

非自治广义 Birkhoff 系统三重组合梯度表示 及其稳定性分析^{*}

陈柯慕¹ 谢煜^{2†}

(1. 苏州科技大学 数学与科学学院, 苏州 215009)

(2. 商丘师范学院 电子电气工程学院, 商丘 476000)

摘要 本文提出了一种基于三重组合梯度系统的非自治广义 Birkhoff 系统稳定性判定新方法. 首先, 系统讨论四类梯度系统与三重组合梯度系统的微分方程及其基本性质; 其次, 针对非自治广义 Birkhoff 系统的运动微分方程, 提出基于矩阵组合的四类三重组合梯度表示方法. 在此基础上, 可通过给定的矩阵组合, 直接用对应的三重组合梯度表示方程求解 Lyapunov 函数, 从而简化稳定性的判定过程. 与现有方法相比, 所提方法显著降低了 Lyapunov 函数构造的难度, 为研究非自治广义 Birkhoff 系统稳定性提供了有效工具. 最后, 通过典型算例的稳定性研究和数值模拟验证了所提方法的有效性和准确性.

关键词 非自治广义 Birkhoff 系统, 三重组合梯度系统, 稳定性

中图分类号: O316

文献标志码: A

Triple Composite Gradient Representation and Stability Analysis of Non-Autonomous Generalized Birkhoff Systems^{*}

Chen Kemu¹ Xie Yu^{2†}

(1. School of Mathematics and Sciences, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China)

(2. School of Electronic and Electrical Engineering, Shangqiu Normal University, Shangqiu 476000, China)

Abstract This paper proposes a novel stability criterion for non-autonomous generalized Birkhoff systems based on triple combined gradient system framework. Firstly, the differential equations and fundamental properties of four distinct gradient systems and their corresponding triple combined gradient systems are systematically discussed. Secondly, for the governing differential equations of non-autonomous generalized Birkhoff systems, a representation method based on matrix combinations is proposed, establishing four different forms of triple combined gradient representations. On this basis, the Lyapunov function can be directly derived from the corresponding triple combined gradient representation equations via given matrix combinations, thereby simplifying the stability determination process. Compared with existing methods, the proposed approach significantly reduces the difficulty associated with constructing Lyapunov functions, providing an effective tool for studying the stability of non-autonomous generalized Birkhoff systems. Finally, the validity and accuracy of the proposed method are verified through stability analysis and numerical simulations of representative examples.

Key words non-autonomous generalized Birkhoff system, triple combined gradient system, stability

引言

1927年, Birkhoff在《动力学系统》中提出了一种更为普遍的动力学方程^[1], 随后, 美国物理学家 Santilli在1978年的著作中将其命名为 Birkhoff方程, 并将其推广至非自治、非保守系统^[2,3]. 此后, 我国数学力学专家梅凤翔教授进一步完善了该理论, 建立了广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架^[4-8]. 近年来, Birkhoff 系统动力学的研究取得了显著进展^[9-13].

在 Birkhoff 系统的设计与优化中, 稳定性分析是确保其可靠运行的理论依据. 梯度系统是研究微分方程和动力学系统的重要工具, 它避免了直接构造 Lyapunov 函数的困难, 是研究约束力学系统稳定性的一种有效方法. 若一个力学系统可化为梯度系统, 则可由梯度系统的特性来研究系统的稳定性^[14,15]. 文献[16-23]利用梯度系统方法对 Birkhoff 系统和广义 Birkhoff 系统的稳定性进行了研究. 组合梯度系统是由几类基本梯度系统组合起来构成的, 更适合研究复杂力学系统的动力学性质, 但目前对于组合梯度系统方面的研究较少. 梅凤翔、吴惠彬等给出6类组合梯度系统的定义和微分方程, 并利用组合梯度方法研究广义 Birkhoff 系统和非自治 Birkhoff 系统的稳定性^[24-27]. 王嘉航、董孟峰等给出4类三重组合梯度系统的定义和微分方程, 借助三重组合梯度系统研究广义 Birkhoff 系统的稳定性^[28,29].

本文首次将三重组合梯度系统方法引入非自治广义 Birkhoff 系统的稳定性分析中, 创新性地采用矩阵组合来描述系统的四类三重组合梯度方程. 基于这一方法, 通过识别给定矩阵组合的类型, 即可构造相应的 Lyapunov 函数, 从而有效研究非自治广义 Birkhoff 系统零解的稳定性问题. 为验证理论结果的正确性, 文中给出了具体算例并辅以数值模拟进行验证.

1 梯度系统

1.1 四类基本梯度系统

对于微分方程^[14]

$$\dot{x}_i = \mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X}) \frac{\partial V(\mathbf{X})}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $V = V(\mathbf{X})$ 称为势函数, 这

里及以后同一项中相同的活动指标表示对其求和.

