

# 考虑表面效应和高阶电场的功能梯度 压电纳米梁静态弯曲行为分析<sup>\*</sup>

刘百强 王鹏<sup>†</sup>

(济南大学 土木建筑学院, 济南 250022)

**摘要** 本文建立了考虑表面效应、高阶电场及 Winkler-Pasternak 线弹性约束影响的功能梯度材料 (FGM) 压电纳米梁模型, 研究了各参数对其力-电行为的影响. 基于哈密顿变分原理并结合欧拉-伯努利梁模型, 推导出 FGM 压电纳米梁的控制方程和边界条件. 利用傅里叶级数展开法, 得到了其挠度、极化强度和电势的解析解, 并详细分析了梯度指数、残余应力、表面材料参数以及 Winkler-Pasternak 参数对 FGM 压电纳米梁挠度、极化强度、电势和抗弯刚度的影响规律. 研究表明: 梯度指数和残余应力的增大会导致挠度增大, 而 Winkler-Pasternak 参数增大则使挠度减小; 随着梯度指数的增大, 抗弯刚度减小; 外部载荷和电压增大时, 极化强度增大, 而梯度指数和厚度增大则使极化强度减小.

**关键词** 功能梯度材料, 压电纳米梁, 表面效应, 线弹性基础, 力-电行为

**中图分类号**: O341.1

**文献标志码**: A

## Static Bending Behavior Analysis of Functional Gradient Piezoelectric Nanobeams Considering Surface Effects and High-order Electric Fields<sup>\*</sup>

Liu Baiqiang Wang Peng<sup>†</sup>

(School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250022, China)

**Abstract** This paper establishes a functionally graded material (FGM) piezoelectric nanobeam model that considers surface effects, higher-order electric fields, and Winkler-Pasternak elastic foundation constraints, investigating the influence of various parameters on its force-electric behavior. Based on Hamilton's variational principle and the Euler-Bernoulli beam model, the governing equations and boundary conditions of the FGM piezoelectric nanobeam are derived. By employing the Fourier series expansion method, analytical solutions for deflection, polarization intensity, and electric potential are obtained. The effects of gradient index, residual stress, surface material parameters, and Winkler-Pasternak parameters on the deflection, polarization intensity, electric potential, and bending stiffness of the FGM piezoelectric nanobeam are analyzed in detail. The study reveals that an increase in the gradient index and residual stress leads to greater deflection, while an increase in the Winkler-Pasternak parameters reduces deflection. As the gradient index increases, the bending stiffness decreases. Furthermore, polarization intensity increases with external load and applied voltage but decreases with increasing gradient index and thickness.

**Key words** functionally graded material, piezoelectric nanobeams, surface effect, linear elastic foundation, force-electric coupling effect

## 引言

挠曲电效应<sup>[1-4]</sup>是由材料内部不均匀的应变或应变梯度<sup>[5,6]</sup>引起的电极化现象. 不同于压电效应, 挠曲电效应不需要材料具备中心对称性, 因此它可以广泛应用于所有电介质材料中. 随着微纳米技术的快速发展, 材料中的应变梯度在小尺度下变得更加显著, 因此, 具有尺度依赖的挠曲电效应逐渐成为研究热点. 挠曲电效应在能量采集器、传感器、谐振器等<sup>[7-10]</sup>微纳米器件中展现出独特的优势与潜力, 为新型功能材料和器件的开发提供了重要基础.

早在 20 世纪 50 年代, Mashkevich 和 Tolpygo<sup>[11]</sup>在研究晶体的晶格动力学时就预测了挠曲电效应, 但是由于挠曲电效应在宏观尺度下很微弱, 在当时并未引起重视. 直到 21 世纪初期, Ma 和 Cross<sup>[12]</sup>实验测量了铁电材料的挠曲电系数, 挠曲电的研究才引起了广泛关注. 随后, 基于固体中的挠曲电理论<sup>[13]</sup>, 文献[14-17]研究了静态挠曲电效应的微纳米构件的力学行为. Xu 等<sup>[18]</sup>基于 Kirchhoff 板理论, 研究了压电纳米板的自由振动行为. 此外, 姜文安等<sup>[19]</sup>概述了簇发振荡能量采集器的机电耦合能量转换装置、簇发振荡能量采集的动力学机理、簇发振荡能量采集的效率三个方面的研究进展. 朱培等<sup>[20]</sup>对移动车辆作用下桥梁系统的振动能量俘获进行了研究. 马小青和周生喜<sup>[21]</sup>研究了非线性三稳态风致振动能量俘获系统的输出特性. Jiang 等<sup>[22]</sup>考虑了带有振荡器的轴向负载梁能量收集器, 研究了其内部共振作为提高振动能量收集器带宽的可能机制. 而当材料或器件特征尺寸缩小至微纳米尺度时, 其表面能量和应变梯度的变化使得表面效应也变得不可忽视<sup>[23]</sup>. Huang 和 Yu<sup>[24]</sup>建立了表面能量函数和控制方程, 研究了表面压电效应对压电环应力和电场的影响, 结果表明: 表面压电对纳米尺度的应力和电场有很大的影响. Shen 和 Hu<sup>[17]</sup>考虑表面效应和静电效应建立了介电材料挠曲电理论. Zhang 和 Zhou<sup>[25]</sup>研究了磁场及线弹性基底约束对悬臂欧拉—伯努利梁在表面有电极的开路电学边界条件(OCI)下的静态

弯曲和振动特性.

此外, 随着微纳米器件的小型化发展, 材料尺寸减小的同时, 塑性和稳定性也有所下降. 功能梯度材料(FGM)因其渐变式材料分布特性, 可优化材料性能, 弥补结构缺陷. FGM 在纳米尺度下展现出优异的力—电耦合特性, 使其成为近年来的研究热点. Li 等<sup>[26]</sup>基于铁木辛柯梁模型, 探讨了悬臂式 FGM 压电纳米梁的弯曲行为和自由振动特性; Zhao 等<sup>[27]</sup>同时考虑孔隙率和挠曲电效应, 研究了轴向功能梯度(AFG)压电纳米梁的静态屈曲行为和自由振动特性. 近年来的研究表明, 挠曲电效应、表面效应及弹性基础显著影响压电纳米梁的力学行为, 但是综合考虑挠曲电效应、表面效应及弹性基础作用下 FGM 压电纳米梁的研究尚未报道. 因此, 将 FGM 压电纳米梁模型中的梯度指数与挠曲电系数、表面效应参数、Winkler-Pasternak 参数的组合是一个值得研究的问题. 本文基于这些效应研究了 FGM 压电纳米梁的力—电耦合性能.

