

# 相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理<sup>\*</sup>

张毅<sup>†</sup>

(苏州科技大学 土木工程学院, 苏州 215011)

**摘要** 研究相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理. 首先, 提出相对加速度的任意阶导数空间的概念, 给出此空间中广义 Gauss 变分的变分规则, 在此基础上从质点相对运动动力学方程出发, 给出双面理想约束系统相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理. 通过定义任意阶广义拘束函数, 给出双面理想约束系统相对运动动力学的任意阶 Gauss 最小拘束原理. 其次, 研究广义坐标下相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理, 给出了原理 Appell 形式、Lagrange 形式和 Nielsen 形式. 然后, 研究了所得原理对非完整力学的应用, 给出了任意阶非完整系统相对运动的 Gauss 最小拘束原理及其广义坐标形式. 最后, 结合具体算例介绍如何利用相对运动的任意阶 Gauss 最小拘束原理建立高阶非完整系统的运动方程.

**关键词** 相对运动动力学, 任意阶 Gauss 原理, 任意阶 Gauss 最小拘束原理, 非完整力学

**中图分类号**: O316

**文献标志码**: A

## The Arbitrary Order Gauss Principle of Relative Motion Dynamics<sup>\*</sup>

Zhang Yi<sup>†</sup>

(School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China)

**Abstract** The arbitrary order Gauss principle of relative motion dynamics is studied. Firstly, the concept of arbitrary order derivative space of relative acceleration is proposed, and the variational rules of generalized Gauss variation in this space are given. On this basis, the arbitrary order Gauss principle for dynamics systems in relative motion with two-sided ideal constraints is given from the kinetic equation of relative motion of particles. By defining the arbitrary order generalized compulsion function, the arbitrary order Gauss least compulsion principle for dynamics systems in relative motion with two-sided ideal constraints is established. Secondly, the arbitrary order Gauss principle of relative motion dynamics in generalized coordinates is studied, and its Appell form, Lagrange form and Nielsen form are given. Thirdly, the application of the obtained principle to nonholonomic mechanics is studied. The Gauss least compulsion principle and its generalized coordinate form for nonholonomic systems of arbitrary order in relative motion are given. Finally, we introduce how to establish the motion equations of higher order nonholonomic systems in relative motion by using the Gauss least compulsion principle of arbitrary order.

**Key words** relative motion dynamics, arbitrary order Gauss principle, arbitrary order Gauss least compulsion principle, nonholonomic mechanics

## 引言

力学系统的运动可在绝对坐标系,也可在动坐标系中研究,在动坐标系中的动力学称为相对运动动力学<sup>[1]</sup>.相对运动动力学理论在工程实际中有着广泛应用前景.如:航天器轨道动力学<sup>[2,3]</sup>、舰载稳定平台<sup>[4]</sup>、岩土工程<sup>[5]</sup>等.用分析力学的理论与方法研究力学系统的相对运动动力学,不仅可在表现形式上达到统一,而且对复杂系统显示出优越性<sup>[5]</sup>.Whittaker研究了受匀速转动约束的完整系统的Lagrange方程<sup>[6]</sup>.1961年,Lur'e给出完整系统的相对运动动力学方程<sup>[7]</sup>.梅凤翔将文献[6,7]的结果推广到非完整系统<sup>[8,9]</sup>.近年来,相对运动动力学的研究取得了重要进展,如:对称性<sup>[10-14]</sup>、稳定性<sup>[15-17]</sup>、Poisson理论和积分方法<sup>[18,19]</sup>、梯度表示<sup>[20]</sup>等.

Gauss原理,又称Gauss最小拘束原理,是分析力学的普遍微分变分原理之一<sup>[21]</sup>.Gauss原理是一个极值原理,即质点系的拘束函数的Gauss变分等于零,其中拘束函数表示真实运动偏离自由运动的一种度量<sup>[22,23]</sup>.利用Gauss最小拘束原理可以直接通过求函数极值的方法获得质点系的运动规律.因此,Gauss原理在工程问题的动力学建模以及近似计算等方面发挥其独特作用<sup>[24]</sup>,例如:机器人动力学<sup>[25]</sup>、多体系统动力学<sup>[26-29]</sup>、超细长弹性杆动力学<sup>[30,31]</sup>以及混合动力学问题<sup>[32]</sup>等.最近,我们研究了Gauss最小拘束原理的若干推广,如变质量力学<sup>[33]</sup>、变加速动力学<sup>[34]</sup>、相对运动动力学<sup>[35]</sup>.