若函数 V 是系统(1)的一个 Lyapunov 函数, 有

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (2)$$

则系统的稳定性可由函数 V 与 $\dot{V}$ 判定^[30], 其关系如下表所示:

表1 系统稳定性的判定方法
Table 1 Methods for determining system stability

$V = V(\mathbf{X})$	$\dot{V} = \dot{V}(\mathbf{X})$	系统稳定性
正定	半负定	稳定
正定且具有无穷小上界	半负定	一致稳定
正定且具有无穷小上界	负定	一致渐近稳定

其中, 若 $V(\mathbf{X})$ 具有无穷小上界, 则有正定函数 $W(\mathbf{X})$, 使得 $|V(\mathbf{X})| \leq W(\mathbf{X})$

定义1 若矩阵 $[\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X})]$ 为负单位矩阵, 则微分方程(1)可化为通常梯度系统的微分方程:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

此时, 根据式(2)可知

$$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (4)$$

定义2 若矩阵 $[\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X})] = [\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{X})]$, 且矩阵 $[\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{X})]$ 是反对称的, 即有 $\mathbf{b}_{ij} = -\mathbf{b}_{ji}$, 则微分方程(1)可化为斜梯度系统的微分方程:

$$\dot{x}_i = \mathbf{b}_{ij}(\mathbf{X}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

此时, 根据式(2)可知

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{b}_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (6)$$

因 $(\mathbf{b}_{ij})$ 为反对称矩阵, 由其性质

$$\mathbf{X}(\mathbf{b}_{ij})\mathbf{X}^T = 0 \quad (7)$$

则有

$$\dot{V} = 0$$

定义3 若矩阵 $[\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X})] = [\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{X})]$, 且矩阵 $[\mathbf{S}_{ij}(\mathbf{X})]$ 为对称负定的, 则微分方程(1)可化为具有对称负定矩阵的梯度系统的微分方程:

$$\dot{x}_i = \mathbf{S}_{ij}(\mathbf{X}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

此时, 根据式(2)可知

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} \mathbf{S}_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (9)$$

定义4 若矩阵 $[\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{X})] = [\mathbf{a}_{ij}(\mathbf{X})]$, 且矩阵

$[a_{ij}(\mathbf{X})]$ 为半负定的, 则微分方程(1)可化为具有半负定矩阵的梯度系统的微分方程:

$$\dot{x}_i = a_{ij}(\mathbf{X}) \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (10)$$

此时, 根据式(2)可知

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (11)$$

由上面定义可将四类基本梯度系统对应的矩阵及 $\dot{V}$ 的形式总结成表 2.

表 2 四类基本梯度系统
Table 2 Four basic gradient systems

序号	名称	$[h_{ij}(\mathbf{X})]$ 矩阵	$\dot{V}$
1	通常梯度系统	负单位阵	$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i}$
2	斜梯度系统	反对称阵 $[b_{ij}(\mathbf{X})]$	$\dot{V} = 0$
3	具有对称负定矩阵的梯度系统	对称负定阵 $[S_{ij}(\mathbf{X})]$	$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}$
4	具有半负定矩阵的梯度系统	半负定阵 $[a_{ij}(\mathbf{X})]$	$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j}$

1.2 四类三重组合梯度系统及其性质

对于微分方程^[28, 29]

$$\dot{x}_i = h_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + k_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + f_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (12)$$

其中 $h_{ij} = h_{ij}(\mathbf{X}), k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{X}), f_{ij} = f_{ij}(\mathbf{X})$.

若函数 V 是 Lyapunov 函数, 由式(2)可知

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} h_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} f_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (13)$$

由函数 V 与 $\dot{V}$, 参照表 1 求出可确定系统的稳定性.

定义 5 若矩阵 (h_{ij}) 为负单位矩阵, 矩阵 $(k_{ij}) = (S_{ij})$ 为对称负定矩阵, 矩阵 $(f_{ij}) = (b_{ij})$ 为反对称矩阵, 则微分方程(12)可化为三重组合梯度系统 I:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (14)$$

其中 $(S_{ij}) = [S_{ij}(\mathbf{X})], (b_{ij}) = [b_{ij}(\mathbf{X})]$.

由式(13)与式(7)可求 $\dot{V}$ 为

$$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (15)$$

定义 6 若矩阵 (h_{ij}) 为负单位矩阵, 矩阵 $(k_{ij}) =$

(b_{ij}) 为反对称矩阵, 矩阵 $(f_{ij}) = (a_{ij})$ 为半负定矩阵, 则微分方程(12)可化为三重组合梯度系 II:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (16)$$

其中 $(a_{ij}) = [a_{ij}(\mathbf{X})]$.

由式(13)与式(7)可求 $\dot{V}$ 为

$$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (17)$$

定义 7 若矩阵 (h_{ij}) 为负单位矩阵, 矩阵 $(k_{ij}) = (S_{ij})$ 为对称负定矩阵, 矩阵 $(f_{ij}) = (a_{ij})$ 为半负定矩阵, 则微分方程(12)可化为三重组合梯度系 III:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (18)$$

由式(13)可求 $\dot{V}$ 为

$$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (19)$$

定义 8 若矩阵 $(h_{ij}) = (b_{ij})$ 为反对称矩阵, 矩阵 $(k_{ij}) = (S_{ij})$ 为对称负定矩阵, 矩阵 $(f_{ij}) = (a_{ij})$ 为半负定矩阵, 则微分方程(12)可化为三重组合梯度系 IV:

$$\dot{x}_i = b_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

由式(13)与式(7)可求 $\dot{V}$ 为

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_i} S_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (21)$$

2 非自治广义 Birkhoff 系统的三重组合梯度表示

对于广义 Birkhoff 方程^[7]

$$\Omega_{\mu} \dot{a}^{\nu} - \left[\frac{\partial B(t, \mathbf{a})}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial R_{\mu}(t, \mathbf{a})}{\partial t} \right] + \Lambda_{\mu}(t, \mathbf{a}) = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (22)$$

其中 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \dots, a^{2n}), a^{\mu}$ 为变量, t 为时间, $R_{\mu} = [R_{\mu}(t, \mathbf{a})]$ 为 Birkhoff 函数组, $B = B(t, \mathbf{a})$ 称为 Birkhoff 函数, $\Lambda_{\mu} = \Lambda_{\mu}(t, \mathbf{a})$ 为附加项, 而

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \left(\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}} \right) \quad (23)$$

当 $\Lambda_{\mu} = 0 (\mu = 1, 2, \dots, 2n)$ 时, 方程(22)为 Birkhoff 方程.

