

基于骨架线和贝叶斯估计的单自由度 非线性系统参数辨识*

闫凯¹ 李旭龙¹ 魏莎^{1,2,3†} 丁虎^{1,2,3} 陈立群^{1,2,3}

(1. 上海大学 力学与工程科学学院, 上海 200444)

(2. 上海市力学信息学前沿科学研究基地, 上海 200072)

(3. 上海飞行器力学与控制研究院, 上海 200092)

摘要 本文提出一种基于骨架线和包络线的单自由度非线性系统参数辨识方法. 该方法将系统骨架线和包络线作为观测数据, 结合其解析表达式, 利用贝叶斯估计得到物理参数的后验联合分布. 随后, 采用马尔可夫蒙特卡罗抽样得到各物理参数的边缘概率分布. 这避免了复杂的时域数值积分, 从而提高了计算效率. 此外, 考虑噪声的影响, 比较了希尔伯特变换和过零法在估计骨架线和包络线时的精度. 为验证所提方法的有效性, 将其应用于识别 Duffing 振子, 并讨论了不同强度噪声的影响. 结果表明, 所提方法能够在噪声环境下识别单自由度非线性系统参数且具有较高精度.

关键词 参数辨识, 非线性系统, 贝叶斯估计, 马尔可夫蒙特卡罗抽样, 骨架线

中图分类号: O313

文献标志码: A

Parameter Identification of Single-Degree-of-Freedom Nonlinear Systems Based on Backbone Curves and Bayesian Estimation*

Yan Kai¹ Li Xulong¹ Wei Sha^{1,2,3†} Ding Hu^{1,2,3} Chen Liqun^{1,2,3}

(1. School of Mechanics and Engineering Science, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

(2. Shanghai Frontier Science Center of Mechanoinformatics, Shanghai 200072, China)

(3. Shanghai Institute of Aircraft Mechanics and Control, Shanghai 200092, China)

Abstract This paper proposes a parameter identification method for single-degree-of-freedom nonlinear systems based on backbone and envelope curves. The method uses the system's backbone and envelope curves as observational data, combining them with their analytical expressions to obtain the posterior joint distribution of physical parameters through Bayesian estimation. Subsequently, the Markov Chain Monte Carlo method is employed to derive the marginal probability distributions of each physical parameter. The proposed approach avoids the need for complex time-domain numerical integration, significantly improving computational efficiency. Furthermore, the effect of noise is considered, and the results of the Hilbert transform and the zero-crossing method for estimating the backbone and envelope curves are compared. To validate the accuracy of the proposed method, it is applied to identify the Duffing oscillator with a discussion of the impact of noise at different levels. The results demonstrate that the proposed method is accurate in identifying the physical parameters of single-degree-of-freedom nonlinear systems under noisy environments.

Key words parameter identification, nonlinear system, Bayesian estimation, the Markov Chain Monte Carlo method, backbone curves

引言

在工程结构和物理系统中,物理参数识别^[1-4]指从实验或观测数据中提取未知的物理参数,如材料的弹性模量和密度.这些参数对结构设计、健康监测和故障诊断至关重要.然而,在实际应用中,由于材料不均匀性和测量噪声,结构物理参数识别问题变为不确定性问题^[5-7].因此,必须在确定性物理参数识别的基础上,进一步发展能合理反映不确定性特性的概率方法.

贝叶斯估计方法在物理参数识别中得到了广泛应用.它不仅提供了参数的最优估计,还揭示了参数的概率分布,从而有效地解释了物理参数识别中的不确定性问题. Beck^[8]首先提出将贝叶斯估计理论引入系统参数识别的研究,并构建了基于贝叶斯估计的参数识别框架.在此框架下, Vanik^[7]开发了一种基于概率的健康监测方法. Beck 和 Katafygiotis^[9]提出了一种识别物理参数的贝叶斯估计渐近逼近方法,近似地估计了物理参数后验联合分布,得到了物理参数估计值.