文章将研究相对运动动力学的任意阶Gauss原理,其结构安排如下:第1节,提出相对加速度的任意阶导数空间的概念,定义广义Gauss变分,由此从质点相对运动动力学方程出发,建立相对运动动力学的任意阶Gauss原理.第2节,定义任意阶广义拘束函数,证明相对运动动力学的任意阶Gauss最小拘束原理.第3节,研究广义坐标下任意阶Gauss最小拘束原理,给出原理的Appell形式,Lagrange形式和Nielsen形式.第4节,将所得任意阶Gauss原理应用于非完整力学,给出任意阶非完整系统相对运动动力学的Gauss最小拘束原理.第5节,给出一个具体算例.第6节,文章的结论.

## 1 任意阶Gauss原理

设力学系统由载体和被载体组成.前者是一个刚体,在其上固连了动坐标系 $Ox'y'z'$ ;后者是 $N$ 个质点,由广义坐标 $q_s(s=1,2,\dots,n)$ 描述其相对于动系的位形.动系 $Ox'y'z'$ 的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 以及原点 $O$ 的加速度 $\mathbf{a}_O$ 均为已知函数.第 $i$ 个质点相对运动的动力学方程为<sup>[1]</sup>

$$-m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{N}_i = \mathbf{0} \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (1)$$

其中 $m_i$ 是质量; $\ddot{\mathbf{r}}'_i$ 是相对加速度,即在动系中的位置矢径 $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_i(q_s, t)$ 对时间 $t$ 的二阶相对导数<sup>[36]</sup>; $\mathbf{F}_{ci}^1 = -m_i \mathbf{a}_O - m_i \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_i - m_i \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)$ 为牵连惯性力, $\mathbf{F}_{ci}^1 = -2m_i \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}'_i$ 为科氏惯性力, $\mathbf{F}_i$ 是主动力, $\mathbf{N}_i$ 是约束反力.

用 $\widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m)}$ 表示相对加速度的 $m$ 阶相对导数,由此所张成的空间定义为相对加速度的 $m$ 阶导数空间 $E_r^{(m+2)}$ .此空间中,虚位移记为 $\delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m+2)}$ ,其中 $\delta_{Gm}(\cdot)$ 称为第 $m$ 阶广义Gauss变分,其变分规则为

$$\delta_{Gm} t = 0, \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m-j+1)} = 0, \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m+2)} \neq 0 \quad (m=0,1,2,\dots;j=0,1,\dots,m+1) \quad (2)$$

由方程(1),可得

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{N}_i) \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m+2)} = 0 \quad (3)$$

在 $E_r^{(m+2)}$ 空间,理想约束条件给出

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{N}_i \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m+2)} = 0 \quad (4)$$

于是,式(3)给出

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i^{(m+2)} = 0 \quad (5)$$

式(5)为相对运动动力学的任意阶Gauss原理.当 $m=0$ 时,原理(5)成为

$$\sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ci}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_G \ddot{\mathbf{r}}'_i = 0 \quad (6)$$

式(6)是经典意义下相对运动动力学的Gauss原理<sup>[35]</sup>.

## 2 任意阶Gauss最小拘束原理

定义

$$Z_{rm} = \frac{d^m}{dt^m} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \ddot{\mathbf{r}}'_i - \frac{\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1}{m_i} \right)^2 \right\} \quad (7)$$

为相对运动动力学的任意阶广义拘束函数,其中 $(\ddot{\bullet})$ 表示求相对导数<sup>[34]</sup>. 展开式(7),得到

$$Z_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i + \cdots & \text{for } m=0 \\ \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i + \cdots & \text{for } m=1,2,\cdots \end{cases} \quad (8)$$

其中,省略号“...”表示与 $\widetilde{\mathbf{r}}'_i$ 无关的项.