若 Birkhoff 函数 B 和 Birkhoff 函数组 R_μ 都显含时间 t , 则称系统为非自治的. 此时方程(22)为非自治广义 Birkhoff 系统的微分方程.

假设系统非奇异, 则式(22)可写为

$$\dot{a}^\nu = \Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (24)$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu} \Omega_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu \\ \det(\Omega_{\mu\nu}) \neq 0$$

一般情况下, 方程(24)不是梯度系统, 也不是三重组合梯度系统. 仅在一定条件下才能转化成为三重组合梯度系统. 这里给出将非自治广义 Birkhoff 系统表示为三重组合梯度系统的定理.

定理: 给定一个矩阵组合 $(h_{\mu\nu}) = [h_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$, $(k_{\mu\nu}) = [k_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$, $(f_{\mu\nu}) = [f_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$, 使其由负单位矩阵、反对称矩阵、对称负定矩阵或者半负定矩阵中的任意三个组成, 且存在函数 $V = V(t, \mathbf{a})$ 满足

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_i} h_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} + \frac{\partial V}{\partial x_i} f_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_j} \quad (25)$$

且使得非自治广义 Birkhoff 系统的运动方程(24)可以表示为方程(12)的形式

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) = h_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + f_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + k_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (26)$$

则称该系统具有三重组合梯度系统的表示.

当矩阵组合为负单位矩阵、对称负定矩阵、反对称矩阵时, 该系统具有三重组合梯度系统 I 的表示. 则方程(24)可记为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) = -\frac{\partial V}{\partial a^\mu} + S_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + b_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (27)$$

此时 $(h_{\mu\nu})$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) = [S_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) = [b_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为反对称矩阵.

当矩阵组合为负单位矩阵、反对称矩阵、半负定矩阵时, 该系统具有三重组合梯度系统 II 的表示. 方程(24)可记为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) = -\frac{\partial V}{\partial a^\mu} + b_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} +$$

$$a_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (28)$$

此时 $(h_{\mu\nu})$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) = [b_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为反对称矩阵, $(k_{\mu\nu}) = [a_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为半负定矩阵.

当矩阵组合为负单位矩阵、对称负定矩阵、半负定矩阵时, 该系统具有三重组合梯度系统 III 的表示. 方程(24)可记为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) = -\frac{\partial V}{\partial a^\mu} + S_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (29)$$

其中 $(h_{\mu\nu})$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) = [S_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) = [a_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为半负定矩阵.

当矩阵组合为反对称矩阵、对称负定矩阵、半负定矩阵时, 该系统具有三重组合梯度系统 IV 的表示. 方程(24)可记为

$$\Omega^{\mu\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} - \Lambda_\mu \right) = b_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + S_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} + a_{\mu\nu} \frac{\partial V}{\partial a^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, 2n) \quad (30)$$

其中 $(h_{\mu\nu}) = [b_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为反对称矩阵, $(f_{\mu\nu}) = [S_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) = [a_{\mu\nu}(t, \mathbf{a})]$ 为半负定矩阵.

根据定理, 利用三重组合梯度系统方法对非自治广义 Birkhoff 系统进行稳定性分析, 其主要步骤如下:

步骤 1 矩阵组合的选择. 选择适当的矩阵组合, 将系统表示为具有三重组合梯度形式;

步骤 2 势函数及其导数的求解. 利用矩阵组合与非自治广义 Birkhoff 方程求解势函数 V 及其导数 $\dot{V}$;

步骤 3 判定稳定性. 根据已求的势函数 V 及其导数 $\dot{V}$, 利用表 1 结论判定系统稳定性.

3 应用举例

例 1 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, \quad R_2 = a^1 \sin t, \\ B = 2a^1 a^2 \sin t + (a^1)^2 \sin t \quad (31)$$

附加项为

$$\Lambda_1 = a^1 \sin t + 5a^2 \sin t, \quad \Lambda_2 = a^1 \cos t + a^2 \sin t \quad (32)$$

显然, 该系统是非自治的.

由式(23)可得

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{csct} \\ \operatorname{csct} & 0 \end{pmatrix}$$

由方程(24)可得

$$\dot{a}^1 = -2a^1 + a^2 \quad \dot{a}^2 = a^1 - 3a^2 \tag{33}$$

不妨给定一组不含时间 t 的矩阵组合,使得矩

阵 $(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称矩阵. 由定理可知存在函数 $V = V(t, \mathbf{a})$ 使得非自治广义 Birkhoff 系统的运动方程(24)可以表示为方程(27)的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix} \tag{34}$$

此时该系统具有三重组合梯度系统 I 的表示.

结合式(33)和式(34),有

$$\begin{aligned} -2a^1 + a^2 &= -2 \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ a^1 - 3a^2 &= -2 \frac{\partial V}{\partial a^1} - 6 \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{aligned} \tag{35}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a^1} &= a^1 - \frac{1}{2}a^2 \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} &= -\frac{1}{2}a^1 + \frac{2}{3}a^2 \end{aligned} \tag{36}$$

故可解出

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{3}(a^2)^2 - \frac{1}{2}a^1a^2 \tag{37}$$

显然 $W(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(a^1)^2 + \frac{1}{3}(a^2)^2$ 为正定函数,且 $0 < V \leq W(\mathbf{X})$,所以函数 V 正定且具有无穷小上界.