在非线性系统中,基于位移响应的贝叶斯估计通常需要随时间进行数值积分.这一过程需对微分方程进行反复迭代计算,导致计算成本显著增加.为缓解计算成本,常用方法包括采用适合并行化的代理模型与算法^[10,11],或利用精心筛选的实验数据集^[12,13]以减少数据处理量.尽管如此,对于包含大量未知参数的大型非线性系统,基于贝叶斯理论的参数辨识方法仍然需要较大的计算成本.

本文提出了一种无需依赖模型代理或减少实验数据的新方法,可实现高效贝叶斯系统识别.该方法基于实验测得的骨架线和包络线及其解析表达式,推断参数估计值.这些解析表达式的形式简单,避免了复杂的时域数值积分.相比于以位移响应数据为观测数据的方法,该方法显著降低了计算成本.

1 单自由度非线性系统骨架线和包络线的估计

对于自由振动的单自由度非线性系统,其运动

方程可以表示为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + f(x) = 0 \quad (1)$$

其中 m 和 c 分别表示系统质量和阻尼; $f(x)$ 是系统的非线性恢复力.

在获得系统的时程响应后,可通过希尔伯特变换^[14,15]或过零检测法^[16,17]提取包络线与骨架线.本文将提取的骨架线和包络线作为观测数据.

希尔伯特变换是一种重要的信号处理工具,可以将实信号变换为解析信号,用于提取信号的瞬时特性(如瞬时振幅和瞬时频率).自由衰减响应 $x(t)$ 的复解析时间信号表示如下

$$w(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) \quad (2)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$; $\tilde{x}(t)$ 表示自由振动信号的希尔伯特变换.包络线可由式(2)计算

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (3)$$

瞬时相位

$$\phi(t) = \arctan[\tilde{x}(t)/x(t)] \quad (4)$$

骨架线由下式计算

$$\omega_d(t) = \dot{\phi}(t) \quad (5)$$

过零法是一种简单高效的信号分析方法,常用于测量信号的频率、周期和特征点.通过检测信号在时间域穿越零点的时刻,可有效提取周期性信号的信息.具体步骤为取含高斯白噪声的位移信号 $x(t)$,检测零点并用 t_k 表示其时刻.为消除噪声引入的虚假零点,可引入以下准则进行处理^[18]

$$t_{k+1}^0 - t_k^0 > \frac{T}{4} \quad (6)$$

随后,采用峰值拾取程序计算相邻过零点之间的最大幅度并记录其时间,以给出包络线的估计.提取 t_k 时刻信号频率

$$f(t_{m(k)}^0) = \frac{1}{(t_{m,k+1}^0 - t_{m,k-1}^0)} \quad (7)$$

将估计的包络与瞬时频率相结合,得到骨架线.

在非线性振动分析中,骨架线和包络线的近似解析解通常使用谐波平衡法、多尺度法等方法进行推导^[19].在得到骨架线和包络线的近似解析解后将其作为模型结构进行参数估计.

2 基于贝叶斯估计的参数辨识

本文采用贝叶斯估计对非线性系统参数进行

辨识,贝叶斯公式为

$$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}, M) = \frac{p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, M) p(\boldsymbol{\theta} | M)}{p(\mathbf{z} | M)} \quad (8)$$

其中, $\boldsymbol{\theta}$ 为待估计参数向量, 本例中 $\boldsymbol{\theta}_1 = [c]$, $\boldsymbol{\theta}_2 = [k_1, k_3]$; $\mathbf{z}$ 为观测数据向量, 在本例中 $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots, z_N\}$ 由 N 个观测点数据组成, 本例中表示估计的包络线或骨架线; M 表示模型结构, 本例为包络模型或骨架模型。