计算第  $m$  阶广义 Gauss 变分,得到

$$\delta_{Gm} Z_{rm} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i \quad (9)$$

于是原理(6)成为

$$\delta_{Gm} Z_{rm} = 0 \quad (10)$$

假设在  $E_r^{(m+2)}$  空间中, $\widetilde{\mathbf{r}}'_i$  是质点真实运动的

相对加速度,而 $\widetilde{\mathbf{r}}'_i + \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i$  是约束允许的可能运动的相对加速度,则它们的广义拘束函数之差 $\Delta Z_{rm}$  计算如下:当  $m=0$  时,有

$$\begin{aligned} \Delta Z_{rm} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\ddot{\mathbf{r}}'_i + \delta_G \ddot{\mathbf{r}}'_i)^2 - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot (\ddot{\mathbf{r}}'_i + \delta_G \ddot{\mathbf{r}}'_i) - \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\delta_G \ddot{\mathbf{r}}'_i)^2 > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

当  $m \geq 1$  时,有

$$\begin{aligned} \Delta Z_{rm} &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot (\widetilde{\mathbf{r}}'_i + \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i) - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot (\widetilde{\mathbf{r}}'_i + \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i) - \\ &\quad \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

因此,式(10)表明:对于具有双面理想约束的力学系统,在每一瞬时, $E_r^{(m+2)}$  空间中所有与约束相容的可能运动的相对加速度之中,真实运动的相对加速度使广义拘束函数  $Z_{rm}$  在第  $m$  阶广义 Gauss 变分下取得极值.

式(10)可称为相对运动动力学的任意阶

Gauss 最小拘束原理.

如果  $m=0$ ,则原理(10)成为经典意义下相对运动的 Gauss 最小拘束原理<sup>[35]</sup>.

如果  $m=0$ ,且  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ ,则原理(10)退化为经典意义下绝对运动的 Gauss 最小拘束原理<sup>[21]</sup>.

### 3 广义坐标下任意阶 Gauss 原理

将矢径  $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}'_i(q_s, t)$  对时间求  $(m+2)$  阶相对导数,得到

$$\widetilde{\mathbf{r}}'_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} q_s^{(m+2)} + \cdots \quad (13)$$

则有

$$\delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i = \sum_{s=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \delta_{Gm} q_s^{(m+2)} \quad (14)$$

引入相对运动的加速度能量

$$S_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}'_i \quad (15)$$

对时间求  $m$  阶导数,  $m \geq 1$ , 得

$$S_r^{(m)} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i + \cdots \quad (16)$$

则广义拘束函数(8)可表示为

$$Z_{rm} = S_r^{(m)} - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i + \cdots \quad (m=0,1,2,\cdots) \quad (17)$$

对式(17)求广义 Gauss 变分,得

$$\delta_{Gm} Z_{rm} = \delta_{Gm} S_r^{(m)} - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm} \widetilde{\mathbf{r}}'_i \quad (18)$$

注意到

$$\delta_{Gm} S_r^{(m)} = \sum_{s=1}^n \frac{\partial S_r^{(m)}}{\partial q_s^{(m+2)}} \delta_{Gm} q_s^{(m+2)} \quad (19)$$

由式(16),得

$$\frac{\partial S_r^{(m)}}{\partial q_s^{(m+2)}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \frac{\partial \widetilde{\mathbf{r}}'_i}{\partial q_s^{(m+2)}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \quad (20)$$

因此有

$$\delta_{Gm} S_r = \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{r}}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s \quad (21)$$

又易知

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm}^{(\widetilde{m+2})} \mathbf{r}'_i \\ &= \sum_{s=1}^n \left[ Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^\omega) + Q_s^\dot + \Gamma_s \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $Q_s$  为广义力,有

$$Q_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \quad (23)$$

$\Pi^o$  为均匀力场势能,有

$$\Pi^o = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{r}'_i = M \mathbf{a}_o \cdot \mathbf{r}'_c \quad (24)$$

$\Pi^\omega$  为离心力势能,有

$$\begin{aligned} \Pi^\omega &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)] \cdot \mathbf{r}'_i \\ &= -\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\theta}^o \cdot \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (25)$$

$Q_s^\dot$  为广义旋转惯性力,有

$$Q_s^\dot = - \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \quad (26)$$

$\Gamma_s$  为广义陀螺力,有

$$\Gamma_s = - \sum_{i=1}^N 2m_i (\boldsymbol{\omega} \times \widetilde{\mathbf{r}}'_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} \quad (27)$$

式(25)中  $\boldsymbol{\theta}^o = \sum_{i=1}^N m_i [(r'_i)^2 \mathbf{E} - \mathbf{r}'_i \mathbf{r}'_i]$  为惯性张量<sup>[1]</sup>.

