

基于参考点平移子空间的含双稳态非线性 能量阱系统辨识^{*}

王玉胜 钱慧 谢世涛 刘清华 杭晓晨 姜东[†]

(南京林业大学 机械电子工程学院, 南京 210037)

摘要 在振动控制领域,双稳态非线性能量阱(BNES)是一种高效的减振结构,其能量回收和振动控制性能依赖于非线性系统的模型参数的优化与设计.本文研究了含双稳态非线性能量阱系统的参数识别问题.基于双稳态系统稳定平衡点的性质,提出了一种参考点平移方法,利用高斯核密度峰值方法估计稳态点,对时域非线性子空间方法进行了改进.采用了数值算例和试验进行验证,研究不同噪声环境对平衡点和非线性参数估计精度的影响,以及稳定点估计误差对参数结果的灵敏度.结果表明,在 20% 噪声环境下,平衡点估计误差在 10% 以内,非线性参数估计结果误差在 20% 左右,可以有效地辨识含双稳态非线性能量阱系统立方刚度和库仑阻尼参数.

关键词 非线性系统辨识, 双稳态, 非线性能量阱, 非线性子空间

中图分类号:O322

文献标志码:A

Identification of Bistable Nonlinear Energy Sink Systems Based on Reference Point Shifting Subspace^{*}

Wang Yusheng Qian Hui Xie Shitao Liu Qinghua Hang Xiaochen Jiang Dong[†]

(School of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract In the field of vibration control, bistable nonlinear energy sinks (BNES) represent a highly efficient vibration suppression structure where energy harvesting and vibration control performance depend on the optimization and design of nonlinear system parameters. This paper investigates parameter identification in systems containing bistable nonlinear energy sinks. Leveraging the properties of stable equilibrium points in bistable systems, we propose a reference point shifting method that integrates Gaussian kernel density peak estimation to enhance the time-domain nonlinear subspace approach. Numerical simulations and experimental validations were conducted to analyze the impacts of various noise levels on equilibrium point estimation accuracy and nonlinear parameter identification, as well as the sensitivity of parameter results to steady-state point estimation errors. The results demonstrate that under 20% noise intensity, the equilibrium point estimation error remains below 10%, while the nonlinear parameter estimation error is approximately 20%. This method effectively identifies cubic stiffness and Coulomb damping parameters in bistable nonlinear energy sink systems.

Key words nonlinear system identification, bistable system, nonlinear energy sinks, nonlinear subspace identification

2024-12-26 收到第 1 稿,2025-03-03 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(52202445),江苏省自然科学基金(BK20220406), National Natural Science Foundation of China (52202445), Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20220406).

[†] 通信作者 E-mail:jiangdong@njfu.edu.cn

引言

非线性能量阱 (nonlinear energy sink, NES) 是一种设计合理、具有无正线性刚度非线性振荡器,能够在很宽的频率范围内有效抑制振动,因此在工程结构中得到了广泛应用^[1]. 双稳态非线性能量阱 (bistable nonlinear energy sink, BNES) 一般通过立方刚度和负刚度元件耦合到主体系统中,形成两个稳定点,从而实现快速的能量转移和耗散,显著提高了 NES 的性能^[2-6]. BNES 的通常采用磁悬浮^[7,8]、屈曲梁^[9]和超材料^[10,11]设计. 研究 BNES 的关键参数辨识对其设计具有重要的意义.

Kerschen^[12]和 Noël^[13]等人系统地综述了近 20 年内的非线性系统辨识原理方法与应用. 其中,经典方法包括恢复力曲面法^[14-16],直接参数估计方法^[17-19],Volterra 级数方法^[20-22]和非线性子空间方法 (nonlinear subspace identification, NSI)^[23],一种稀疏回归数据驱动发现非线性动力学模型的方法 (sparse identification of nonlinear dynamics, SINDy) 被 Brunton 等人^[24]提出,并得到了广泛研究. Liu^[25]在磁耦合悬臂梁型双稳态结构中尝试 SINDy 方法并获得准确的非线性参数. Lin 等人^[26,27]结合了稀疏回归与分离最小二乘,逐级识别线性和非线性动力系统系数,并使用物理约束联合交替迭代方法识别迟滞模型的参数. 然而基于稀疏回归的方法一般基于显式的常微分方程,因此依赖多个状态变量及其导数.

非线性子空间辨识是线性子空间辨识的扩展,利用非线性作为系统内部反馈力的思想. 该方法于 2008 年被 Marchesiello 等人^[23]提出,识别了间隙非线性和三次刚度非线性振子^[28],后续被扩展至频域^[29]. Liu 等人^[30]提出非线性分离策略的改进时域子空间方法,减少了线性参数和非线性参数的耦合误差. Liu 等人^[31]利用其辨识了压电悬臂梁结构参数. Anastasio 等人^[32]将其应用于识别含分布非线性的柔性梁结构. 非线性子空间方法最近也与其他新技术有效地结合得到了发展,如虚拟激励方法^[33]、预报误差方法^[34]、贝叶斯模型选择^[35,36]、模糊聚类^[37,38]、谐波平衡法^[39]、全局模态法^[40]和过采样技术^[41].

目前对含 BNES 结构的非线性子空间辨识的研究较少. BNES 具有两个稳定的平衡位置,在外

部激励下会产生复杂的动力学现象,如混沌运动或阱内运动. 对于含 BNES 的多自由度系统,由于负刚度的存在,该系统的底层线性系统并不稳定,基本线性频响函数无法被准确表征,直接使用非线性子空间算法对该系统进行参数识别会产生无法验证的结果.

本文提出了一种参考点平移方法改进的非线性时域子空间方法,应用于含 BNES 系统的参数估计问题. 首先描述了含 BNES 结构的一般系统动力学特性和运动方程. 首先基于相对位移的概率密度分布,使用高斯和密度峰值估计平衡点位置,通过移动附加质量的零参考点至任意稳定点,构造系统新的输入和输出变量. 这种方法将非稳定信号转为稳定信号来改进非线性子空间辨识方法. 通过 3 自由度和 7 自由度系统仿真算例验证所提方法的有效性.

