得足够的减速并会再次飞出影响球。本文发现尽管调节捕获时间和环绕轨道半长轴可以提升最大剩余速度,但推力加速度幅值是影响其上限的主要参数。当捕获时间较短时,最优推力加速度方向基本和速度方向相反,以实现尽快捕获;当捕获时间较长时,存在同向的弧段,从而提升整体的捕获性能。

本文提供了一种小推力捕获轨道设计分析方法,能够判定给定参数条件下小推力捕获的可实现性,为进一步求解给定目标下的最优转移与捕获轨道奠定基础。考虑到实际任务中的飞行高度约束、大气减速作用<sup>[19]</sup>以及推力方向约束,有待进一步研究以提升本文方法适用性。

## 参考文献

- [1] 王靓明, 郭延宁, 马广富. 火星探测器制动捕获策略研究[J]. 深空探测学报, 2020, 7(2): 178—183.  
WANG L Y, GUO Y N, MA G F. Research about strategies of Mars probe capture [J]. Journal of Deep Space Exploration, 2020, 7(2): 178—183. (in Chinese)
- [2] 李俊峰, 蒋方华. 连续小推力航天器的深空探测轨道优化方法综述[J]. 力学与实践, 2011, 33(3):

1—6.

LI J F, JIANG F H. Survey of low-thrust trajectory optimization methods for deep space exploration [J]. Mechanics in Engineering, 2011, 33(3): 1—6. (in Chinese)

- [3] 陈诗雨, 宝音贺西. 多目标交会轨迹优化方法综述[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(4): 1—11.  
CHEN S Y, BAO Y. Survey of multitarget rendezvous trajectory optimization methods [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(4): 1—11. (in Chinese)
- [4] D'Amario L A, Bright L E, Wolf A A. Galileo trajectory design [J]. Space Science Reviews, 1992, 60(1): 23—78.
- [5] 李军锋, 龚胜平. 有限推力模型火星探测捕获策略分析[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, 43(6): 781—786.  
LI J F, GONG S P. Analysis of capture strategies for Mars explorer with finite-thrust [J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2013, 43(6): 781—786. (in Chinese)
- [6] 陈晓. 火星捕获段导航与控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2021.  
CHEN X. Research on navigation and control during mars orbit insertion [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2021. (in Chinese)
- [7] 刘博, 王云财, 张松涛, 等. 火星探测器制动捕获多目标优化策略[J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(4): 356—361.  
LIU B, WANG Y C, ZHANG S T, et al. Multi-objective optimization strategy for brake capture of Mars explorer [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(4): 356—361. (in Chinese)
- [8] 李翔宇, 乔栋, 程涌. 三体轨道动力学研究进展[J]. 力学学报, 2021, 53(5): 1223—1245.  
LI X Y, QIAO D, CHENG Y. Progress of three-body orbital dynamics study [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(5): 1223—1245. (in Chinese)
- [9] CANALES D, HOWELL K C, FANTINO E, et al. Transfers between moons with escape and capture patterns via Lyapunov exponent maps [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2023, 46(11): 2133—2149.
- [10] 高扬. 电火箭星际航行: 技术进展、轨道设计与综合优化[J]. 力学学报, 2011, 43(6): 991—1019.  
GAO Y. Interplanetary travel with electric propul-

- sion: technological progress, trajectory design, and comprehensive optimization [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2011, 43(6): 991—1019. (in Chinese)
- [11] LA MANTIA M, CASALINO L. Indirect optimization of low-thrust capture trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(4): 1011—1014.
- [12] GAO Y. Low-thrust interplanetary transfers, including escape and capture trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2007, 30(6): 1814—1818.
- [13] MINGOTTI G, TOPPUTO F, BERNELLI-ZAZZERA F. Earth-Mars transfers with ballistic escape and low-thrust capture [J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2011, 110(2): 169—188.
- [14] 彭坤, 黄震, 杨宏, 等. 基于弹道逃逸和小推力捕获的地月转移轨道设计[J]. 航空学报, 2018, 39(8): 322047.  
PENG K, HUANG Z, YANG H, et al. Design of trans-lunar trajectory based on ballistic escape and low-thrust capture [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2018, 39(8): 322047. (in Chinese)
- [15] PONTANI M, CONWAY B A. Particle swarm optimization applied to space trajectories [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(5): 1429—1441.
- [16] 李海洋, 周晓东, 张旭光, 等. 多目标空间探测智能轨迹优化方法综述[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(2): 1—14.  
LI H Y, ZHOU X D, ZHANG X G, et al. Review on multi-target space trajectory optimization via intelligent methods [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(2): 1—14. (in Chinese)
- [17] 李俊峰, 宝音贺西, 蒋方华. 深空探测动力学与控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2014.  
LI J F, JIANG F H. Dynamics and control of interplanetary flight [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2014. (in Chinese)
- [18] 迟哲敏, 李俊峰, 蒋方华, 等. 变比冲连续小推力轨迹优化方法综述[J]. 飞控与探测, 2020, 3(4): 58—67.  
CHI Z M, LI J F, JIANG F H, et al. Survey of variable-specific-impulse continuous low-thrust trajectory optimization methods [J]. Flight Control & Detection, 2020, 3(4): 58—67. (in Chinese)
- [19] 罗宗富. 复杂力场天体探测器捕获轨道设计与大气进入制导研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2015.  
LUO Z F. Capture trajectory design and atmospheric entry guidance for probing celestial bodies in complex dynamical field [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2015. (in Chinese)