本文主要探讨了考虑静态挠曲电效应、表面效应、高阶电场及 Winkler-Pasternak 线性弹性约束影响的 FGM 压电纳米梁的力—电耦合行为. 第 1 节给出了幂律分布形式的 FGM 体积分数; 第 2 节给出了挠曲电效应理论公式; 第 3 节推导了控制方程和边界条件; 第 4 节求解了挠度的解析式; 第 5 节对静态弯曲和力—电耦合性能进行了数值模拟分析; 第 6 节对本文的研究做了总结.

## 1 功能梯度材料

在图 1 中, 采用了 FGM 欧拉—伯努利压电纳米梁模型, 长度为  $L$ , 厚度为  $h$ , 宽度为  $b$ . 该模型由聚偏二氟乙烯(PVDF)和  $\text{BaTiO}_3$  两种材料组成, PVDF 材料附着在梁的上部,  $\text{BaTiO}_3$  材料附着在梁的下部, 如图 2 所示. 该模型的有效特性仅沿着厚度方向( $z$  方向)连续变化, 因此有效材料特性表示为:

$$\eta = \eta_B V_B + \eta_P V_P \quad (1)$$

式中,  $\eta_B$  和  $\eta_P$  是  $\text{BaTiO}_3$  和 PVDF 的材料性质, 如弹性常数、挠曲电系数、压电常数、介电常数等.  $V_B$  和  $V_P$  是  $\text{BaTiO}_3$  和 PVDF 的体积分数, 关系如下:

$$V_B + V_P = 1 \quad (2)$$

在本文中,体积分数采用幂律分布,如下所示:

$$V_P(z) = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^m, \quad z \in \left[ -\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h \right] \quad (3)$$

将式(3)代入式(1)中,可得有效材料性能表达式为:

$$\eta(z) = (\eta_P - \eta_B) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^m + \eta_B \quad (4)$$

式中,  $m$  为梯度指数,其值应大于或等于 0. 梯度指数可以控制材料的梯度特性,优化梁的力学性能;它还可以调节刚度分布,从而影响梁的静态弯曲特性.

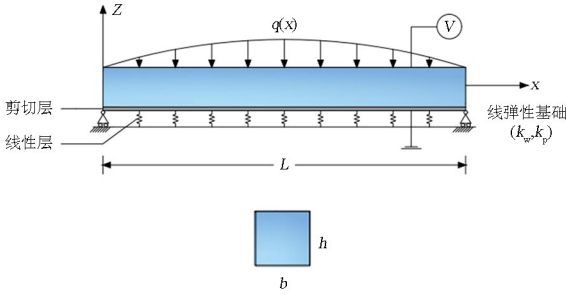


图 1 FGM 压电纳米梁模型

Fig. 1 FGM piezoelectric nanobeam model

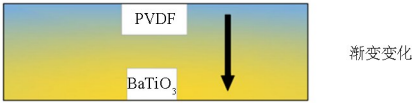


图 2 FGM 功能梯度材料渐变变化

Fig. 2 FGM functional gradient material gradient change

## 2 挠曲电理论

对于各向同性功能梯度介电材料的挠曲电效应理论,基于线性压电理论,一般内能密度函数表示为<sup>[19]</sup>:

$$U = \frac{1}{2} a_{kl} P_k P_l + \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + d_{ijk} P_k \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_{ijkl} P_{i,j} \epsilon_{ij,l} + e_{ijkl} P_{k,l} \epsilon_{ij} \quad (5)$$

式中,  $a_{kl}$ 、 $c_{ijkl}$ 、 $d_{ijk}$ 、 $b_{ijkl}$ 、 $f_{ijkl}$ 、 $e_{ijkl}$ 、 $P_i$ 、 $P_{i,j}$  分别是介电常数、弹性常数、压电系数、四阶介电常数、挠曲电系数、逆挠曲电系数、极化强度和高级极化强度的分量,挠曲电系数和逆挠曲电系数之间的关系是  $f_{ijkl} = -e_{ijkl}$ ;  $\epsilon_{ij}$  和  $\epsilon_{ij,l}$  是应变和应变梯度,定义为:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \epsilon_{ij,l} = \frac{1}{2} (u_{i,jl} + u_{j,il}) \quad (6)$$

式中,  $u_i$  是位移分量.

根据式(5),可得本构方程表达式为:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_b}{\partial \epsilon_{ij}} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} + d_{ijk} P_k + e_{ijkl} P_{k,l} \quad (7)$$

$$\tau_{ij,l} = \frac{\partial U_b}{\partial \epsilon_{ij,l}} = f_{ijkl} P_k \quad (8)$$

$$E_i = \frac{\partial U_b}{\partial P_i} = a_{ij} P_j + d_{jki} \epsilon_{jk} + f_{jkil} u_{j,kl} \quad (9)$$

$$V_{ij} = \frac{\partial U_b}{\partial P_{i,j}} = b_{ijkl} P_{k,l} + e_{kl ij} \epsilon_{kl} \quad (10)$$

式中,  $\sigma_{ij}$ 、 $\tau_{ijl}$ 、 $E_i$ 、 $V_{ij}$  分别是柯西应力、高阶应力、电场和高阶电场的分量. 在许多文献中,为了方便计算,通常省略式(10).