将式(19)和(22)代入式(18),得

$$\begin{aligned} \delta_{Gm} Z_{rm} &= \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial S_r}{\partial^{(m+2)} q_s} - Q_s + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^\omega) - Q_s^\dot - \Gamma_s \right] \cdot \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s \end{aligned} \quad (28)$$

于是,原理(10)可表为

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial S_r}{\partial^{(m+2)} q_s} - Q_s + \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^\omega) - Q_s^\dot - \Gamma_s \right] \cdot \\ & \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

式(29)称为广义坐标下相对运动的任意阶 Gauss 原理的 Appell 形式.

容易证明

$$\sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{r}}'_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}'_i}{\partial q_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial^{(m+2)} q_s} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s}$$

$$= (m+2) \frac{\partial}{\partial^{(m+2)} q_s} \frac{d}{dt} T_r^{(m+1)} - (m+3) \frac{\partial T_r^{(m+1)}}{\partial^{(m+1)} q_s} \quad (30)$$

其中  $T_r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \widetilde{\mathbf{r}}'_i \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i$  为相对运动动能,则原理

(10)又可表示为 Lagrange 形式

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial^{(m+2)} q_s} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s} - Q_s + \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^\omega) - Q_s^\dot - \Gamma_s \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Nielsen 形式

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^n \left[ (m+2) \frac{\partial}{\partial^{(m+2)} q_s} \frac{d}{dt} T_r^{(m+1)} - (m+3) \frac{\partial T_r^{(m+1)}}{\partial^{(m+1)} q_s} - \right. \\ & \quad \left. Q_s + \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^\omega) - Q_s^\dot - \Gamma_s \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

## 4 对非完整力学的推广

假设系统受到  $g$  个理想  $(m+2)$  阶非完整约束

$$\begin{aligned} \varphi_\beta^{(m+2)} &= \varphi_\beta(q_s, \dot{q}_s, \dots, q_s^{(m+2)}, t) = 0 \\ &(\beta = 1, 2, \dots, g) \end{aligned} \quad (33)$$

它们加在  $E_r^{(m+2)}$  空间的虚位移  $\delta_{Gm}^{(m+2)} q_s$  上的限制条件为

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial \varphi_\beta^{(m+2)}}{\partial^{(m+2)} q_s} \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \quad (34)$$

构造函数

$$Z_{\varphi m} = Z_{rm} - \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \varphi_\beta^{(m+2)} \quad (35)$$

其中  $\lambda_\beta = \lambda_\beta(q_s, \dot{q}_s, \dots, q_s^{(m+1)}, t)$  是 Lagrange 乘子.

显然,在  $E_r^{(m+2)}$  空间,有  $\delta_{Gm} \lambda_\beta = 0$ .

将式(17)代入式(35),有

$$\begin{aligned} Z_{\varphi m} &= S_r - \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \widetilde{\mathbf{r}}'_i - \\ & \sum_{\beta=1}^g \lambda_\beta \varphi_\beta^{(m+2)} + \dots \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (36)$$

式(36)可称为任意阶非完整系统相对运动的广义拘束函数.

对式(36)计算广义 Gauss 变分,得到

$$\begin{aligned} \delta_{Gm} Z_{\varphi m} &= \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{r}}'_i \cdot \delta_{Gm}^{(\widetilde{m+2})} \mathbf{r}'_i - \\ & \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{ei}^1 + \mathbf{F}_{ci}^1) \cdot \delta_{Gm}^{(\widetilde{m+2})} \mathbf{r}'_i - \end{aligned}$$

$$\sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \sum_{s=1}^n \frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m+2)}}{\partial q_s^{(m+2)}} \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s \quad (37)$$

将式(10)和式(34)代入式(37),得

$$\delta_{Gm} Z_{\varphi m} = 0 \quad (38)$$

式(38)可称为任意阶非完整系统相对运动的 Gauss 最小拘束原理。

类似地,原理(38)可表示为 Appell 形式

$$\sum_{s=1}^n \left[ \frac{\partial S_r}{\partial q_s^{(m+2)}} - Q_s + \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^w) - \right. \\ \left. Q_s^{\dot{}} - \Gamma_s - \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m+2)}}{\partial q_s^{(m+2)}} \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \quad (39)$$