$p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{z}, M)$ 是参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的后验概率分布, 表示在观察到测量数据 $\mathbf{z}$ 后, 参数 $\boldsymbol{\theta}$ 发生的概率; $p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, M)$ 为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的似然函数, 表示在给定的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 条件下观测到数据 $\mathbf{z}$ 的概率; $p(\boldsymbol{\theta} | M)$ 为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验概率分布, 表示进行数据测量之前所知道的关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的先验信息, 通常由工程经验确定, 本例中采用均匀分布作为无信息先验的合理选择; $p(\mathbf{z} | M)$ 为正则化常数, 表示为:

$$p(\mathbf{z} | M) = \int p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, M) p(\boldsymbol{\theta} | M) d\boldsymbol{\theta} \quad (9)$$

假设预测误差服从期望为 0、方差为 σ^2 的正态分布, 则似然函数为

$$p(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}, M) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N [z_n - y_n(\boldsymbol{\theta})]^2\right\} \quad (10)$$

其中 $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, y_N\}^T$ 为正向分析响应向量, 本例中表示解析包络线或骨架线表达式; σ^2 为未知方差. 当先验分布假设为均匀分布, 似然函数采用式(10)时, 贝叶斯理论的主要挑战在于正则化常数 $p(\mathbf{z} | M)$ 的积分复杂性. 这需借助马尔可夫链蒙特卡罗方法进行抽样近似. 此外, 参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 中包含多个未知参数, 且每个参数的边际分布涉及高维积分. 为解决这一问题, 本文采用了 Metropolis-Hastings 算法.

假设初始参数为 $\boldsymbol{\theta}_1^{(0)} = \{c^{(0)}\}$, $\boldsymbol{\theta}_1^{(*)} = \{k_1^{(*)}\}$, $k_2^{(*)}$, 候选参数向量 $\boldsymbol{\theta}_1^{(*)}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2^{(*)}$ 可以从均匀分布中生成. 比如, $k_3^{(*)}$ 可由 $k_3^{(*)} = k_3^{(i-1)} + T_{k_3} U(-1, 1)$ 产生, 其中 $k_3^{(i-1)}$ 是当前值; T_{k_3} 是 k_3 的调整参数; $U(-1, 1)$ 是 $[-1, 1]$ 的均匀分布. 根据马尔可夫链平稳分布的详细平衡条件, 对于候选项 $k_3^{(*)}$ 的接受或拒绝条件为

$$r = \min\left\{\frac{\pi(k_3^{(*)}) g(k_3^{(i-1)} | k_3^{(*)})}{\pi(k_3^{(i-1)}) g(k_3^{(*)} | k_3^{(i-1)})}, 1\right\} \quad (11)$$

其中 $\pi(k_3) \propto p(k_3) p(\mathbf{z} | k_3, \sigma^2)$ 是 k_3 的后验分布; $g(k_3^{(*)} | k_3^{(i-1)}) = 1/2T_{k_3}$ 表示区间长度为 $2T_{k_3}$ 的

均匀分布, 用作过渡分布. 由于过渡分布 $g(k_3^{(*)} | k_3^{(i-1)})$ 和先验分布 $p(k_3)$ 均为均匀分布, 因此有 $g(k_3^{(i-1)} | k_3^{(*)}) = g(k_3^{(*)} | k_3^{(i-1)})$ 和 $p(k_3^{(*)}) = p(k_3^{(i-1)})$. 式(11)可以简化为

$$r = \min\{p(\mathbf{z} | k_3^{(*)}, \sigma^2) / p(\mathbf{z} | k_3^{(i-1)}, \sigma^2), 1\} \quad (12)$$

如果 r 大于从 $[0, 1]$ 区间采样的均匀随机数, 则接受候选值; 否则, 拒绝候选值. 在公式(12)的计算过程中, 方差 σ^2 可以直接从逆伽马分布中提取, 其形式为^[20]

$$\text{Inv-Gamma}\{N/2 + \alpha, \beta + \sum_{n=1}^N [z_n - y_n(\boldsymbol{\theta}_2)]^2 / 2\} \quad (13)$$

其中 α 和 β 为逆伽马分布中的超参数^[21].