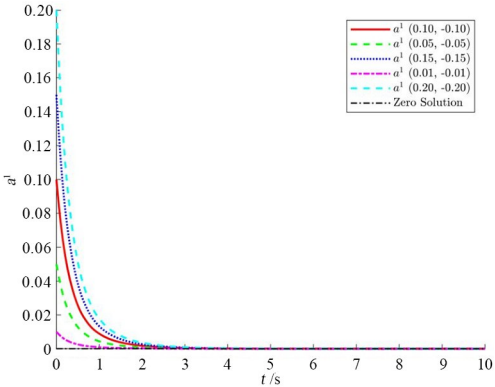
显然此时函数 V 中不含时间 t ,故有 $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$,则

由式(25)求得

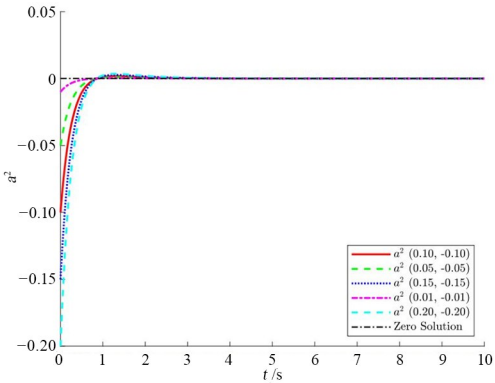
$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{5}{2}(a^1)^2 - \frac{5}{2}(a^2)^2 + \frac{25}{6}a^1a^2 \\ &= -\frac{5}{2}(a^1 - a^2)^2 - \frac{5}{6}a^1a^2 < 0 \end{aligned} \tag{38}$$

从而 $\dot{V}$ 负定. 由表 1 可知,系统的零解是一致渐近稳定的.

为更好地说明系统零解的稳定性,选取不同的初始条件,对方程(33)和(37)进行数值模拟,得到系统的状态变量 a^1 、 a^2 的时间演化曲线和势函数 V 的能量衰减图,如图 1 和图 2 所示. 由图可知,无论给予状态变量怎样的初始小扰动,其状态变量和势函数都会随时间收敛到零解,且收敛特性不受初始时刻影响,故可判定系统的零解具有一致渐近稳定性.



(a) 状态变量 a^1 的时间演化图



(b) 状态变量 a^2 的时间演化图

图 1 算例 1 状态变量数值模拟结果

Fig. 1 Numerical simulation results of state variables for example 1

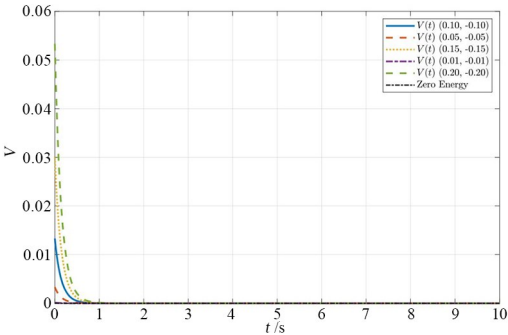


图 2 算例 1 势函数数值模拟结果

Fig. 2 Numerical simulation results of the potential function for example 1

例 2 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, \quad R_2 = a^1 \sin t, \quad B = a^1 a^2 \sin t \tag{39}$$

附加项为

$$\Lambda_1 = 3a^1 \sin t + 4a^2 \sin t, \quad \Lambda_2 = a^1 \cos t + a^2 \sin t \quad (40)$$

显然,该系统是非自治的.

由式(23)可得

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cos t \\ \cos t & 0 \end{pmatrix}$$

由方程(24)可得

$$\dot{a}^1 = -a^1 + a^2 \quad (41)$$

$$\dot{a}^2 = -3a^1 - 3a^2$$

不妨给定一组不含时间 t 的矩阵组合,使得矩阵

阵 $(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称矩阵, $(k_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ 为半

负定矩阵. 由定理可知存在函数 $V = V(t, \mathbf{a})$ 使得非自治广义 Birkhoff 系统的运动方程(24)可以表示为方程(28)的形式

$$\begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{pmatrix} \quad (42)$$

此时该系统具有三重组合梯度系统 II 的表示.

结合式(41)和式(42)有

$$-a^1 + a^2 = -\frac{\partial V}{\partial a^1} \quad (43)$$

$$-3a^1 - 3a^2 = -5\frac{\partial V}{\partial a^1} - 2\frac{\partial V}{\partial a^2}$$

即

$$\frac{\partial V}{\partial a^1} = a^1 - a^2, \quad \frac{\partial V}{\partial a^2} = -a^1 + 4a^2 \quad (44)$$

故可解出

$$V = \frac{1}{2}(a^1)^2 + 2(a^2)^2 - a^1 a^2 \quad (45)$$

显然 $W(\mathbf{X}) = (a^1)^2/2 + 2(a^2)^2$ 为正定函数, $0 < V \leq W(\mathbf{X})$, 所以函数 V 正定且具有无穷小上界.

显然此时函数 V 中不含时间 t , 故有 $\partial V/\partial t = 0$, 则由式(25)求得

$$\dot{V} = 2(a^1)^2 - 13(a^2)^2 - 9a^1 a^2 < 0 \quad (46)$$

从而 $\dot{V}$ 负定. 由表 1 可知, 系统的零解是一致渐近稳定的.

选取不同的初始时间, 对方程(41)和(45)进行

数值模拟, 得到系统的状态变量 a^1 、 a^2 的时间演化曲线和势函数的能量衰减图, 如图 3 和图 4 所示. 可知不同初始条件下的状态变量和势函数均可在短时间内收敛到零解, 故系统的零解具有一致渐近稳定性.