论文的结构如下:第 1 节介绍了一种典型的 BNES 结构特性及含 BNES 系统的一般运动方程;第 2 节提出了含 BNES 系统的参考点平移子空间系统辨识方法;第 3 节进行了数值验证;第 4 节总结了本文的研究结果.

1 含 BNES 系统模型

1.1 BNES 结构特性

典型的 BNES 结构如图 1 所示,两根刚度为 k 的线性弹簧与质量块 m 相连接,在静力平衡位置处,弹簧保持垂直且处于压缩状态,如 b 点所示. 质量块 m 在水平运动过程中会产生两个稳定的平衡位置,此时线性弹簧既不压缩也不伸长,如图中 a 和 c 点所示.

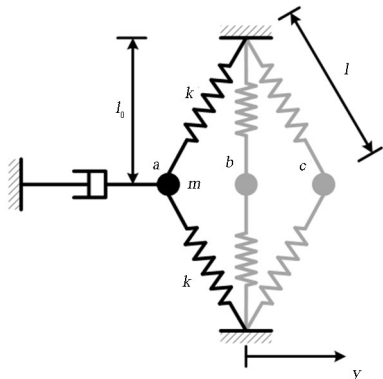


图 1 典型 BNES 结构
Fig. 1 Typical BNES structure

在外力作用下弹簧提供的非线性恢复力可以用多项式表示:

$$f = k_1 y^3 - k_2 y \quad (1)$$

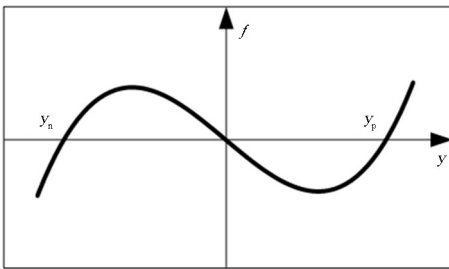
相应的势能表示为

$$u = \frac{1}{4} k_3 y^4 - \frac{1}{2} k_1 y^2 \quad (2)$$

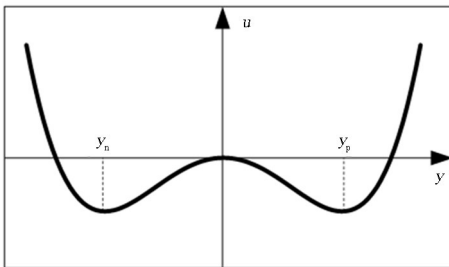
其中 $k_1 = -2(l_0/l - 1)k$, $k_2 = (l_0/l_3)k$, l 为弹簧的初始长度, l_0 为弹簧处于垂直位置时的长度, y 为质量块 m 相对于静平衡位置的水平位移. 非线性恢复力与势能定性曲线如图 2. 这种形式典型地对应一个双稳态系统, 其势能曲线呈现“W”形, 具有两个局部最小值(稳定点)和一个局部最大值(非稳定点). 平衡点的位置是满足系统处于静止或者动态平衡时的状态. 非线性恢复力为零时, 平衡点可得

$$y = 0, y_p = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}, y_n = -\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \quad (3)$$

其中, 平衡点 $y = 0$ 为非稳定的, y_p 和 y_n 是一对对称且稳定的平衡点. 下标 n 和 p 分别代表稳定点方向. 在 y_p 和 y_n 之间存在一段负刚度区域, 系统在这个范围内恢复力方向与位移方向相反, 系统的恢复力无法有效地抑制振荡, 反而增强振荡的幅度, 因此系统处于不稳定状态. 当振荡在稳定平衡点附近时, 非线性恢复力起作用, 但不会导致系统的失稳, 因此振荡是有限的、稳定的.



(a) 非线性恢复力曲线
(a) Nonlinear reatoring force curve



(b) 势能曲线
(b) Potential energy curve

图 2 非线性恢复力与势能定性曲线

Fig. 2 Curve of nonlinear restoring force and potential energy

1.2 含 BNES 系统运动方程

典型的单自由度主体结构附加 BNES 如图 3 所示, m_1 为主体结构运动质量, m_2 为 BNES 吸振器的运动质量; x_1 、 x_2 为主体结构与 BNES 的位移. 系统的运动微分方程为

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{nl} (x_1 - x_2)^3 - k_2 (x_1 - x_2) = f \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_{nl} (x_2 - x_1)^3 - k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\ddot{x}_1$ 和 $\dot{x}_1$ 为主体结构加速度和速度, $\ddot{x}_2$ 和 $\dot{x}_2$ 为附加的 BNES 的加速度和速度; c_1 、 k_1 分别为主体结构的黏性阻尼系数和刚度系数; c_2 、 k_2 和 k_{nl} 分别表示附加 BNES 的阻尼系数、负线性刚度和立方刚度系数.

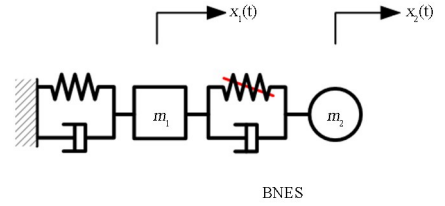


图 3 附加 BNES 的单自由度主体结构
Fig. 3 Single freedom body structure with BNES

2 含 BNES 结构的系统的参数辨识

2.1 非线性子空间辨识方法

对于含有局部非线性的 n 自由度集总参数结构, 其动力学方程可以表示为^[23]

$$M\ddot{q}(t) + C_v \dot{q}(t) + Kq(t) + f_{nl}(t) = f(t) \quad (5)$$

其中 M 、 C_v 和 K 分别为质量、粘性阻尼系数和刚度矩阵; $q(t)$ 和 $f(t)$ 分别为位移向量和外部载荷向量. 非线性力 $f_{nl}(t)$ 可由 p 个非线性基函数分量线性组合得到^[23]

$$f_{nl}(t) = \sum_{i=1}^p \mu_i l_i g_i(t) \quad (6)$$

$g_i(t)$ 为第 i 个非线性基函数, 可表示为多项式函数、分段线性函数、符号函数等. l_i 表示第 i 个非线性力作用的位置向量, 其元素取值为 0、-1 或 1 表示作用点及其方向.