3 数值算例

以自由振动 Duffing 振子为例, 系统的动力学方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = 0 \quad (14)$$

其中质量 $m = 1.5$ kg; 阻尼 $c = 0.8$ Ns/m; 线性刚度 $k_1 = 6000$ N/m; 三次非线性刚度 $k_3 = 7 \times 10^6$ N/m³.

采用四阶龙格-库塔法求解系统的位移响应, 假设初始位移为 18 mm. 在响应中加入噪声强度 10% 的高斯白噪声, 以模拟测量过程中的噪声干扰. 系统位移响应如图 1 所示. 其中灰色线代表加入噪声的位移响应, 红色线代表无噪声位移响应. 可以看出 Duffing 振子的振动近乎指数衰减, 噪声在响应的末尾影响更大.

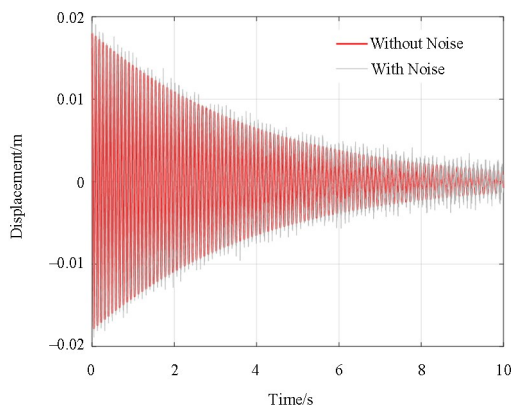


图1 加入 10% 高斯白噪声与无噪声的位移响应

Fig. 1 Displacement response with 10% Gaussian white noise and without noise

由希尔伯特变换和过零法提取的含噪声位移响应的包络线如图 2 所示. 其中, 红色线为无噪声状态下的理想包络线, 灰色线为由希尔伯特变换估

计的包络线,蓝色圆圈为由过零法估计的包络线.可见,高斯白噪声存在时,过零法估计的包络线被高估,而希尔伯特变换对包络的估计均匀分布在无噪声包络线周围,希尔伯特变换对包络线的估计较为准确.

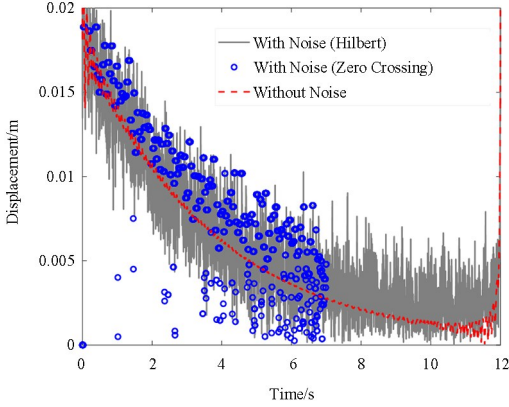


图2 自由衰减信号的包络估计

Fig. 2 Envelope estimation of freely attenuated signals

由希尔伯特变换和过零法提取的含噪声位移响应的骨架线如图3所示.其中,绿色圆圈为无噪声状态下的骨架线,蓝色点为希尔伯特变换估计的骨架线,红色圆圈为过零法估计的骨架线.结果表明,过零法对骨架线的估计较为准确.

综上所述,希尔伯特变换对包络线的前半段估计较好,过零法对骨架线的估计较为准确.因此,采用希尔伯特变换法估计包络线,过零法估计骨架线,作为参数估计的观测数据.