根据式(5)~(10),可得内能梯度函数表达式为<sup>[19]</sup>:

$$U_b = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \tau_{ijl} \epsilon_{ij,l} + \frac{1}{2} E_i P_i + \frac{1}{2} E_{ij} P_{i,j} \quad (11)$$

$$U_s = U_{s0} + \frac{1}{2} (\sigma_{a\beta}^s \epsilon_{a\beta}^s + \Gamma_{a\beta}^s \epsilon_{a\beta}^s + E_a^s P_a^s) \quad (12)$$

式中,  $U_b$  是本体部分的贡献,  $U_s$  是表面部分的贡献. 在表面部分的贡献中,  $\epsilon_{a\beta}^s$  是表面应变分量,  $P_a^s$  是表面极化强度分量,  $\Gamma_{a\beta}^s$  是表面残余应力分量,通常表示为  $\sigma^0 \delta_{a\beta}$ . 相应的本构方程表示为<sup>[25]</sup>:

$$\sigma_{a\beta}^s = \sigma^0 \delta_{a\beta} + c_{a\beta\gamma\delta}^s \epsilon_{\gamma\delta}^s + d_{a\beta\gamma}^s P_\gamma^s \quad (13)$$

$$E_a^s = a_{a\beta}^s P_a^s + d_{\gamma a\beta}^s \epsilon_{a\beta}^s \quad (14)$$

式中,  $c_{a\beta\gamma\delta}^s$  是表面弹性常数分量,  $d_{a\beta\gamma}^s$  是表面压电常数分量,  $a_{a\beta}^s$  是表面介电常数分量.

总电焓密度表示为:

$$H = U_b + U_s - \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi_{,i} \phi_{,i} + P_i \phi_{,i} \quad (15)$$

式中,  $\epsilon_0 = 8.852 \times 10^{-12} \text{ C/(V} \cdot \text{m)}$ , 为真空介电常数;  $\phi_{,i}$  表示电势分量;  $P_i$  表示极化强度分量.

根据能量变分原理,由式(11)、式(12)和式(15)可得到控制方程和边界条件:

$$\sigma_{ij,j} - \tau_{ijk,jk} + q_i = \rho \ddot{u}_i \quad (16)$$

$$E_i - V_{ij,j} + \phi_{,i} = E_i^0 \quad (17)$$

$$-\epsilon_0 \phi_{,ii} + P_{i,i} = 0 \quad (18)$$

式中,  $q_i$  是体积力,  $E_i^0$  是外电场.

设系统的拉格朗日函数为:

$$L(u_k, \dot{u}_k, t) = K(\dot{u}_k) - U(u_k, t) \quad (19)$$

式中,  $K$  为动能,  $U$  为势能. 由哈密顿原理

$$\delta \int_0^T L dt + \delta \int_0^T W dt = 0 \quad (20)$$

可得到系统的真实运动. 静态情况下,动能为 0,拉格朗日函数  $L$  就是系统的电焓密度  $H$ . 为了得到

系统的控制方程,需要求出系统拉格朗日函数及外力虚功的具体表达。

### 3 欧拉-伯努利梁模型

欧拉-伯努利梁的位移形式为:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z, t) &= -(z - h_0) \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} \\ u_z(x, y, z, t) &= w_0(x, t) \end{aligned} \quad (21)$$

式中,  $w_0(x, t)$  是几何中性面在点  $x$  和时间  $t$  处的横向位移,  $h_0$  表示物理中性面和几何中性面之间的偏差,  $h_0$  的位置可以使用以下公式确定:

$$h_0 = \frac{\int_A E(z) z dA}{\int_A E(z) dA} \quad (22)$$

式中,  $A$  是 FGM 压电纳米梁的横截面面积,  $E(z)$  是杨氏模量。

根据式(6),可得到非零应变和应变梯度为:

$$\epsilon_{xx} = -(z - h_0) \frac{\partial w_0(x)}{\partial x^2} \quad (23)$$

$$\epsilon_{xx,x} = -(z - h_0) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}, \quad \epsilon_{xx,z} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (24)$$

欧拉-伯努利梁属于细长梁 ( $L \geq 20h$ ), 可以假设  $P_x = P_y = 0$ , 电极化仅沿着  $z$  方向变化, 表示为:

$$\begin{aligned} \{P_x(x, z, t), P_y(x, z, t), P_z(x, z, t)\} \\ = \{0, 0, P(x, z, t)\} \end{aligned}$$

因此, 根据式(7)~(10), 本构方程可表示为:

$$\sigma_{xx} = c_{11} \epsilon_{xx} + d_{13} P_z - f_{13} P_{z,z} \quad (25)$$

$$\tau_{xx,z} = f_{1133} P_z \quad (26)$$

$$E_z = a_{33} P_z + d_{13} \epsilon_{xx} + f_{1133} \epsilon_{xx,z} \quad (27)$$

$$V_{zz} = b_{33} P_{z,z} - f_{1133} \epsilon_{xx} \quad (28)$$

在没有外部电场的情况下, 即 FGM 压电纳米梁沿着  $z$  方向的电场平衡方程应满足以下边界条件:

$$E_z - V_{zz,z} + \phi_{,z} = 0 \quad (29)$$

$$-\epsilon_0 \phi_{,zz} + P_{z,z} = 0 \quad (30)$$

考虑电学边界条件:  $\phi\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, \phi\left(\frac{h}{2}\right) = V$ ,

$V_{zz}\left(-\frac{h}{2}\right) = 0, V_{zz}\left(\frac{h}{2}\right) = 0$ 。然后将电学边界条件代入式(28)~(30), 可得到电势和极化强度表达式为:

$$\begin{aligned} \phi(z) &= [m_1 e^{sz} + m_2 e^{-sz} + m_3 z + m_4 + \\ &\quad \frac{d_{13} z^2}{2(a\epsilon_0 + 1)}] \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right) V \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} P_z &= (m_1 s \epsilon_0 e^{sz} - m_1 s \epsilon_0 e^{-sz} + m_3 z \epsilon_0 + m_5 + \\ &\quad m_7 z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{V}{a_{33} h} \end{aligned} \quad (32)$$

式中, 系数表示为:

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{\epsilon_0 a_{33} + 1}{\epsilon_0 b_{33}}} \\ m_1 &= -\frac{\epsilon_0 d_{13} b_{33}}{2(\epsilon_0 a_{33} + 1)^2 \cosh\left(\frac{hs}{2}\right)} + \\ &\quad \frac{f_{13} h_0}{2(\epsilon_0 a_{33} + 1) \cosh\left(\frac{hs}{2}\right)} - \frac{f_{13} h}{4(\epsilon_0 a_{33} + 1) \sinh\left(\frac{hs}{2}\right)} \\ m_2 &= -\frac{\epsilon_0 d_{13} b_{33}}{2(\epsilon_0 a_{33} + 1)^2 \cosh\left(\frac{hs}{2}\right)} + \\ &\quad \frac{f_{13} h_0}{2(\epsilon_0 a_{33} + 1) \cosh\left(\frac{hs}{2}\right)} + \frac{f_{13} h}{4(\epsilon_0 a_{33} + 1) \sinh\left(\frac{hs}{2}\right)} \\ m_3 &= \frac{f_{13}}{\epsilon_0 a_{33} + 1} \\ m_4 &= \frac{\epsilon_0 d_{13} b_{33}}{(\epsilon_0 a_{33} + 1)^2} - \frac{f_{13} h_0}{\epsilon_0 a_{33} + 1} - \frac{d_{13} h^2}{8(\epsilon_0 a_{33} + 1)} \\ m_5 &= -\frac{d_{13} h_0}{a_{33}} + \frac{f_{13}}{a_{33}}, \quad m_6 = \frac{\epsilon_0 a_{33} + 1}{a_{33}} \\ m_7 &= \frac{\epsilon_0 d_{13}}{\epsilon_0 a_{33} + 1} \end{aligned}$$