根据输出反馈原理^[23], 非线性力可被视为作用于非线性系统底层线性部分的内部反馈力. 即非

线性力和外载荷都可作为系统的输入. 通过将公式中的非线性项移至方程右侧, 公式可被改写为^[23]

$$\mathbf{M}_q \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_q \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_{nl}(t) \quad (7)$$

子空间方法依据输入和输出数据计算状态空间方程, 因此, 定义状态向量 $\mathbf{x} = [\mathbf{q}(t) \quad \dot{\mathbf{q}}(t)]^T$ 和输出向量 $\mathbf{u} = [\mathbf{f}(t) \quad -\mu_1 \mathbf{l}_1 g_1(t) \quad \cdots \quad -\mu_p \mathbf{l}_p g_p(t)]$, 公式(7)对应的状态空间方程可以表示为^[23]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_v \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 1} & \cdots & \mathbf{0}_{n \times 1} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \mu_1 \mathbf{l}_1 & \cdots & \mathbf{M}^{-1} \mu_p \mathbf{l}_p \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{0}_{n \times n}]$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{0}_{n \times n} \quad \mathbf{0}_{n \times 1} \quad \cdots \quad \mathbf{0}_{n \times 1}] \quad (9)$$

其中, 下标 c 表示其为连续时间状态空间模型, $\mathbf{A}_c$ 、 $\mathbf{B}_c$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 分别为状态、输入、输出和观测矩阵. 假设输入 $\mathbf{u}$ 为零阶保持, 则连续状态空间模型可以转换为离散状态空间模型,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_r + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_r \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C} \mathbf{x}_r + \mathbf{D} \mathbf{u}_r \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $\mathbf{A}_d = \exp(\mathbf{A}_c \Delta t)$, $\mathbf{B}_d = [\exp(\mathbf{A}_c \Delta t) - \mathbf{I}] \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{B}_c$, 下标 d 表示离散时间, r 为采样时间点, Δt 为采样间隔.

通过子空间方法估计状态空间矩阵 $\mathbf{A}_d$ 、 $\mathbf{B}_d$ 、 $\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$, 根据频响函数矩阵计算系统参数. 通过对公式进行傅里叶变换, 可以得扩展的频响函数矩阵^[23],

$$\mathbf{H}_E(\omega) = \mathbf{D} + \mathbf{C}(\mathrm{i}\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c \quad (11)$$

含非线性的扩展频率响应函数和基础线性系统频率响应函数之间的关系为^[23]

$$\mathbf{H}_E(\omega) = [\mathbf{H}(\omega) \quad \mathbf{H}(\omega) \mu_1 \mathbf{I}_1 \cdots \mathbf{H}(\omega) \mu_p \mathbf{I}_p] \quad (12)$$

利用公式可辨识系统的非线性参数. 由于虚部 i 的存在, 通过扩展的频响函数获得的非线性系数是和频率相关的复数, 虚部理论上应为零. 由于噪声和非线性建模误差的存在会导致虚部非零.

由公式(12)可知, 非线性子空间辨识方法将非线性项视为底层线性系统的内部反馈力, 通过扩展的非线性频响函数与基本线性系统频响函数的关系辨识非线性参数.

2.2 移动参考点方法

由 1.1 节可知, BNES 处提供的非线性恢复力产生两个稳定的平衡点和一个不稳定平衡点. BNES 处的非线性恢复力为

$$\mathbf{f}_{nl} = k_{nl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^3 - k_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (13)$$

稳定平衡点的位置是附加质量与安装点之间相对位移的函数, 非线性恢复力为 0 解得平衡点位置, 表示为 δ_n 和 δ_p .

在随机激励下, 系统的稳态点可以通过其输出的概率密度函数 (probability density function, PDF) 进行建模^[42]. 输出会经历一定的时间演化, 直到其概率分布达到稳态. 本文中, 概率密度分布估计使用高斯核密度估计. 估计的密度峰值点可以作为稳态点的近似值.

考虑 BNES 在稳定平衡点 δ , 令 $\mathbf{x}_2 = \mathbf{z} + \delta$, 将新得的位置变量 $\mathbf{z}$ 代入公式(4)中, 可以得,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + c_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + k_1 \mathbf{x} + c_2(\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{z}}) + \\ k_{nl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - \delta)^3 - k_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - \delta) = \mathbf{f} \\ m_2 \ddot{\mathbf{z}} + c_2(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}_1) + k_{nl}(\mathbf{z} + \delta - \mathbf{x}_1)^3 - \\ k_2(\mathbf{z} + \delta - \mathbf{x}_1) = 0 \end{cases} \quad (14)$$

公式(14)中, 展开含 $\mathbf{z}$ 变量的一对非线性恢复力互为相反数, 得,

$$\begin{aligned} & k_{nl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - \delta)^3 - k_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - \delta) \\ &= -[k_{nl}(\mathbf{z} + \delta - \mathbf{x}_1)^3 - k_2(\mathbf{z} + \delta - \mathbf{x}_1)] \\ &= k_{nl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z})^3 - 3k_{nl}\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}) + \\ & (3k_{nl}\delta^2 - k_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}) - (k_{nl}\delta^3 - k_2\delta) \end{aligned} \quad (15)$$

考虑 δ 为稳定平衡点时的平衡条件和稳定性条件

$$\begin{cases} k_{nl}\delta^3 - k_2\delta = 0 \\ \frac{d\mathbf{f}_{nl}}{d\delta} = 3k_{nl}\delta^2 - k_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