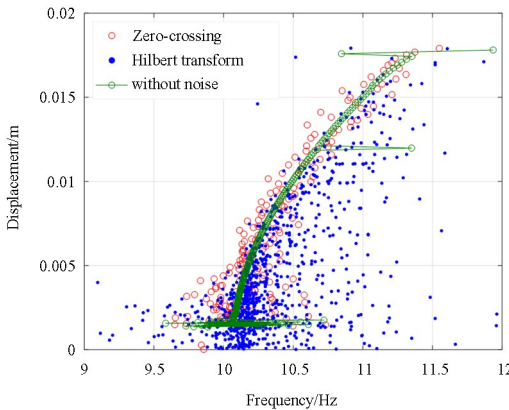


图3 自由衰减信号的骨架估计

Fig. 3 Backbone estimation of freely attenuated signals

自由振动 Duffing 振子的包络线的近似解析解为

$$A = A_0 e^{-\zeta \omega_n t} \quad (15)$$

其中 $\omega_n = \sqrt{k_1/m}$ 为无阻尼固有频率; $\zeta = c/2\sqrt{mk_1}$ 为基础线性系统的阻尼比; A_0 为衰减开始时

振动的位移幅度.将包络线两边取对数得

$$\ln(A) = \ln(A_0) - ct/2m \quad (16)$$

骨架线表达式如下

$$\omega_d^2(t) = \omega_{dd}^2(t) + \frac{3}{4} \frac{k_3}{m} A^2(t) \quad (17)$$

其中 $\omega_{dd} = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \approx \omega_n$, 是基础线性系统的阻尼固有频率; ω_n 是基础线性系统的无阻尼固有频率.

分别模拟 5%、10% 和 15% 噪声强度的位移响应,并提取包络线和骨架线作为观测数据.以包络解析解 $\log(A) \approx \log(A_0) - ct/2m$ 和骨架解析解 $\omega_d^2(t) = \omega_{dd}^2 + (3k_3/4m) \cdot A^2(t)$ 为模型结构.设置参数的先验范围为 $c \in [0, 2]$ Ns/m, $k_1 \in [0, 10000]$ N/m, $k_3 \in [0, 10^8]$ N/m³.不同噪声强度下的各参数后验概率均值和 95% 置信区间如表 1 所示.可以发现,不同噪声强度下各参数后验概率的均值均接近真实值.图 4 给出了基于包络线估计的参数 c 的后验概率密度图.基于骨架线估计的参数 k_1 和 k_3 的后验概率密度图分别如图 5、图 6 所

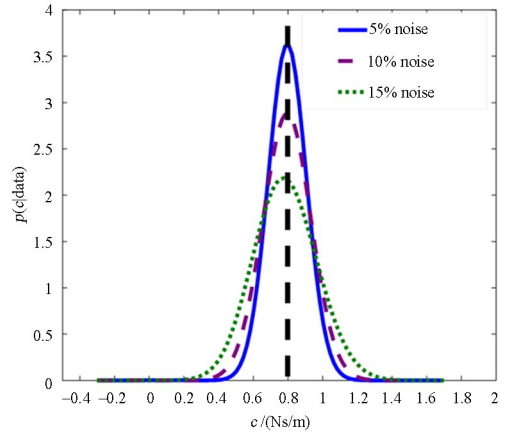


图4 不同噪声强度下估计的阻尼 c 后验概率密度

Fig. 4 Posterior probability density of damping c estimated at different noise intensities

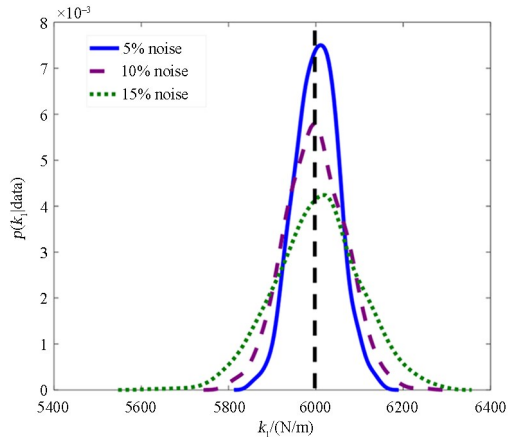


图5 不同噪声强度下估计的 k_1 的后验概率密度

Fig. 5 Posterior probability density of damping k_1 estimated at different noise intensities