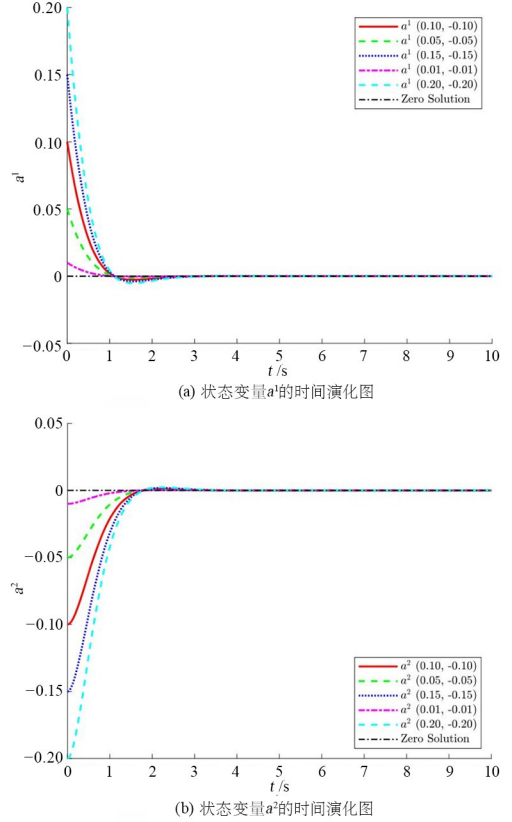


图 3 算例 2 状态变量数值模拟结果

Fig. 3 Numerical simulation results of state variables for example 2

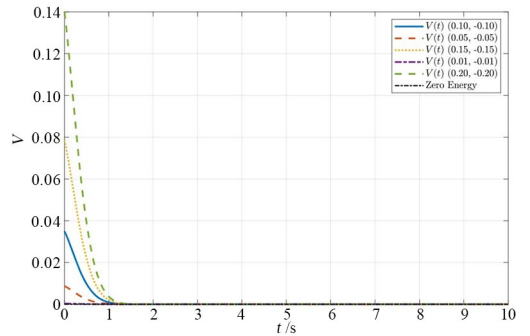


图 4 算例 2 势函数数值模拟结果

Fig. 4 Numerical simulation results of the potential function for example 2

例 3 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, \quad R_2 = a^1 \sin t,$$

$$B = (a^1)^2 \sin t - a^1 a^2 \cos t \quad (47)$$

附加项为

$$\Lambda_1 = -2a^1 \sin t - a^2 \cos t + 5a^2 \sin t,$$

$$\Lambda_2 = -5a^1 \sin t + 4a^2 \sin t \quad (48)$$

显然,该系统是非自治的.

由式(23)可得

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{csct} \\ \operatorname{csct} & 0 \end{pmatrix}$$

由方程(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= -5a^1 + 4a^2 \\ \dot{a}^2 &= 4a^1 - 5a^2 \end{aligned} \tag{49}$$

不妨给定一组不含时间 t 的矩阵组合,使得矩

阵 $(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 为负单位矩阵, $(f_{\mu\nu}) =$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) =$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 为半负定矩阵. 由定理可知存在函数

$V = V(t, \mathbf{a})$ 使得非自治广义 Birkhoff 系统的运动

方程(24)可以表示为方程(29)的形式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{50}$$

此时该系统具有三重组合梯度系统Ⅲ的表示.

结合式(49)和式(50),有

$$\begin{aligned} -5a^1 + 4a^2 &= -2 \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ 4a^1 - 5a^2 &= -2 \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{aligned} \tag{51}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a^1} &= \frac{5}{2}a^1 - 2a^2 \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} &= -2a^1 + \frac{5}{2}a^2 \end{aligned} \tag{52}$$

故可解出

$$V = \frac{5}{4}(a^1)^2 + \frac{5}{4}(a^2)^2 - 2a^1a^2 \tag{53}$$

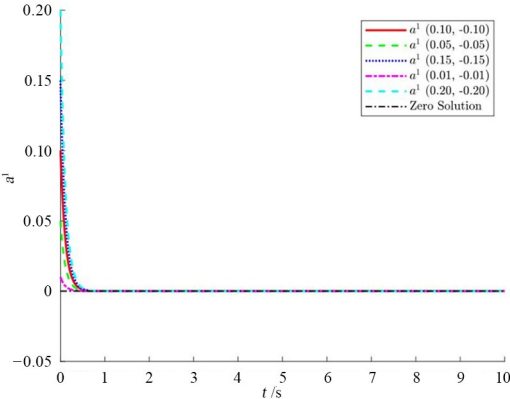
显然 $W(\mathbf{X}) = 5(a^1)^2/4 + 5(a^2)^2/4$ 为正定函数, $0 < V \leq W(\mathbf{X})$, 所以函数 V 正定且具有无穷小上界.

显然此时函数 V 中不含时间 t , 故有 $\partial V / \partial t = 0$, 则由式(25)求得

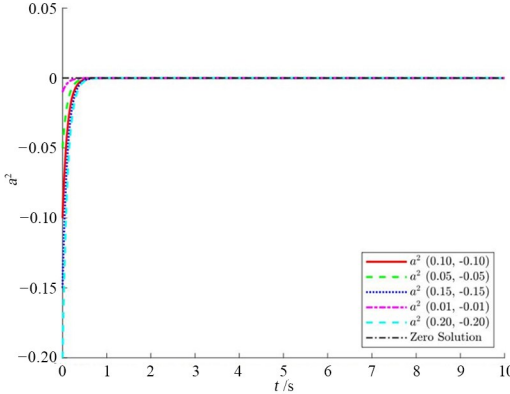
$$\dot{V} = -\frac{33}{2}(a^1)^2 - \frac{41}{2}(a^2)^2 + 35a^1a^2 < 0 \tag{54}$$

从而 $\dot{V}$ 负定. 由表 1 可知, 系统的零解是一致渐近稳定的.