根据式(16)中条件, 等式(15)代入式(14), 得,

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + c_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + k_1 \mathbf{x} + c_2(\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{z}}) + \\ k_{nl}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z})^3 - 3k_{nl}\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z})^2 = \mathbf{f} \\ m_2 \ddot{\mathbf{z}} + c_2(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}_1) - k_{nl}(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1)^3 + \\ 3k_{nl}\delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1)^2 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

由式(17)可得, 移动零参考后的系统由非稳定状态转化为稳定状态, 其底层线性系统不受负刚度的影响, 使用非线性子空间方法进行系统识别. 式(17)的状态空间方程式可以表示为:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \\ \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_c \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \mathbf{B}_c \begin{Bmatrix} f(t) \\ -(x_1 - z)^3 \\ (x_1 - a)^2 \end{Bmatrix} \tag{18}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \begin{Bmatrix} x \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} + \mathbf{D} \begin{Bmatrix} f(t) \\ -(x_1 - z)^3 \\ (x_1 - z)^2 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

其中下标 k 表示附加的 BNES 位于主体系统的自由度位置. 将式(19)代入式(12)中可以得到包含非线性刚度的扩展频响函数

$$\mathbf{H}_E(\omega) = [\mathbf{H} \quad k_{nl}\mathbf{H} \quad -3k_{nl}\delta\mathbf{H}] \tag{20}$$

3 算例研究

3.1 算例 1:含 BNES 的 3 自由度系统

考虑如图 4 所示的含 BNES 的 3 自由度系统. 双稳态负刚度振子位于主体系统自由度 1 处,在自由度 2 处存在库仑摩擦. 系统参数设置如下, $M_1=0.2\text{ kg}$, $M_2=0.3\text{ kg}$, $m_1=0.1\text{ kg}$; $k_1=k_2=800\text{ N/m}$, $k_{11}=550\text{ N/m}$; $c_1=c_2=c_3=0.5\text{ N}\cdot\text{s/m}$; $k_n=7\times 10^5\text{ N/m}^3$; $\alpha=0.8\text{ N}$. 两个稳定平衡点为 $\pm\sqrt{k_1/k_n}$, 分别为 $\delta_n=-0.028\text{ m}$, $\delta_p=0.028\text{ m}$.

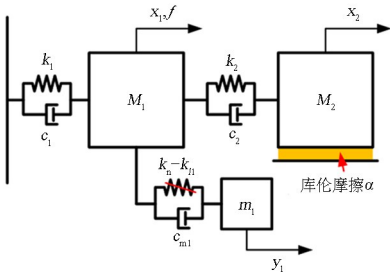


图 4 含 BNES 的 3 自由度系统
Fig. 4 3 DOFs system with BNES

采样频率为 512 Hz,时间长度为 50 s. 在 m_1 处受到均方根值为 20 N 的零均值高斯随机力激励. 使用四阶龙格-库塔算法数值方法计算状态变量. 在输出信号中施加零均值高斯分布噪声,噪声等级分别为 5%、10%、15%和 20%. 附加 BNES 与安装点的相对位移响应如图 5(a)所示. 从图中可以看出,相对位移表现出明显的双稳态特性.

使用高斯核密度估计方法,估计了不同噪声等级下相对位移的概率密度分布图,如图 5(b)所示.

以峰值点为稳定平衡点的估计结果,列于表 1. 结果表明,估计值与真实稳定平衡点较为一致,其中误差最大的平衡点为 0.0257,相对误差为-8.2%.

将附加振子的零参考移动至表 1 估计的稳定平衡点处,以 δ_n 为例,附加振子新的位移响应信号为 $z_1=y_1-\delta_n$,则移动后系统的输入和输出分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [f \quad -\text{sign}(\dot{x}_2) \quad (x_1 - z_1)^3 \quad (x_1 - z_1)^2]^\text{T} \\ \mathbf{y} &= [x_1 \quad x_2 \quad z_1]^\text{T} \end{aligned} \tag{21}$$

将参考点平移后的输出响应信号代入时域非线性子空间算法中. 通过奇异值图判定潜在线性系统的阶次,如图 6 所示,模型在阶次 6 和 7 之间存在 4 个数量级的数值跳跃,所以系统阶次为 $n=6$.

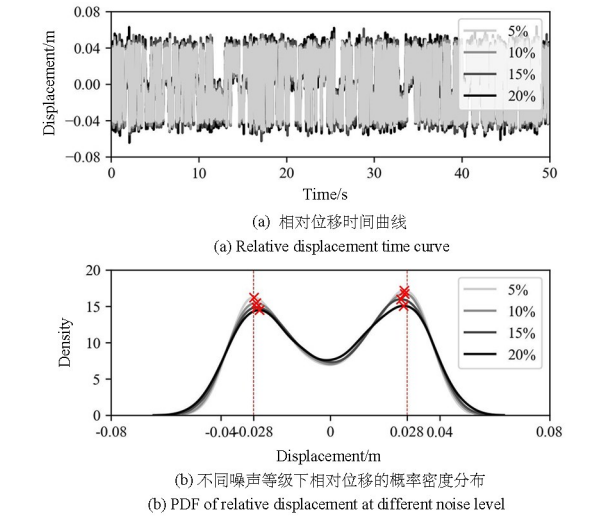


图 5 BNES 位移响应与平衡点估计
Fig. 5 BNES displacement response and equilibrium point estimation

表 1 算例 1 不同噪声等级下稳定平衡点的估计结果
Table 1 Estimation results of stable equilibrium point under different noise level in case 1

平衡点	真实值/m	估计值/m			
		5%	10%	15%	20%
δ_n	-0.028	-0.0279	-0.0271	-0.0269	-0.0259
δ_p	0.028	0.0269	0.0271	0.0257	0.0267