为了下文公式表达简洁, 设置系数  $k_1(z)$ ,  $k_1(z) = m_1 s \epsilon_0 e^{sz} - m_1 s \epsilon_0 e^{-sz} + m_3 \epsilon_0 + m_5 + m_7 z$ 。因此, 极化强度表示为:

$$P_z = k_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{V}{a_{33} h} \quad (33)$$

将式(33)代入式(25)和式(26), 得到应力和高阶应力的表达式为:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -c_{11} (z - h_0) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \\ &\quad d_{13} \left[ k_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{V}{a_{33} h} \right] - f_{13} \frac{\partial k_1(z)}{\partial z} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\tau_{xx,z} = f_{13} \left[ k_1(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{V}{a_{33} h} \right] \quad (35)$$

将式(33)~(35)代入式(15)中, 并对其积分形式做变分运算得到:

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega} H d\Omega &= \delta \int_{\Omega} (U_b + U_s - \frac{1}{2} \epsilon_0 \phi_{,i} \phi_{,i} + P_i \phi_{,i}) d\Omega \\ &= \delta \int_0^T \int_0^L [(D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + \end{aligned}$$

$$D_8 - D_9 + D_{10} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_7 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} dx dt \quad (36)$$

式中,为了便于下文的计算,系数  $D_i (i=1,2,3\cdots)$  如下:

$$D_1 = (c_{11} - \frac{\epsilon_0 d_{13}^2}{\epsilon_0 a_{33} + 1}) I_2, D_2 = d_{13} (\epsilon_0 s m_1 - \epsilon_0 s m_2) I_4,$$

$$D_3 = f_{13} (\epsilon_0 s^2 m_1 + \epsilon_0 s^2 m_2) I_4, D_4 = \frac{\epsilon_0 f_{13}^2}{\epsilon_0 a_{33} + 1} I_0,$$

$$D_5 = \frac{f_{13}^2}{a_{33}} I_0, D_6 = f_{13} (\epsilon_0 s m_1 - \epsilon_0 s m_2) I_3,$$

$$D_7 = f_{13} \frac{V}{a_{33} h} I_0, D_8 = (c_{11} - \frac{\epsilon_0 d_{13}^2 d_{13}}{\epsilon_0 a_{33} + 1}) I_s,$$

$$D_9 = d_{13}^s (\epsilon_0 s m_1 - \epsilon_0 s m_2) I_4,$$

$$D_{10} = f_{13} (\epsilon_0 s^2 m_1 + \epsilon_0 s^2 m_2) I_3.$$

其中,惯性矩为  $\{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4\} = \int_A \{1, (z - h_0), (z - h_0)^2, z e^{sz}, z e^{sz}\} dA$ , 表面效应的贡献在系数  $D_8, D_9$  和  $D_{10}$  中.

根据式(36),可得不包含外力虚功的 FGM 压电纳米梁的控制方程表示为:

$$\delta w_0: (D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = 0 \quad (37)$$

相应的边界条件为:

$$\delta w_0: -(D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (38)$$

$$\delta \frac{\partial w_0}{\partial x}: (D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_7 = 0 \quad (39)$$

当考虑表面效应时,由于表面效应的存在,会产生一个等效的竖向荷载  $e(x, t)$  作用在梁上,可以表示为:

$$e(x, t) = b [\sigma_{xx}^s r^u r^l - (\sigma_{xx}^s r)^l] = 2b \left[ \sigma^0 + c_{11}^s \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial x} + d_{31}^s \frac{V}{h} \right] r \quad (40)$$

式中,  $r$  是曲率,  $r = \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$ , 这是一个近似值. 为了研究 FGM 压电纳米梁的弯曲问题, 我们将  $\left[ \sigma^0 + c_{11}^s \frac{\partial u^0(x, t)}{\partial x} + d_{13}^s \frac{V}{h} \right]$  近似为  $\sigma^0$ , 所以  $e(x, t)$  为:

$$e(x, t) = 2br\sigma^0 = 2b\sigma^0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (41)$$

施加荷载  $q(x)$  作用在梁上, 并且考虑 Winkler-Pasternak 复合线弹性基础参数  $k_w$  和  $k_p$ , 可以得到外力总功的变分形式为:

$$\delta \int_0^T W dt = \int_0^T \int_0^L [D_{11} - D_{12} w_0 + (D_{13} + D_{14}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}] \delta w_0 dx dt \quad (42)$$

式中,  $D_{11} = q(x)$ ,  $D_{12} = k_w$ ,  $D_{13} = k_p$ ,  $D_{14} = 2b\sigma^0$ ,  $K_w = k_w \frac{L^4}{D_{11}}$ ,  $K_p = k_p \frac{L^2}{D_{11}}$ .

将式(37)和式(42)代入到式(20)中, 可得到总控制方程为:

$$\delta w_0: (D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - D_{11} + D_{12} w_0 - (D_{13} + D_{14}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

式中, 不仅考虑了静态挠曲电效应的影响, 还考虑了表面效应和 Winkler-Pasternak 线性弹性基础的影响.

如果不考虑表面效应和 Winkler-Pasternak 线性弹性基础的影响, 式(43)可以退化为经典的 FGM 压电纳米梁运动方程<sup>[28]</sup>.