选取不同的初始时间, 对方程(49)和(53)进行数值模拟, 得到系统的状态变量 a^1 、 a^2 的时间演化曲线和势函数的能量衰减图, 如图 5 和图 6 所示. 可知不同初始条件下的状态变量和势函数均可在短时间内收敛到零解, 故系统的零解具有一致渐近稳定性.



(a) 状态变量 a^1 的时间演化图



(b) 状态变量 a^2 的时间演化图

图 5 算例 3 状态变量数值模拟结果

Fig. 5 Numerical simulation results of state variables for example 3

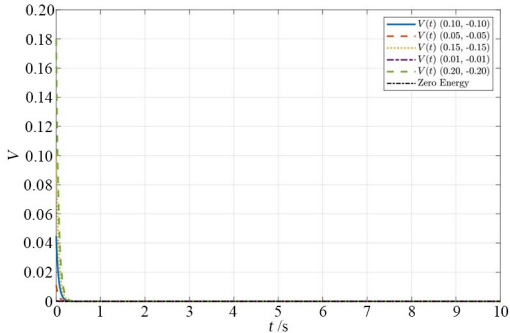


图 6 算例 3 势函数数值模拟结果

Fig. 6 Numerical simulation results of the potential function for example 3

例 4 广义 Birkhoff 系统为

$$R_1 = 0, \quad R_2 = a^1 \sin t, \quad B = 4a^1a^2 \sin t \tag{55}$$

附加项为

$$\Lambda_1 = 4a^1 \sin t + 8a^2 \sin t, \Lambda_2 = a^1 \cos t + 2a^2 \sin t \quad (56)$$

显然,该系统是非自治的.

由式(23)可得

$$(\Omega_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \sin t \\ -\sin t & 0 \end{pmatrix}, (\Omega^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\csc t \\ \csc t & 0 \end{pmatrix}$$

由方程(24)可得

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= -4a^1 + 2a^2 \\ \dot{a}^2 &= -4a^1 - 4a^2 \end{aligned} \quad (57)$$

不妨给定一组不含时间 t 的矩阵组合,使得矩阵

阵 $(h_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 为反对称矩阵, $(f_{\mu\nu}) =$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ 为对称负定矩阵, $(k_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 为

半负定矩阵. 由定理可知存在函数 $V = V(t, \mathbf{a})$ 使得非自治广义 Birkhoff 系统的运动方程(24)可以表示为方程(30)的形式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{a}^1 \\ \dot{a}^2 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial a^1} \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

此时该系统具有三重组合梯度系统IV的表示.

结合式(57)和式(58),有

$$\begin{aligned} -4a^1 + 2a^2 &= -\frac{\partial V}{\partial a^1} + \frac{\partial V}{\partial a^2} \\ -4a^1 - 4a^2 &= -\frac{\partial V}{\partial a^1} - 2\frac{\partial V}{\partial a^2} \end{aligned} \quad (59)$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a^1} &= 4a^1 \\ \frac{\partial V}{\partial a^2} &= 2a^2 \end{aligned} \quad (60)$$

故可解出

$$V = 2(a^1)^2 + (a^2)^2 \quad (61)$$

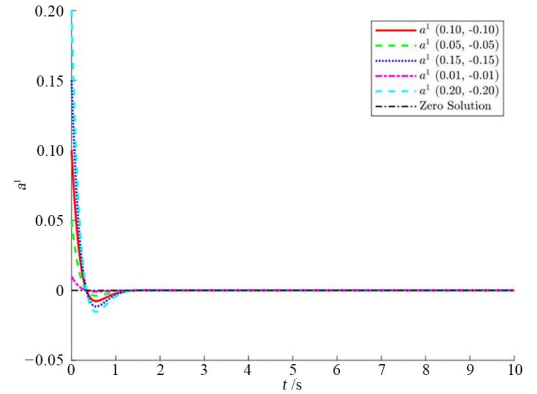
显然 $W(\mathbf{X}) = 2(a^1)^2 + 2(a^2)^2$ 为正定函数, $0 < V \leq W(\mathbf{X})$, 所以函数 V 正定且具有无穷小上界.

显然此时函数 V 中不含时间, 故有 $\partial V / \partial t = 0$, 则由式(25)求得

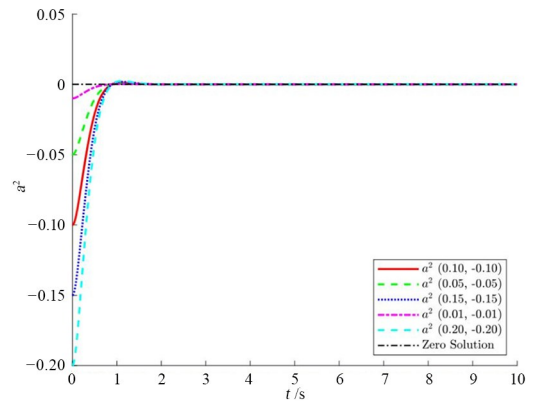
$$\dot{V} = -16(a^1)^2 - 8(a^2)^2 < 0 \quad (62)$$

从而 $\dot{V}$ 负定. 由表 1 可知, 系统的零解是一致渐近稳定的.