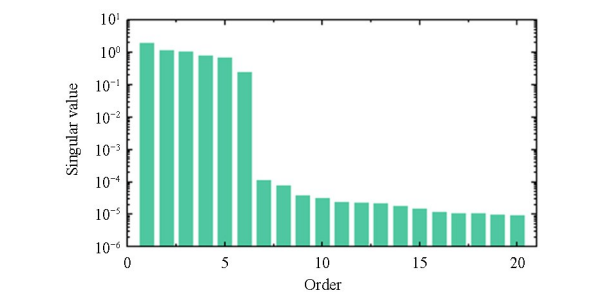


图 6 系统奇异值谱
Fig. 6 Singular value spectrum

基于式(20),获得非线性系数的随频率变化的实部和虚部曲线,如图7所示.实线表示实部,虚线表示虚部,黑色水平细虚线为参考值.仅在虚部值稳定且接近零的情况下,对应频率下的实部值可作为可靠估计值,这一范围通过红色背景进行标记.图8展示了参数可靠估计结果的相对误差统计结果.

在不同平衡点下,随着噪声的增加,估计结果呈现出一致的增长趋势.在20%噪声等级下,非线性刚度的平均相对误差分别为21.6%和21.02%,而库仑阻尼的平均相对误差为14.52%和10.18%.值得注意的是,非线性刚度结果的误差区间较小,表现出较高的稳定性.

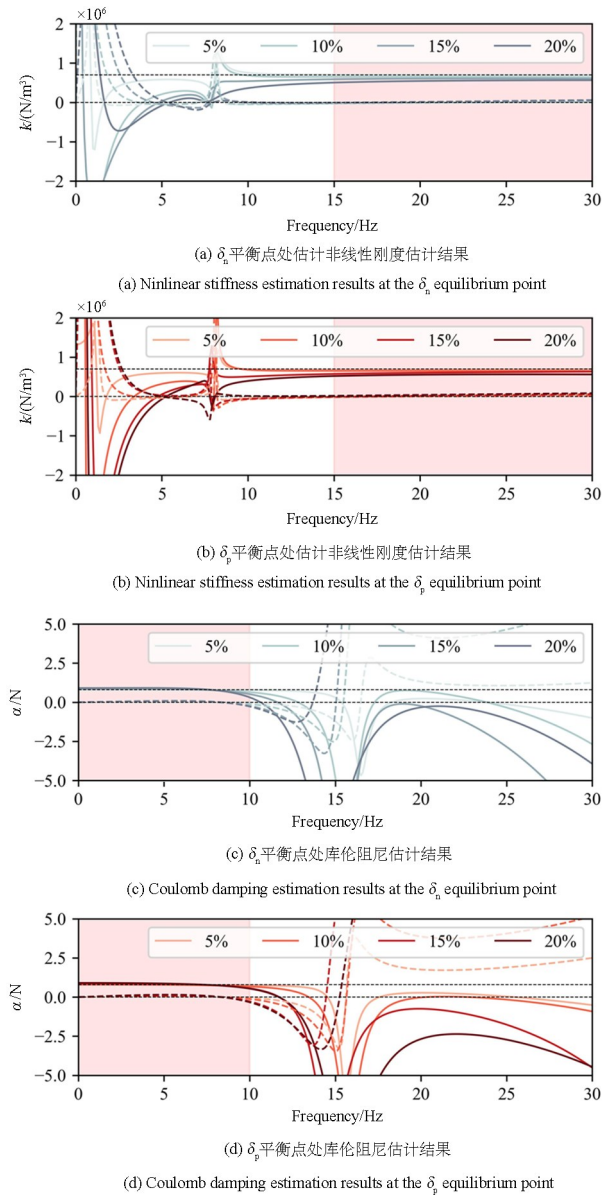


图7 不同平衡点处非线性参数估计结果

Fig.7 Nonlinear parameter estimation results at different equilibrium points

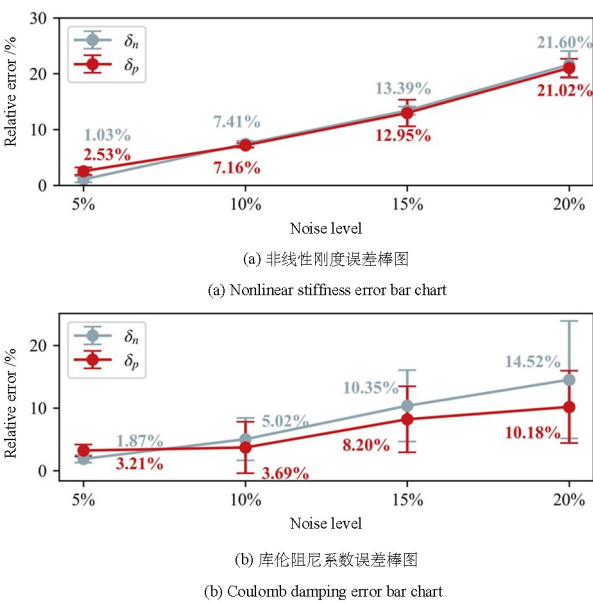


图8 不同噪声等级下非线性参数误差棒图

Fig.8 Error bar chart of nonlinear parameter errors at different noise levels

为了研究平衡点估计误差对结果的影响,本研究以正平衡点0.028作为基准,分析其在 $0.028 \pm 11\%$ 误差范围内(步长为0.5%)对估计结果相对误差的灵敏度.结果如图10所示,采用中心差分方法估计的灵敏度曲线平滑,且幅值均小于1.当平衡点误差为负时,刚度的估计结果相对误差的灵敏度基本保持不变,且接近0;在其他区间内,灵敏度随噪声等级增加呈线性增长趋势.