## 4 静态弯曲

本节研究了 FGM 压电纳米梁的静态弯曲. 考虑了外部载荷、Winkler-Pasternak 线弹性基础和表面效应的影响. 根据式(43), 得到控制方程为:

$$-(D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + D_{11} - D_{12} w_0 + (D_{13} + D_{14}) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (44)$$

有效抗弯刚度为:

$$\zeta_{ep} = -(D_1 - D_2 + D_3 - D_4 - D_5 - D_6 + D_8 - D_9 + D_{10}) \quad (45)$$

式中,  $\zeta_{ep}$  与弹性常数、压电系数和挠曲电系数有关.

求解式(44)需要使用傅里叶级数展开法, 基于两端简支的 FGM 压电纳米梁的边界条件, 假设解的形式如下:

$$w_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n \sin(\kappa_n x) \quad (46)$$



$$q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n\sin(\kappa x)$$

(47)

式中,  $\kappa=\frac{n\pi}{L}$ , 此处施加外力  $q(x)$  并不会影响静态

$$W_n=\frac{Q_n}{(D_1-D_2+D_3-D_4-D_5-D_6+D_8-D_9+D_{10})\kappa^4-D_{12}+(D_{13}+D_{14})\kappa^2}$$

(48)

当载荷为均匀载荷时, 即  $q(x)=J$ ,  $Q_n$  为:

$$Q_n=\frac{-2J}{n\pi}(-1)^n+\frac{2J}{n\pi}$$

(49)

当载荷为非均匀载荷时, 即  $q(x)=Jx$ ,  $Q_n$  为:

$$Q_n=-\frac{2Jx}{n\pi}\cos(n\pi)$$

(50)

将式(48)代入式(31)和式(32), 极化强度和电势的解析式为:

$$P_z=k_1(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n}{B_1}\kappa^2\sin(\kappa x)-\frac{V}{a_{33}h}$$

(51)

$$\phi(z)=k_2(z)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Q_n}{B_1}\kappa^2\sin(\kappa x)+\left(\frac{z}{h}+\frac{1}{2}\right)V$$

(52)

式中,  $B_1=(D_1-D_2+D_3-D_4-D_5-D_6+D_8-D_9+D_{10})\kappa^4-D_{12}+(D_{13}+D_{14})\kappa^2$ ,  $k_2(z)=\left[m_1e^{sz}+m_2e^{-sz}+m_3z+m_4+\frac{d_{13}z^2}{2(a\varepsilon_0+1)}\right]$ .

如果不考虑表面效应和 Winkler-Pasternak 线弹性基础的影响, 则系数  $D_8$ 、 $D_9$ 、 $D_{10}$ 、 $D_{12}$ 、 $D_{13}$  和  $D_{14}$  的贡献消失. 在这种情况下, 式(48)可以退化为经典的 FGM 压电纳米梁挠度解析式<sup>[29]</sup>.

5 算例分析

在本文中, PVDF 和 BaTiO<sub>3</sub> 的材料参数如表 1 所示.

表 1 PVDF 和 BaTiO<sub>3</sub> 材料参数

| Argument                                    | Materials          |                     |
|---------------------------------------------|--------------------|---------------------|
|                                             | BaTiO <sub>3</sub> | PVDF                |
| $\rho/(\text{kg}/\text{m}^3)$               | 6020               | 1780                |
| $E/\text{GPa}$                              | 42.9               | 3.7                 |
| $d_{31}/(\text{V}/\text{m})$                | $1.87\times10^8$   | $1.02\times10^9$    |
| $f_{31}/\text{V}$                           | 5                  | 1                   |
| $c_{11}/\text{GPa}$                         | 131                | 371                 |
| $a_{33}/(\text{V}\cdot\text{m}/\text{C})$   | $0.79\times10^8$   | $1.38\times10^{10}$ |
| $b_{33}/(\text{V}\cdot\text{m}^3/\text{C})$ | $0.79\times10^2$   | $1.38\times10^4$    |

从图 3 可以看出, 不论是均匀载荷还是非均匀载荷, 随着梯度指数的增大, 挠度也随之增大.

情况的假设.  
把式(46)和式(47)代入到式(44)中, 可以得到挠度的解析式为:

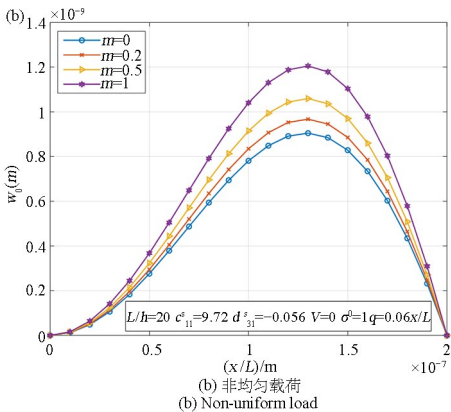
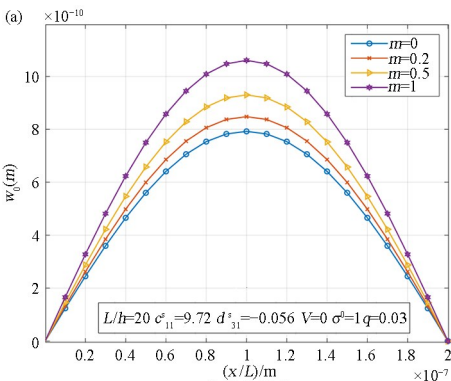
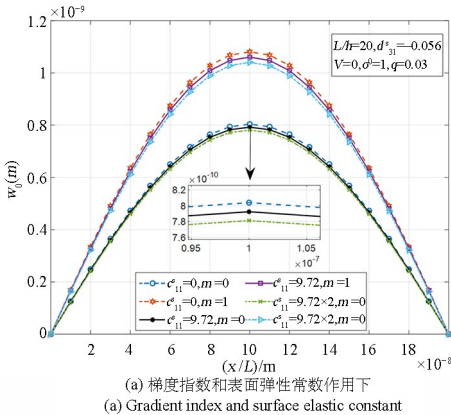


图 3 均匀载荷和非均匀载荷对挠度的影响  
Fig. 3 Influence of uniform load and non-uniform load on deflection

从图 4(a)可以看出, 表面弹性常数对挠度的影响不显著, 但当梯度指数  $m$  从 0 增大到 1 时, 表面弹性常数对挠度的影响明显增大了. 从图 4(b)可以看出, 残余应力对挠度的影响很显著.