选取不同的初始时间, 对方程(57)和(61)进行数值模拟, 得到系统的状态变量 a^1 、 a^2 的时间演化曲线和势函数 V 的能量衰减图, 如图 7 和图 8 所示. 可知不同初始条件下的状态变量和势函数均可在短时间内收敛到零解, 故系统的零解具有一致渐近稳定性.



(a) 状态变量 a^1 的时间演化图



(b) 状态变量 a^2 的时间演化图

图 7 算例 4 状态变量数值模拟结果

Fig. 7 Numerical simulation results of state variables for example 4

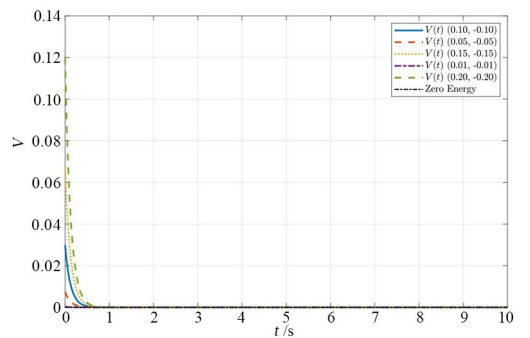


图 8 算例 4 势函数数值模拟结果

Fig. 8 Numerical simulation results of the potential function for example 4

4 结论

本文针对非自治广义 Birkhoff 系统稳定性研究中 Lyapunov 函数构造困难的问题, 提出了一种基于三重组合梯度系统的新方法. 通过建立四类矩

阵组合与系统的三重组合梯度系统表示的对应关系,使得在具体分析时只需确定矩阵组合的类型,即可直接求解出 Lyapunov 函数,降低了稳定性分析的难度.该方法不仅为判定非自治广义 Birkhoff 系统的零解稳定性研究提供了新的途径,其理论框架还可推广应用于其他约束力学系统的稳定性分析.数值算例验证了该方法的有效性.

算例中采用二维系统便于直接给出矩阵组合并验证其稳定性.然而,对于高维非自治广义 Birkhoff 系统中,往往难以直接获得满足条件的矩阵组合.针对这一问题,可通过计算机编程辅助求解;在限定矩阵元素范围的条件下,搜索符合条件的矩阵组合,并通过计算相应的函数 V 和 $\dot{V}$ 来判断系统稳定性.这种数值化处理方法进一步拓展了三重组合梯度方法的实际应用范围.

参考文献

[1] BIRKHOFF G D. Dynamical systems [M]. Providence, RI, USA: AMS,1927.

[2] SANTILLI R M. Foundation of theoretical mechanics I: The inverse problem in Newtonian mechanics [M]. New York: Springer, 1978.

[3] SANTILLI R M. Foundation of theoretical mechanics II: Birkhoffian generalizations of Hamiltonian mechanics [M]. New York: Springer, 1983.

[4] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学 (A 辑 数学 物理学 天文学 技术科学), 1993, 23 (7): 709—717.

MEI F X. Noether's theory of Birkhoffian systems [J]. Science in China (Series A Mathematics, Physics, Astronomy, Technological Sciences), 1993, 23(7): 709—717. (in Chinese)

[5] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Poisson 理论[J]. 科学通报, 1995, (21): 1947—1950.

MEI F X. Poisson theory of Birkhoffian systems [J]. Chinese Science Bulletin, 1995, (21): 1947—1950. (in Chinese)

[6] 梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 等. Birkhoff 系统动力学 [M]. 北京: 理工大学出版社, 1996.

MEI F X, SHI R C, ZHANG Y F, et al. Dynamics of birkhoffian system [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996. (in Chinese)

[7] 梅凤翔, 吴惠彬, 李彦敏, 等. Birkhoff 力学的研究进展[J]. 力学学报, 2016, 48(2): 263—268.

MEI F X, WU H B, LI Y M, et al. Advances in research on Birkhoffian mechanics [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48 (2): 263—268. (in Chinese)

[8] 梅凤翔, 张永发, 何光, 等. 广义 Birkhoff 系统动力学的基本框架[J]. 北京理工大学学报, 2007, 27 (12): 1035—1038.

MEI F X, ZHANG Y F, HE G, et al. Fundamental framework of generalized Birkhoff system dynamics [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2007, 27(12): 1035—1038. (in Chinese)

[9] 陈向炜, 傅景礼, 罗绍凯, 等. Birkhoff 系统动力学研究进展[J]. 商丘师范学院学报, 2004, 20(2): 5—13.

CHEN X W, FU J L, LUO S K, et al. Development in the studies of dynamics of Birkhoffian system [J]. Journal of Shangqiu Teachers College, 2004, 20(2): 5—13. (in Chinese)

[10] 陈向炜. Birkhoff 系统的全局分析[M]. 开封: 河南大学出版社, 2002.

CHEN X W. Global analysis of Birkhoffian system [M]. Kaifeng: Henan University Press, 2002. (in Chinese)

[11] 龙梓轩, 张毅. Birkhoff 系统 Lie 对称性逆问题的两种提法和解法[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2012(3): 49—55.

LONG Z X, ZHANG Y. Two formulations and solutions of the inverse problems for Lie symmetries in dynamics of a Birkhoffian system [J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2012(3): 49—55. (in Chinese)

[12] 李彦敏, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 方程的积分方法[J]. 物理学报, 2010, 59(9): 5930—5933.

LI Y M, MEI F X. Integral methods for the generalized Birkhoff equations [J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(9): 5930—5933. (in Chinese)

[13] LI Y M. Lie symmetries, perturbation to symmetries and adiabatic invariants of a generalized Birkhoff system [J]. Chinese Physics Letters, 2010, 27 (1): 010202.