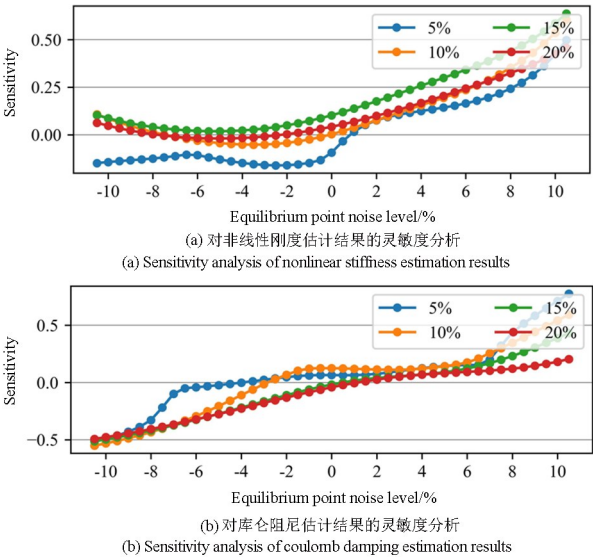


图9 平衡点结果对估计结果的灵敏度分析

Fig.9 Sensitivity analysis of equilibrium point results on estimated results

3.2 算例2:含BNES的复杂多自由度系统

为进一步验证本文所提方法在具有多个双稳

态 NES 的复杂结构中的参数识别效果,本文以一个 7 自由度系统为例进行测试.该系统由一个 5 自由度主体系统组成,并在质量块 1 和质量块 4 处分别附加一个 BNES,如图 9 所示.在 M_1 和 M_3 处分别存在库伦摩擦单元.系统的具体参数为: $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M_5 = 0.2 \text{ kg}$, $M_6 = M_7 = 0.1 \text{ kg}$; $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 1000 \text{ N/m}$, $k_{1,3} = k_{2,4} = 900 \text{ N/m}$, $k_{11} = -600 \text{ N}$, $k_{12} = -750 \text{ N}$; $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0.5 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $c_{1,3} = c_{2,4} = 0.6 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $c_{m1} = c_{m4} = 0.65 \text{ N} \cdot \text{s/m}$; $k_{n1} = 10^6 \text{ N/m}^3$, $k_{n2} = 10^6 \text{ N/m}^3$; $\alpha = \beta = 2 \text{ N}$.其中 M_6 和 M_7 的稳态点分别为 $\delta_{n1} = -0.0245 \text{ m}$, $\delta_{p1} = 0.0245 \text{ m}$, $\delta_{n2} = -0.0274 \text{ m}$ 和 $\delta_{p2} = 0.0274 \text{ m}$.

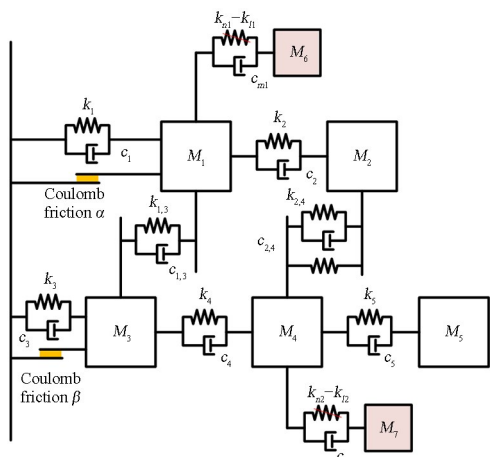


图 10 含 BNES 的复杂多自由度系统

Fig. 10 Complex multi-DOF system with BNES

在 M_2 处施加均方根值为 50 N 的零均值高斯随机激励,采样频率为 1024 Hz,仿真时间长度为 50 s 的位移和速度响应.在输出信号中,添加 5%~20%,四个等级的零均值高斯随机噪声.

计算 BNES 的相对位移的概率密度函数,使用峰值点法获得稳态位置结果及其相对误差,如图 11(b)和图 11(d).其中结果误差最大为 -7.6%.由于噪声服从零均值高斯分布假设,因此估计值相对于真实值的绝对值更小.

分别以稳定平衡点 δ_{n1} 和 δ_{n2} 为例,移动参考点后,附加振子新的位移响应信号为 $z_1 = y_1 - \delta_{n1}$, $z_2 = y_4 - \delta_{n2}$,移动后系统的输入和输出分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [f \quad -\text{sign}(\dot{x}_1) \quad -\text{sign}(\dot{x}_3) \quad -(x_1 - z_1)^3 \\ &\quad -(x_1 - z_1)^2 \quad -(x_4 - z_2)^3 \quad -(x_4 - z_2)^2] \\ \mathbf{y} &= [x_1 \cdots x_5 \quad z_1 \quad z_2] \end{aligned} \quad (22)$$

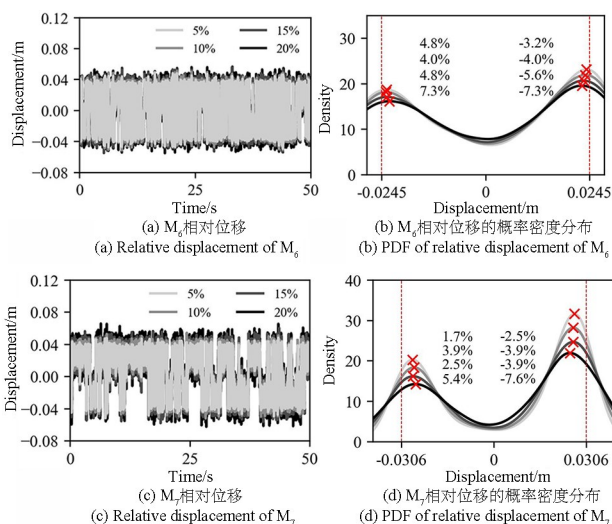


图 11 两个 BNES 的相对位移与其平衡点估计

Fig. 11 Two BNES relative displacement response and equilibrium point estimation

根据系统奇异值谱设定系统阶次为 14.在不同噪声等级下估计得到非线性系数的相对误差如图 12.每个噪声等级下,估计的 4 个非线性系数分别用图例表示.