从图 5(a)可以看出, 当  $k_w$  和  $k_p$  的值取 10、20、30 时, 对挠度的影响可以忽略不计. 从图 5(b)



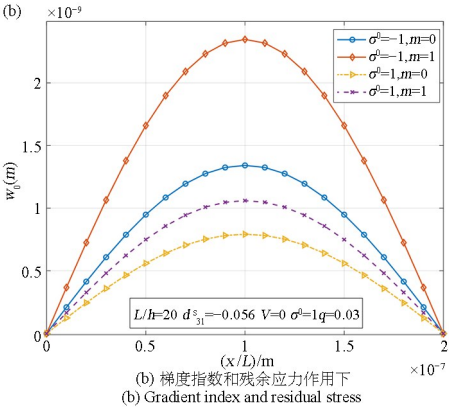


图 4 梯度指数和表面效应对挠度的影响  
Fig. 4 The influence of gradient index and surface effect on deflection

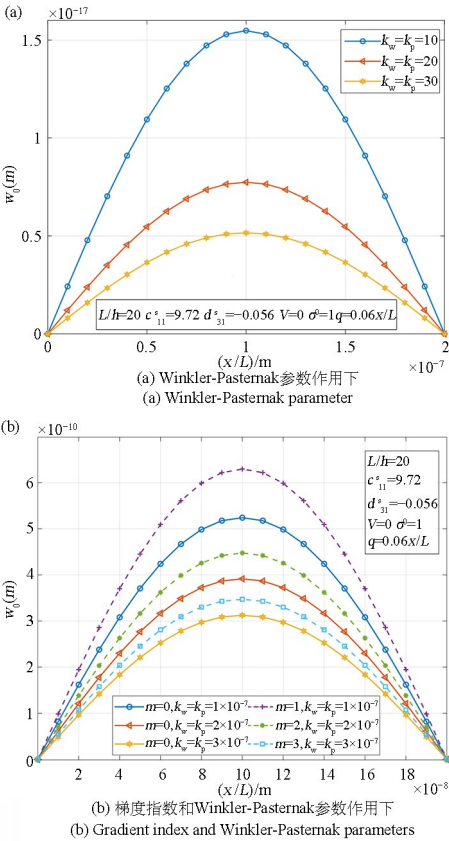


图 5 梯度指数和 Winkler-Pasternak 参数对挠度的影响  
Fig. 5 Influence of gradient index and Winkler-Pasternak parameters on deflection

可以看出,当  $k_w$  和  $k_p$  的值减小到  $1 \times 10^{-7} \sim 3 \times 10^{-7}$  以后,其对挠度产生了不可忽略的影响。

从图 6 可以看出,挠度随着电压的增大而增大,电压对挠度的影响很显著。

从图 7(a)可以看出,抗弯刚度随着梯度指数  $m$  的增大而降低,降低的幅度也随着  $m$  的增大而越来越小。从图 7(b)可以看出,表面弹性常数和表面压电系数对抗弯刚度的影响并不显著,可以忽略不计。

从图 8 可以看出,考虑电压的影响时,极化强

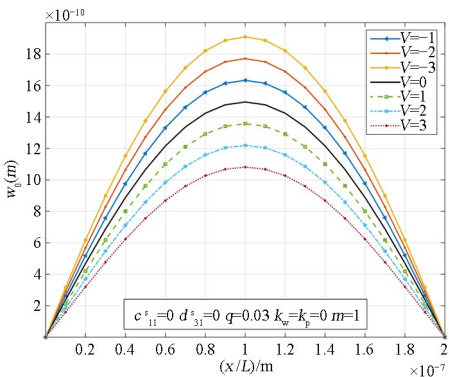


图 6 电压对挠度的影响  
Fig. 6 The influence of voltage  $V$  on the deflection

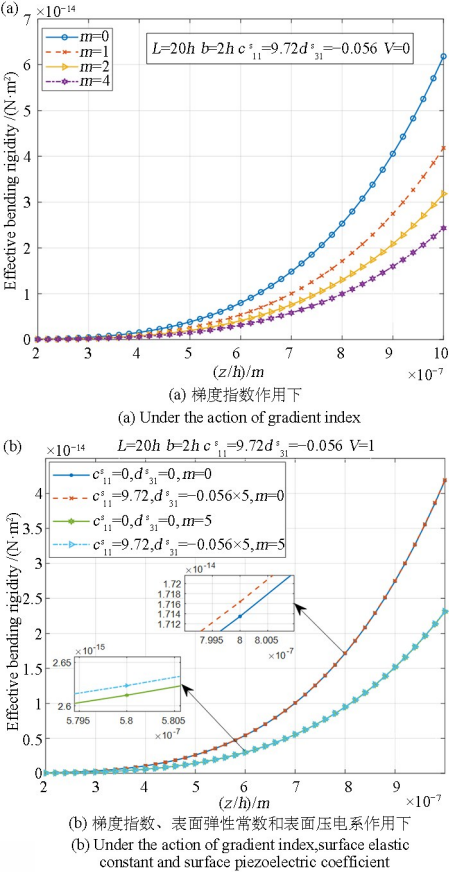


图 7 梯度指数和表面效应对抗弯刚度的影响  
Fig. 7 Influence of gradient index and surface effect on flexoelectric stiffness

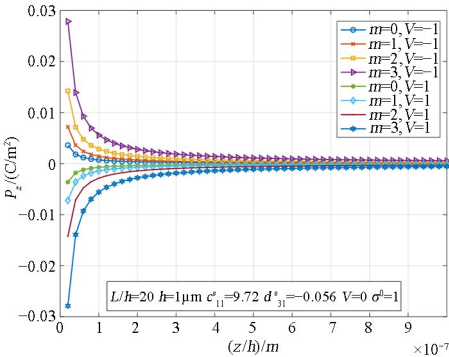


图 8 梯度指数和电压对极化强度的影响  
Fig. 8 Influence of gradient index and voltage on polarization intensity

度随着厚度增大而变化,极化强度的方向与电压方向一致,当梯度指数  $m$  逐渐增大时,极化强度也随之增大.

从图 9 可以看出,电势的作用方向与电压方向相同,并且随着电压的逐渐增大,电势也随之逐渐增大.

从图 10 可以看出,当不考虑电压的影响,不论考虑均匀载荷还是非均匀载荷,随着梯度指数的增大,极化强度是逐渐减小的.