Lagrange 形式

$$\sum_{s=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial q_s^{(m+2)}} - \frac{\partial T_r}{\partial q_s} - Q_s + \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^w) - \right. \\ \left. Q_s^{\dot{}} - \Gamma_s - \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m+2)}}{\partial q_s^{(m+2)}} \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \quad (40)$$

Nielsen 形式

$$\sum_{s=1}^n \left[ (m+2) \frac{\partial}{\partial q_s^{(m+2)}} \frac{d}{dt} T_r - (m+3) \frac{\partial T_r}{\partial q_s^{(m+1)}} - \right. \\ \left. Q_s + \frac{\partial}{\partial q_s} (\Pi^o + \Pi^w) - Q_s^{\dot{}} - \right. \\ \left. \Gamma_s - \sum_{\beta=1}^g \lambda_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}^{(m+2)}}{\partial q_s^{(m+2)}} \right] \delta_{Gm}^{(m+2)} q_s = 0 \quad (41)$$

## 5 算例

例 1 质量为  $M$  的质点在某平面上运动,而平面以极其缓慢的角速度  $\omega$  绕与其垂直的中心轴作匀速转动<sup>[37]</sup>. 设质点相对于转动平面的运动用广义坐标  $q_1$  和  $q_2$  来确定,且受非完整约束<sup>[38]</sup>

$$\varphi^{(3)} = \ddot{q}_1^{(3)} + g \ddot{q}_2^{(3)} = 0 \quad (42)$$

而质点相对运动的加速度能量为

$$S_r = \frac{1}{2} M (\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2) \quad (43)$$

试用 Gauss 最小拘束原理建立系统相对运动的动力学方程。

解: 由题设,载体作定轴转动,  $\mathbf{a}_o = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  是常矢量,质点的相对矢径为  $\mathbf{r}' = q_1 \mathbf{i}' + q_2 \mathbf{j}'$ , 设主动力  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}' + F_2 \mathbf{j}'$ , 其中  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  是沿动系  $Ox'y'z'$  三个坐标轴的单位矢量. 则相对速度为

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{q}_1 \mathbf{i}' + \dot{q}_2 \mathbf{j}' \quad (44)$$

牵连惯性力为

$$\mathbf{F}_e^1 = -M \mathbf{a}_o - M \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' - M \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \\ = M \omega^2 (q_1 \mathbf{i}' + q_2 \mathbf{j}') \quad (45)$$

科氏惯性力为

$$\mathbf{F}_c^1 = -2M \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}' = 2M \omega (\dot{q}_2 \mathbf{i}' - \dot{q}_1 \mathbf{j}') \quad (46)$$

由式(35), 广义拘束函数  $Z_{\varphi 1}$  为

$$Z_{\varphi 1} = \frac{dS_r}{dt} - (\mathbf{F} + \mathbf{F}_e^1 + \mathbf{F}_c^1) \cdot \dot{\mathbf{r}}' - \lambda \varphi^{(3)} + \dots \quad (47)$$

将式(43)、式(45)、式(46)和约束方程(42)代入式(47),得

$$Z_{\varphi 1} = M \ddot{q}_1^{(3)} + M \ddot{q}_2^{(3)} - (F_1 + M \omega^2 q_1 + \\ 2M \omega \dot{q}_2) \dot{q}_1^{(3)} - (F_2 + M \omega^2 q_2 - 2M \omega \dot{q}_1) \dot{q}_2^{(3)} - \\ \lambda (\ddot{q}_1^{(3)} + g \ddot{q}_2^{(3)}) + \dots \quad (48)$$

计算 1 阶广义 Gauss 变分,并令其等于 0,得到

$$\delta_{G1} Z_{\varphi 1} = [M \ddot{q}_1 - (F_1 + M \omega^2 q_1 + 2M \omega \dot{q}_2) - \\ \lambda \ddot{q}_1] \delta_{G1} \dot{q}_1^{(3)} + [M \ddot{q}_2 - (F_2 + M \omega^2 q_2 - \\ 2M \omega \dot{q}_1) - \lambda g] \delta_{G1} \dot{q}_2^{(3)} = 0 \quad (49)$$