每个非线性系数分别采用 4 个稳态点组合进行估计,分别为 $\delta_{n1}\delta_{n2}$ 、 $\delta_{n1}\delta_{p2}$ 、 $\delta_{p1}\delta_{n2}$ 和 $\delta_{p1}\delta_{p2}$,这对应图 12 中参数在单个噪声环境获得的 4 个估计值.每个噪声环境下不同稳态点组合估计结果差异较小,但由于估计结果同时受稳态点估计误差和信号噪声的影响,随着噪声增加,误差棒长度和散点分散程度也相应地增加,但相对误差总体低于 20%.

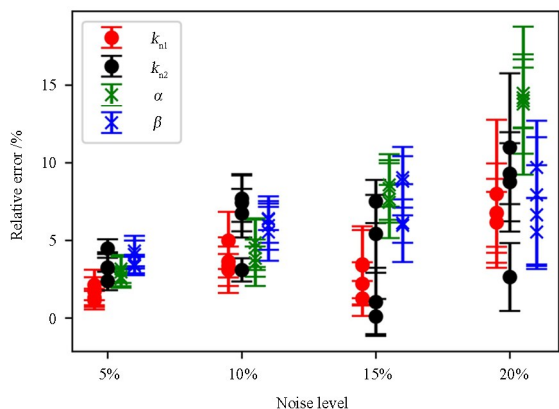


图 12 算例 2 不同噪声等级下的识别结果平均相对误差

Fig. 12 Average relative error of identification results under different noise levels in Case 2

4 结论

本文研究了含双稳态非线性能量阱系统的辨

识问题. 首先基于稳态位置特点, 基于高斯核密度估计, 从随机激励下的数据发现稳态点位置. 移动参考点到稳态点位置, 使非线性子空间辨识的线性系统部分在零位置局部稳定. 从而可以有效估计出BNES的立方刚度系数. 但是本文考虑的BNES模型由立方刚度和负线性刚度组成. 对于更复杂的实际结构, 如非连续的非线性刚度, 本文方法无法正常使用. 主要结论如下:

(1) 提出的高斯核密度的峰值点方法可以有效地识别出随机激励下双稳态系统的稳态点位置. 在20%等级噪声环境, 相对误差最大不超过约8.2%.

(2) 研究了稳定平衡点对估计结果的灵敏度, 结果表明, 在正负10%平衡点估计误差内, 相对误差的灵敏度皆小于1.

(3) 提出方法可以有效辨识含BNES和库仑摩擦的系统中的立方刚度系数与库仑阻尼系数. 在噪声环境下20%, 估计结果相对误差为20%左右.

参考文献

- [1] DING H, CHEN L Q. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3061–3107.
- [2] CHIACCHIARI S, ROMEO F, MCFARLAND D M, et al. Vibration energy harvesting from impulsive excitations via a bistable nonlinear attachment [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2017, 94: 84–97.
- [3] BENACCHIO S, MALHER A, BOISSON J, et al. Design of a magnetic vibration absorber with tunable stiffnesses [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 85(2): 893–911.
- [4] 高原, 张振, 方勃. 基于负刚度惯容型非线性能量汇的整星振动抑制[J]. *动力学与控制学报*, 2024, 22(1): 87–96.
GAO Y, ZHANG Z, FANG B. Whole-spacecraft vibration suppression based on negative stiffness inertial nonlinear energy sink [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2024, 22(1): 87–96. (in Chinese)
- [5] 童俊辉, 彭剑, 左云, 等. 基于非线性能量阱的深海柔性张力腿的振动抑制[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(1): 30–35.
TONG J H, PENG J, ZUO Y, et al. Vibration suppression of deep-sea flexible tension legs based

- on nonlinear energy sink [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(1): 30–35. (in Chinese)
- [6] 王国旭, 丁虎, 陈立群. 简谐激励下双弹簧非线性能量阱的优化[J]. *动力学与控制学报*, 2021, 19(6): 46–51.
WANG G X, DING H, CHEN L Q. Optimization of a nonlinear energy sink with double springs and harmonic excitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(6): 46–51. (in Chinese)
- [7] 许俊杰, 陈潇雨, 范胜波, 等. 磁悬浮双稳结构非线性减振与俘能特性研究[J/OL]. *振动工程学报*, 1–10 [2025-04-18]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20240828.1609.003.html>.
XU J J, CHEN X Y, FAN S B, et al. Nonlinear vibration mitigation and energy harvesting characteristics of the magnetic levitating bistable structure [J/OL]. *Journal of Vibration Engineering*, 1–10 [2025-04-18]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20240828.1609.003.html>.
- [8] 姚红良, 刘帅, 王钰玮, 等. 可调永磁双稳态非线性能量阱及应用研究[J]. *振动与冲击*, 2020, 39(3): 127–133, 141.
YAO H L, LIU S, WANG Y W, et al. Adjustable permanent magnet bi-stable nonlinear energy sink and its application [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, 39(3): 127–133, 141. (in Chinese)
- [9] 王胜杰, 韩翻珍, 郭翔鹰. 新型双稳态屈曲梁结构的低频跳跃稳定性分析[J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2022, 43(9): 1336–1341.
WANG S J, HAN F Z, GUO X Y. The low-frequency snap-through stability analysis of novel bi-stable buckling beam structures [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2022, 43(9): 1336–1341. (in Chinese)
- [10] 郑宜生, 陈逸涵, 瞿叶高, 等. 双稳态压电超结构的超传输滞回效应与非互易编码特性[J]. *力学学报*, 2024, 56(7): 2103–2113.
ZHENG Y S, CHEN Y H, QU Y G, et al. Supra-transmission hysteresis and nonreciprocal codes in a piezoelectric metastructure with bistable-circuit shunts [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(7): 2103–2113. (in Chinese)
- [11] 方虹斌, 吴海平, 刘作林, 等. 折纸结构和折纸超材料动力学研究进展[J]. *力学学报*, 2022, 54(1): 1–38.
FANG H B, WU H P, LIU Z L, et al. Advances in