从图 11 可以看出,随着荷载的增大,极化强度随之增大.当梯度指数从 0 增大到 1 时,荷载对极化强度的影响也随之减小.

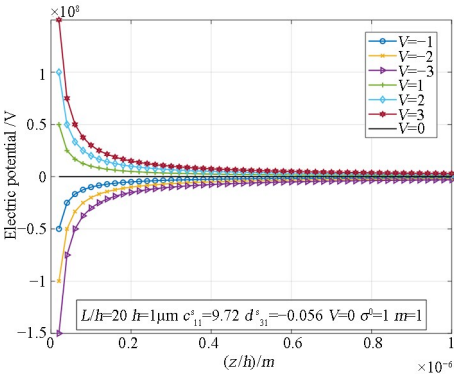


图 9 电压对电势的影响

Fig. 9 The effect of voltage on potential

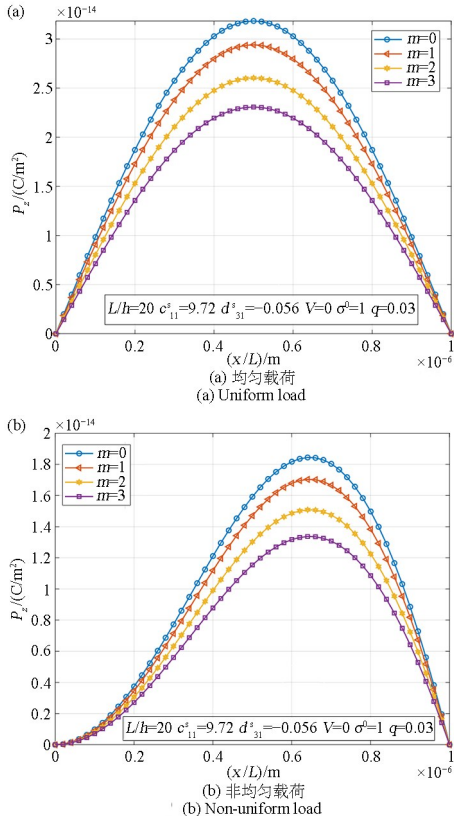
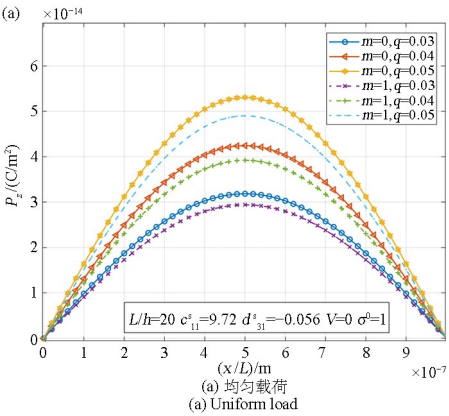


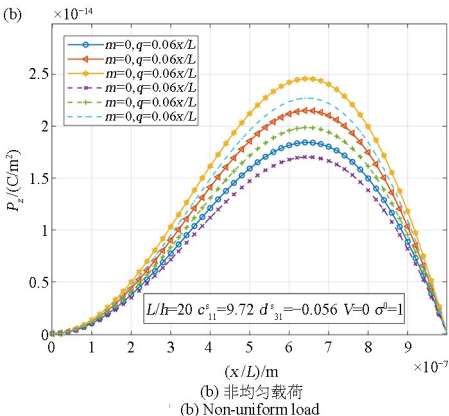
图 10 梯度指数对极化强度的影响

Fig. 10 Influence of gradient index on polarization intensity

从图 12 可以看出,不论考虑均匀载荷还是非均



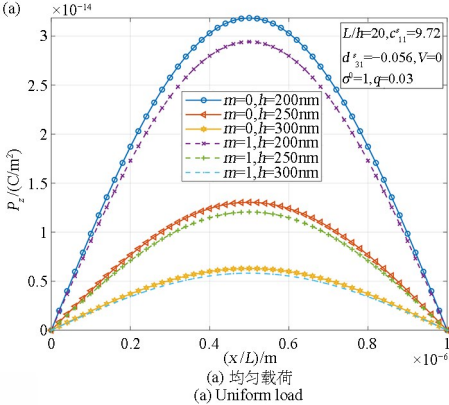
(a) Uniform load



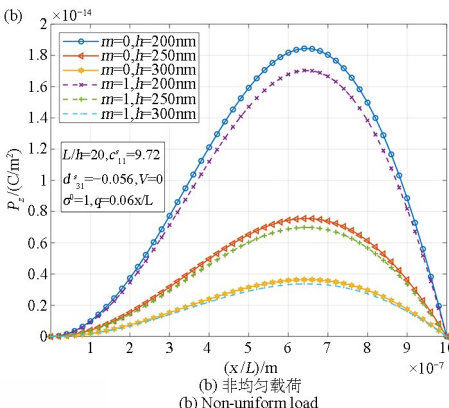
(b) Non-uniform load

图 11 梯度指数和荷载对极化强度的影响

Fig. 11 The effects of gradient index and load on polarization intensity



(a) Uniform load



(b) Non-uniform load

图 12 梯度指数和厚度对极化强度的影响

Fig. 12 Influence of gradient index and thickness on polarization intensity



匀载荷,随着厚度的增大,极化强度随之减小.当梯度指数变大时,厚度对极化强度的影响随之减弱.

6 结论

本文建立了考虑表面效应、高阶电场及 Winkler-Pasternak 线性弹性约束影响的 FGM 压电纳米梁模型,利用哈密尔顿变分原理得到了控制方程和边界条件,利用傅里叶级数展开法得到了挠度、极化强度和电势的表达式.通过对挠度、极化强度、有效抗弯刚度以及电势进行数值分析后,得到了以下结论:

(1)梯度指数、残余应力、Winkler-Pasternak 参数和电压对 FGM 压电纳米梁的挠度有显著影响,而表面弹性常数和表面压电系数对挠度的影响可以忽略不计.

(2)梯度指数越大,抗弯刚度的变化就越显著.表面弹性常数和表面压电系数对抗弯刚度的影响可以忽略不计.

(3)梯度指数、厚度和外部载荷对极化强度和电势的影响很显著;外部电压对极化强度和电势的影响也很显著;电压的方向会影响极化强度和电势的方向,可以利用此结论调整能量收集器的机械能.