由 Lagrange 乘子法,从式(49)得

$$M \ddot{q}_1 - (F_1 + M \omega^2 q_1 + 2M \omega \dot{q}_2) - \lambda \ddot{q}_1 = 0 \\ M \ddot{q}_2 - (F_2 + M \omega^2 q_2 - 2M \omega \dot{q}_1) - \lambda g = 0 \quad (50)$$

由方程(42)和方程(50)可解出系统的运动。

原理式(49)也可利用式(39)建立. 由式(23),得

$$Q_1 = F_1, \quad Q_2 = F_2 \quad (51)$$

由式(24)和式(26),得

$$\Pi^o = Q_1^{\dot{}} = Q_2^{\dot{}} = 0 \quad (52)$$

而离心力势能(25),给出

$$\Pi^w = -\frac{1}{2} M \omega^2 (q_1^2 + q_2^2) \quad (53)$$

广义陀螺力为

$$\Gamma_1 = 2M \omega \dot{q}_2, \quad \Gamma_2 = -2M \omega \dot{q}_1 \quad (54)$$

将式(42)、式(43)、式(51)~(54)代入式(39),可以得到

$$(M \ddot{q}_1 - F_1 - M \omega^2 q_1 - 2M \omega \dot{q}_2 - \lambda \ddot{q}_1) \delta_{G1} \dot{q}_1^{(3)} + \\ (M \ddot{q}_2 - F_2 - M \omega^2 q_2 + 2M \omega \dot{q}_1 - \lambda g) \delta_{G1} \dot{q}_2^{(3)} \\ = 0 \quad (55)$$

这是所论三阶非完整系统相对运动的 Gauss 最小拘束原理。

## 6 结论

利用分析力学方法研究复杂系统的相对运动

动力学不仅具有表现形式上的统一性,而且显示出分析力学在解决复杂系统动力学问题上的优越性.不同于 d'Alembert-Lagrange 原理和 Jourdain 原理, Gauss 原理是极值原理,由此可直接获得质点系的运动.文章的主要贡献:

(1) 提出了相对加速度的  $m$  阶导数空间  $E_r^{(m+2)}$  和广义 Gauss 变分的概念,建立了相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理及其最小拘束原理.定义相对运动动力学的广义拘束函数,证明了在  $E_r^{(m+2)}$  空间中质点的真实运动使广义拘束函数在广义 Gauss 变分下取得极值.

(2) 导出了相对运动动力学的任意阶 Gauss 原理的广义坐标形式.通过引入相对运动的加速度能量,给出了广义拘束函数的显形式,建立了三类任意阶 Gauss 原理,即 Appell-Lagrange 和 Nielsen 类型.

(3) 研究了最小拘束原理对任意阶非完整约束系统的应用.引进 Lagrange 乘子,将非完整约束嵌入广义拘束函数之中,利用  $E_r^{(m+2)}$  空间中非完整约束对虚位移的限制条件,建立了任意阶非完整系统相对运动的 Gauss 最小拘束原理.

参考文献

[1] 梅凤翔. 分析力学专题[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988.  
MEI F X. Analytical mechanical special problem [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1988. (in Chinese)

[2] 孔宪仁, 武晨, 刘源, 等. 无扰载荷航天器相对运动动力学建模[J]. 宇航学报, 2017, 38(11): 1139—1146.  
KONG X R, WU C, LIU Y, et al. Dynamic modeling of relative motion for disturbance-free-pay-load spacecraft [J]. Journal of Astronautics, 2017, 38(11): 1139—1146. (in Chinese)

[3] 王伟林, 宋旭民, 柴华, 等. 航天器相对运动动力学教学研究与实践[J]. 力学与实践, 2022, 44(2): 434—442.  
WANG W L, SONG X M, CHAI H, et al. Teaching research and study for spacecraft relative motion dynamics [J]. Mechanics in Engineering, 2022, 44(2): 434—442. (in Chinese)

[4] 仇伟哈, 牛安琪, 王生海, 等. 非惯性系下舰载稳定

平台动力学建模与分析[J]. 振动与冲击, 2024, 43(9): 186—194.