- the dynamics of origami structures and origami metamaterials [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(1): 1—38. (in Chinese)
- [12] NOËL J P, KERSCHEN G. Nonlinear system identification in structural dynamics: 10 more years of progress [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 2—35.
- [13] KERSCHEN G, WORDEN K, VAKAKIS A F, et al. Past, present and future of nonlinear system identification in structural dynamics [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(3): 505—592.
- [14] CRAWLEY E F, O'DONNELL K J. Force-state mapping identification of nonlinear joints [J]. AIAA Journal, 1987, 25(7): 1003—1010.
- [15] SADEQI A, MORADI S. Nonlinear system identification based on restoring force transmissibility of vibrating structures [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 172: 108978.
- [16] LIU Q H, HOU Z H, ZHANG Y, et al. Nonlinear restoring force identification of strongly nonlinear structures by displacement measurement [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2022, 144(3): 031002.
- [17] MOHAMMAD K S, WORDEN K, TOMLINSON G R. Direct parameter estimation for linear and nonlinear structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 1992, 152(3): 471—499.
- [18] MA Z S, WANG B, ZHANG X, et al. Nonlinear system identification of folding fins with freeplay using direct parameter estimation [J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2019, 2019(1): 3978260.
- [19] SUN B, CAI Q Y, PENG Z K, et al. Variable selection and identification of high-dimensional nonparametric nonlinear systems by directional regression [J]. Nonlinear Dynamics, 2023, 111(13): 12101—12112.
- [20] 彭志科, 程长明. Volterra 级数理论研究进展与展望[J]. 科学通报, 2015, 60(20): 1874—1888.
- PENG Z K, CHENG C M. Volterra series theory: a state-of-the-art review [J]. Chinese Science Bulletin, 2015, 60(20): 1874—1888. (in Chinese)
- [21] CHENG C M, BAI E W, PENG Z K. Identification of sparse Volterra systems: an almost orthogonal matching pursuit approach [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2022, 67(4): 2027—2032.
- [22] 程长明. 基于 Volterra 级数的非线性系统辨识及其应用研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2015.
- CHENG C M. Volterra series based nonlinear system identification and its application [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015. (in Chinese)
- [23] MARCHESIELLO S, GARIBALDI L. A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(1): 81—101.
- [24] BRUNTON S L, PROCTOR J L, NATHAN KUTZ J. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2016, 113(15): 3932—3937.
- [25] LIU Q H, CAO J Y, ZHANG Y, et al. Interpretable sparse identification of a bistable nonlinear energy sink [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 193: 110254.
- [26] LIN M M, CHENG C M, PENG Z K, et al. Nonlinear dynamical system identification using the sparse regression and separable least squares methods [J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 505: 116141.
- [27] LIN M M, CHENG C M, ZHANG G Z, et al. Identification of Bouc-Wen hysteretic systems based on a joint optimization approach [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2022, 180: 109404.
- [28] MARCHESIELLO S, GARIBALDI L. Identification of clearance-type nonlinearities [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2008, 22(5): 1133—1145.
- [29] NOËL J P, KERSCHEN G. Frequency-domain subspace identification for nonlinear mechanical systems [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2013, 40(2): 701—717.
- [30] LIU J, LI B, MIAO H H, et al. A modified time domain subspace method for nonlinear identification based on nonlinear separation strategy [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 94(4): 2491—2509.
- [31] LIU Q H, CAO J Y, HU F Y, et al. Parameter identification of nonlinear bistable piezoelectric structures by two-stage subspace method [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 105(3): 2157—2172.
- [32] ANASTASIO D, MARCHESIELLO S, KER-

- SCHEN G, et al. Experimental identification of distributed nonlinearities in the modal domain [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 458: 426—444.
- [33] ZHU R, MARCHESIELLO S, ANASTASIO D, et al. Nonlinear system identification of a double-well Duffing oscillator with position-dependent friction [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2022, 108(4): 2993—3008.
- [34] WEI S, PENG Z K, DONG X J, et al. A nonlinear subspace-prediction error method for identification of nonlinear vibrating structures [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 91(3): 1605—1617.
- [35] ZHU R, FEI Q G, JIANG D, et al. Bayesian model selection in nonlinear subspace identification [J]. *AIAA Journal*, 2021, 60(1): 92—101.
- [36] ZHU R, CHEN S F, JIANG D, et al. Enhancing nonlinear subspace identification using sparse Bayesian learning with spike and slab priors [J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2024, 12(3): 3021—3031.
- [37] ZHU R, JIANG D, MARCHESIELLO S, et al. Automatic nonlinear subspace identification using clustering judgment based on similarity filtering [J]. *AIAA Journal*, 2023, 61(6): 2666—2674.
- [38] JIANG D, LI A, WANG Y S, et al. Integrating automatic order determination with response prediction error minimization for nonlinear subspace identification in structural dynamics [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2024, 112(24): 21881—21900.
- [39] ANASTASIO D, MARCHESIELLO S. Nonlinear frequency response curves estimation and stability analysis of randomly excited systems in the subspace framework [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(9): 8115—8133.
- [40] YAO Y, MA Z S, DING Q, et al. Stiffness identification of beam structures with elastic foundations through the global mode method and time-domain nonlinear subspace method [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2025, 113(5): 4447—4464.
- [41] LI X L, WEI S, DING H, et al. A subspace parameter identification method for nonlinear structures under oversampling conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 589: 118590.
- [42] 杜昌琦. 基于神经网络的随机双稳态系统参数估计 [D]. 太原: 山西大学, 2024.
- DU C Q. Parameter estimation of stochastic bistable systems based on neural [D]. Taiyuan: Shanxi University, 2024. (in Chinese)