(4)当厚度大于 600 nm 时,各种参数对极化强度和电势的影响可以忽略不计.

该研究结果为微纳能量采集器和谐振器的设计和优化提供了理论依据.本文基于考虑挠曲电效应、表面效应以及 Winkler-Pasternak 线性弹性约束影响的 FGM 压电纳米梁模型,只研究了其静态力-电耦合行为,而关于此模型的自由振动等动态问题将在另文研究;另外,本文只考虑了两端简支的边界条件,而关于其他边界条件对 FGM 压电纳米梁屈曲行为影响还需要进一步的研究和讨论.

参考文献

[1] MAJDOUB M S, SHARMA P, CAGIN T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect [J]. *Physical Review B*, 2008, 77(12): 125424.

[2] NGUYEN T D, MAO S, YEH Y W, et al. Nanoscale flexoelectricity [J]. *Advanced Materials*, 2013, 25(7): 946—974.

[3] AHMADPOOR F, SHARMA P. Flexoelectricity in

two-dimensional crystalline and biological membranes [J]. *Nanoscale*, 2015, 7(40): 16555—16570.

[4] KRICHEN S, SHARMA P. Flexoelectricity: a perspective on an unusual electromechanical coupling [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, 83(3): 030801.

[5] CHEN X, TANG X, CHEN X Z, et al. Nonvolatile data storage using mechanical force-induced polarization switching in ferroelectric polymer [J]. *Applied Physics Letters*, 2015, 106(4): 042903.

[6] GUO E J, ROTH R, DAS S, et al. Strain induced low mechanical switching force in ultrathin  $\text{PbZr}_{0.2}\text{Ti}_{0.8}\text{O}_3$  films [J]. *Applied Physics Letters*, 2014, 105(1): 012903.

[7] BHASKAR U K, BANERJEE N, ABDOLLAHI A, et al. A flexoelectric microelectromechanical system on silicon [J]. *Nature Nanotechnology*, 2016, 11(3): 263—266.

[8] JIANG W A, HAN X J, CHEN L Q, et al. Bursting vibration-based energy harvesting [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3043—3060.

[9] YAN D Z, WANG J X, XIANG J W, et al. A flexoelectricity-enabled ultrahigh piezoelectric effect of a polymeric composite foam as a strain-gradient electric generator [J]. *Science Advances*, 2023, 9(2): eadc8845.

[10] JIANG Y D, YAN D Z, WANG J X, et al. The giant flexoelectric effect in a luffa plant-based sponge for green devices and energy harvesters [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2023, 120(40): e2311755120.

[11] MASHKEVICH V S, TOLPYGO K B. Electrical, optical and elastic properties of diamond type crystals [J]. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1957, 5(3): 435—439.

[12] MA W H, CROSS L E. Large flexoelectric polarization in ceramic lead magnesium niobate [J]. *Applied Physics Letters*, 2001, 79(26): 4420.

[13] SHEN S P, HU S L. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2010, 58(5): 665—677.

[14] YAN Z, JIANG L Y. Size-dependent bending and vibration behaviour of piezoelectric nanobeams due to flexoelectricity [J]. *Journal of Physics D: Ap-*

- plied Physics, 2013, 46(35): 355502.
- [15] LIU Z H, WANG P, XU J W. The electro-mechanical coupling responses of functionally graded piezoelectric nanobeams with flexoelectric effect [J]. AIP Advances, 2023, 13(6): 065221.
- [16] XU J W, WANG P, LIU Z H. Electromechanical coupling in piezoelectric nanoplate due to the flexoelectric effect [J]. Acta Mechanica, 2024, 235(1): 479—492.
- [17] WANG P, XU J W, ZHANG X W, et al. Free vibration of nanobeams with surface and dynamic flexoelectric effects [J]. Scientific Reports, 2024, 14(1): 30192.
- [18] XU J W, WANG P, XIAO Z. Dynamic flexoelectric effect on the vibration behavior of piezoelectric nanoplates [J]. Acta Mechanica, 2025, 236(1): 79—89.
- [19] 姜文安, 卞明礼, 陈立群, 等. 簇发振荡能量采集动力学理论研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(8): 1—12.
- JIANG W A, BIAN M L, CHEN L Q, et al. Some advances in the theory of dynamics of bursting oscillation energy harvesting [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(8): 1—12. (in Chinese)
- [20] 朱培, 任兴民, 秦卫阳, 等. 移动车辆桥梁系统中的振动能量获取 [J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(4): 361—369.
- ZHU P, REN X M, QIN W Y, et al. Piezoelectric energy harvesting in moving-vehicle bridge system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(4): 361—369. (in Chinese)
- [21] 马小青, 周生喜. 三稳态风致振动能量俘获系统分析 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(10): 65—71.
- MA X Q, ZHOU S X. Analysis of tristable wind-induced vibration energy harvesting system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(10): 65—71. (in Chinese)
- [22] JIANG W A, CHEN L Q, DING H. Internal resonance in axially loaded beam energy harvesters with an oscillator to enhance the bandwidth [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 85(4): 2507—2520.
- [23] WANG G F, FENG X Q. Effects of surface elasticity and residual surface tension on the natural frequency of microbeams [J]. Applied Physics Letters, 2007, 90(23): 231904.
- [24] HUANG G Y, YU S W. Effect of surface piezoelectricity on the electromechanical behaviour of a piezoelectric ring [J]. Physica Status Solidi (B), 2006, 243(4): 22—24.
- [25] ZHANG M M, ZHOU Z D. Bending and vibration analysis of flexoelectric beam structure on linear elastic substrates [J]. Micromachines, 2022, 13(6): 915.
- [26] LI X F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 318(4/5): 1210—1229.
- [27] ZHAO X, ZHENG S J, LI Z J. Effects of porosity and flexoelectricity on static bending and free vibration of AFG piezoelectric nanobeams [J]. Thin-Walled Structures, 2020, 151: 106754.
- [28] CHU L L, DUI G S, JU C J. Flexoelectric effect on the bending and vibration responses of functionally graded piezoelectric nanobeams based on general modified strain gradient theory [J]. Composite Structures, 2018, 186: 39—49.
- [29] YU P F, LENG W F, PENG L M, et al. The bending and vibration responses of functionally graded piezoelectric nanobeams with dynamic flexoelectric effect [J]. Results in Physics, 2021, 28: 104624.