QIU W H, NIU A Q, WANG S H, et al. Dynamic modeling and analysis of shipborne stable platforms in non-inertial system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2024, 43(9): 186—194. (in Chinese)

[5] 凌道盛, 施昌宇, 郑建靖, 等. 离心模型试验物质运动非惯性系效应[J]. 岩土工程学报, 2021, 43(2): 226—235.

LING D S, SHI C Y, ZHENG J J, et al. Non-inertial effects on matter motion in centrifugal model tests [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2021, 43(2): 226—235. (in Chinese)

[6] WHITTAKER E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies [M]. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[7] LUR'E A I. Analytical mechanics [M]. Moscow: GIFML, 1961. (in Russian)

[8] 梅凤翔. 非完整系统力学基础[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1985.

MEI F X. Foundations of mechanics of nonholonomic systems [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1985. (in Chinese)

[9] 梅凤翔, 刘桂林. 非线性非完整力学系统的相对运动动力学[J]. 北京工业学院学报, 1986, 6(1): 24—42.

MEI F X, LIU G L. Dynamics of the relative motion of non-linear non-holonomic mechanical systems [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 1986, 6(1): 24—42. (in Chinese)

[10] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.

MEI F X. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Institute of Technology Press, 2004. (in Chinese)

[11] 梅凤翔, 吴惠彬. 相对运动动力学系统的 Lagrange 对称性[J]. 物理学报, 2009, 58(9): 5919—5922.

MEI F X, WU H B. Lagrange symmetry for a dynamical system of relative motion [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(9): 5919—5922. (in Chinese)

[12] WANG X X, HAN Y L, ZHANG M L, et al. Lie symmetry and its generation of conserved quantity of Appell equation in a dynamical system of the relative motion with Chetaev-type nonholonomic constraints [J]. Chinese Physics B, 2013, 22(2): 020201.

[13] 贾利群, 孙现亭, 张美玲, 等. 相对运动变质量力学系统 Appell 方程的广义 Lie 对称性导致的广义 Ho-



- jman 守恒量[J]. 物理学报, 2014, 63(1): 010201.
- JIA L Q, SUN X T, ZHANG M L, et al. Generalized Hojman conserved quantity deduced from generalized Lie symmetry of Appell equations for a variable mass mechanical system in relative motion [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(1): 010201. (in Chinese)
- [14] GONG S N, GAO H F, FU J L. Lie symmetries of the relative motion systems on time scales [J]. Indian Journal of Physics, 2020, 94(3): 371–377.
- [15] 张毅. 恰普雷金系统相对运动的稳定性[J]. 兵工学报, 2010, 31(1): 58–62.
- ZHANG Y. Stability of relative motion for Chaplygin's systems [J]. Acta Armamentarii, 2010, 31(1): 58–62. (in Chinese)
- [16] ZHANG Y. Stability of manifold of equilibrium states for nonholonomic systems in relative motion [J]. Chinese Physics Letters, 2009, 26(12): 120305.
- [17] 张毅. 非完整力学系统相对运动的稳定性[J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(2): 105–108.
- ZHANG Y. Stability of relative motion for mechanical systems with nonholonomic constraints [J]. Journal of Dynamics and Control, 2010, 8(2): 105–108. (in Chinese)
- [18] ZHANG Y, SHANG M. Poisson theory and integration method for a dynamical system of relative motion [J]. Chinese Physics B, 2011, 20(2): 024501.
- [19] CHEN X W, LUO S K. Integration method for the dynamics equation of relative motion of variable mass nonlinear nonholonomic system [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1998, 19(5): 479–488.
- [20] 梅凤翔, 吴惠彬. 约束力学系统的梯度表示[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- MEI F X, WU H B. Gradient representations of constrained mechanical systems [M]. Beijing: Science Press, 2016. (in Chinese)
- [21] 梅凤翔, 吴惠彬, 李彦敏. 分析力学史略[M]. 北京: 科学出版社, 2019.
- MEI F X, WU H B, LI Y M. A brief history of analytical mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2019. (in Chinese)
- [22] 陈滨. 分析动力学(下卷)[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2012.
- CHEN B. Analytical dynamics (II) [M]. 2nd ed. Beijing: Peking University Press, 2012. (in Chinese)
- [23] 梅凤翔. 分析力学[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2013.
- MEI F X. Analytical mechanics[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2013. (in Chinese)
- [24] UDWADIA F E, KALABA R E. Analytical dynamics-a new approach [M]. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [25] 波波夫. 操作机器人动力学与算法[M]. 遇立基, 陈循介译. 北京: 机械工业出版社, 1983.
- Попов Е П. Operating robot dynamics and algorithm [M]. YU L J, CHEN X J, trans. Beijing: Mechanical Industry Press, 1983. (in Chinese)
- [26] 刘延柱. 杆网系统基于高斯原理的动力学建模[M]. 动力学与控制学报, 2018, 16(4): 289–294.
- LIU Y Z. Dynamic modeling of net system of rods based on Gauss's principle [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(4): 289–294. (in Chinese)
- [27] YAO W L, YANG L S, SONG K W, et al. Optimization method for dynamics of non-holonomic system based on Gauss's principle [J]. Acta Mechanica Sinica, 2020, 36(5): 1133–1141.
- [28] YAO W L, YANG L S, GUO M M. Gauss optimization method for the dynamics of unilateral contact of rigid multibody systems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2021, 37(3): 494–506.
- [29] ORSINO R M M. Extended constraint enforcement formulations for finite-DOF systems based on Gauss's principle of least constraint [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(4): 2577–2597.
- [30] 薛纭, 翁德玮. 超细长弹性杆动力学的 Gauss 原理[J]. 物理学报, 2009, 58(1): 34–39.
- XUE Y, WENG D W. Gauss principle for a super-thin elastic rod dynamics [J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(1): 34–39. (in Chinese)
- [31] 薛纭, 曲佳乐, 陈立群. Cosserat 生长弹性杆动力学的 Gauss 最小约束原理[J]. 应用数学和力学, 2015, 36(7): 700–709.
- XUE Y, QU J L, CHEN L Q. Gauss principle of least constraint for Cosserat growing elastic rod dynamics [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2015, 36(7): 700–709. (in Chinese)
- [32] 杰格日达, 索尔塔哈诺夫, 尤士科夫. 非完整系统的运动方程和力学的变分原理: 新一类控制问题[M]. 梅凤翔译. 北京: 北京理工大学出版社, 2007.
- ЗЕГЖДА С А, СОЛТАХАНОВ Ш Х, ЮШКОВ М