[14] 梅凤翔, 吴惠彬. 约束力学系统的梯度表示(上) [M]. 北京: 科学出版社, 2016.

MEI F X, WU H B. Gradient representations of constrained mechanical systems: Volume I [M]. Beijing: Science Press, 2016. (in Chinese)

[15] 梅凤翔. 关于梯度系统——分析力学札记之十八 [J]. 力学与实践, 2012, 34(1): 89—90.

- MEI F X. On gradient systems: notes on analytical mechanics (XVIII) [J]. *Mechanics in Engineering*, 2012, 34(1): 89–90. (in Chinese)
- [16] 王嘉航, 张毅. 非自治广义 Birkhoff 系统的半负定矩阵梯度系统表示[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2018, 57(3): 60–63.
- WANG J H, ZHANG Y. A semi-negative definite matrix gradient system representation for non-autonomous generalized Birkhoff system [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2018, 57(3): 60–63. (in Chinese)
- [17] 梅凤翔, 吴惠彬. Birkhoff 系统的广义斜梯度表示[J]. *动力学与控制学报*, 2015, 13(5): 329–331.
- MEI F X, WU H B. Generalized skew-gradient representation for Birkhoff system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2015, 13(5): 329–331. (in Chinese)
- [18] 李彦敏, 梅凤翔. 非自治 Birkhoff 系统的广义斜梯度表示[J]. *云南大学学报(自然科学版)*, 2015, 37(6): 832–836.
- LI Y M, MEI F X. A generalized skew-gradient representation for non autonomous Birkhoffian system [J]. *Journal of Yunnan University (Natural Sciences Edition)*, 2015, 37(6): 832–836. (in Chinese)
- [19] 祖启航, 朱建青, 张毅. 一类非自治 Birkhoff 系统的分数维梯度表示[J]. *商丘师范学院学报*, 2015, 31(12): 30–33.
- ZU Q H, ZHU J Q, ZHANG Y. A fractional dimensional gradient representation for a type of non-autonomous Birkhoffian systems [J]. *Journal of Shangqiu Normal University*, 2015, 31(12): 30–33. (in Chinese)
- [20] 李彦敏, 陈向炜, 吴惠彬, 等. 广义 Birkhoff 系统的两类广义梯度表示[J]. *物理学报*, 2016, 65(8): 5–8.
- LI Y M, CHEN X W, WU H B, et al. Two kinds of generalized gradient representations for generalized Birkhoff system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2016, 65(8): 5–8. (in Chinese)
- [21] 张毅. 一类非自治 Birkhoff 系统的梯度表示[J]. *苏州科技学院学报(自然科学版)*, 2015, 32(4): 1–3, 8.
- ZHANG Y. A gradient representation for a type of non-autonomous Birkhoffian systems [J]. *Journal of Suzhou University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2015, 32(4): 1–3, 8. (in Chinese)
- [22] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统的梯度表示[J]. *动力学与控制学报*, 2012, 10(4): 289–292.
- MEI F X, WU H B. A gradient representation for generalized Birkhoff system [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2012, 10(4): 289–292. (in Chinese)
- [23] 陈向炜, 曹秋鹏, 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统稳定性对双参数的依赖关系[J]. *力学季刊*, 2017, 38(1): 108–112.
- CHEN X W, CAO Q P, MEI F X. Dependence of stability of generalized Birkhoff system on two parameters [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2017, 38(1): 108–112. (in Chinese)
- [24] 董孟峰, 陈向炜. 非自治广义 Birkhoff 系统的组合梯度方法[J]. *商丘师范学院学报*, 2019, 35(6): 15–20.
- DONG M F, CHEN X W. Combined gradient method for non-autonomous generalized Birkhoff systems [J]. *Journal of Shangqiu Normal University*, 2019, 35(6): 15–20. (in Chinese)
- [25] 梅凤翔, 吴惠彬. 广义 Birkhoff 系统与一类组合梯度系统[J]. *物理学报*, 2015, 64(18): 370–374.
- MEI F X, WU H B. Generalized Birkhoff system and a kind of combined gradient system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, 64(18): 370–374. (in Chinese)
- [26] 章婷婷, 陈向炜. 判定非自治 Birkhoff 系统稳定性的广义组合梯度方法[J]. *力学季刊*, 2018, 39(4): 771–777.
- ZHANG T T, CHEN X W. A generalized combinatorial gradient method for determining the stability of non-autonomous birkhoffian systems [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2018, 39(4): 771–777. (in Chinese)
- [27] WANG J H, BAO S Y. Combined gradient representations for generalized birkhoffian systems in event space and its stability analysis [J]. *Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2021, 38(6): 967–974.
- [28] 王嘉航, 张毅. 自治广义 Birkhoff 系统的三重组合梯度系统表示[J]. *云南大学学报(自然科学版)*, 2019, 41(3): 497–502.
- WANG J H, ZHANG Y. Triple combined gradient system representations for autonomous generalized Birkhoffian system [J]. *Journal of Yunnan University (Natural Sciences Edition)*, 2019, 41(3): 497–

502. (in Chinese)

[29] 董孟峰, 陈向炜. 判定广义 Birkhoff 系统稳定性的三重组合梯度方法[J]. 力学季刊, 2019, 40(3): 543–548.

DONG M F, CHEN X W. Triple combined gradient method for determining the stability of generalized Birkhoff systems [J]. Chinese Quarterly of

Mechanics, 2019, 40(3): 543–548. (in Chinese)

[30] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.

MA Z E, ZHOU Y C, LI C Z. Qualitative and stability methods of ordinary differential equations [M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)