II. Equations of motion for nonholonomic systems and variational principles of mechanics: a new class of control problems [M]. MEI F X trans. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2007. (in Chinese)

[33] 张毅, 陈欣雨. 变质量力学系统的广义高斯原理及其对高阶非完整系统的推广[J]. 力学学报, 2022, 54(10): 2883—2891.

ZHANG Y, CHEN X Y. The generalized Gauss principle for mechanical system with variable mass and its generalization to higher order nonholonomic systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(10): 2883—2891. (in Chinese)

[34] 张毅, 宋传静, 翟相华. 变加速动力学系统的广义高斯最小约束原理 [J]. 力学学报, 2023, 55(5): 1174—1180.

ZHANG Y, SONG C J, ZHAI X H. Generalized Gauss principle of least compulsion for variable acceleration dynamical systems [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(5): 1174—1180. (in Chinese)

[35] ZHANG Y, XIA J L. Gauss principle of least compulsion for relative motion dynamics and differential equations of motion [J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2024, 29(3): 273—283.

[36] 朱照宣, 周起钊, 殷金生. 理论力学(上册) [M]. 北京: 北京大学出版社, 1982.

ZHU Z X, ZHOU Q Z, YIN J S. Theoretical mechanics ( I ) [M]. Beijing: Peking University Press, 1982. (in Chinese)

[37] 梅凤翔. 非完整系统相对运动动力学方程的一种积分方法[J]. 黄淮学刊, 1992, 8(1): 1—7.

MEI F X. An integral method for dynamic equations of relative motion of nonholonomic systems [J]. Huanghuai Journal, 1992, 8(1): 1—7. (in Chinese)

[38] 张毅. 高阶非线性非完整系统相对运动动力学方程的积分方法[J]. 北京理工大学学报, 1996, 16(增刊 1): 36—40.

ZHANG Y. A method of integration for the dynamics equations of relative motion of higher-order nonlinear nonholonomic systems [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 1996, 16(S1): 36—40. (in Chinese)