表 1 结构物理参数识别结果
Table 1 Identification results of the physical parameters of the structure

物理参数	真实值	5%噪声		10%噪声		15%噪声	
		均值	95%置信区间	均值	95%置信区间	均值	95%置信区间
$c/(\text{Ns/m})$	0.80	0.79	[0.69,0.89]	0.80	[0.60,1.00]	0.76	[0.49,1.09]
$k_1/(\text{N/m})$	6000	6018	[5901,6095]	5991	[5868,6135]	6025	[5796,6193]
$k_3 \times 10^{-6}/(\text{Ns/m}^3)$	7	7	[6.99,7.01]	7	[6.96,7.04]	7	[6.94,7.06]

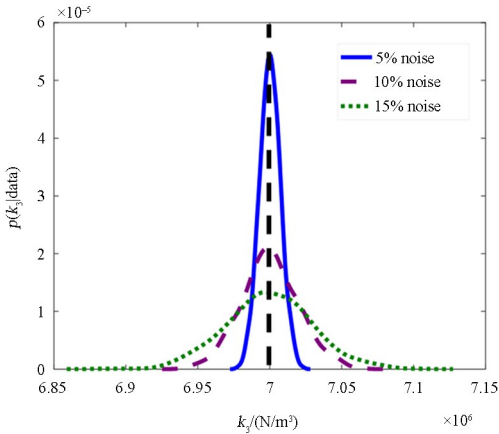


图 6 不同噪声强度下估计的 k_3 的后验概率密度
Fig. 6 Posterior probability density of damping k_3 estimated at different noise intensities

示.其中黑色虚线为参数真实值.从图中可以发现,估计的参数均值均接近真实值.随着噪声强度的增加,由所提方法得到的参数置信区间范围逐渐增大.

结果表明,所提方法能够准确、快速地识别单自由度系统参数均值并确定置信区间.

4 结论

本文将系统的骨架线和包络线作为观测数据,结合其解析表达式,通过贝叶斯估计得到物理参数的后验联合分布.随后,采用马尔可夫蒙特卡罗抽样法获取各物理参数的边缘概率分布.由于使用包络线和骨架线为模型,避免了复杂的时域数值积分,提升了计算效率.为验证所提方法的有效性和精度,本文将其应用于 Duffing 振子的参数识别,并探讨了不同噪声强度下的影响.结果表明,估计的参数均值均接近真实值.随着噪声强度的增加,由所提方法得到的参数置信区间范围逐渐增大.

参考文献

[1] ZHANG W, HAN X, LIU J, et al. A combined

sensitive matrix method and maximum likelihood method for uncertainty inverse problems [J]. Computers, Materials and Continua, 2011, 26 (3): 201–225.

[2] 邹亚晨,王平,倪德,等.直升机尾传动轴系的非线性刚度参数辨识方法[J].动力学与控制学报, 2020, 18(6): 77–83.

ZOU Y C, WANG P, NI D, et al. A method for identifying nonlinear stiffness of helicopter tail drive shaft system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(6): 77–83. (in Chinese)

[3] ZHANG W, HAN X, LIU J, et al. A computational inverse technique for uncertainty quantification in an encounter condition identification problem [J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2012, 86(5): 385–408.

[4] 张稳,吕阳,徐鉴,等.基于库伦一粘性摩擦模型的大腿假肢动力学参数辨识[J].动力学与控制学报, 2024, 22(2): 68–76.

ZHANG W, LV Y, XU J, et al. Dynamic parameter identification for an ankle-knee prosthesis with Coulomb-viscous friction [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(2): 68–76. (in Chinese)

[5] MUTO M M. Application of stochastic simulation methods to system identification [D]. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 2007.

[6] YANG C M. Statistical system identification and applications to seismic response of structures [D]. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 1996.

[7] VANIK M W. A Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring [D]. Pasadena, CA, USA: California Institute of Technology, 1997.

[8] BECK J L. Statistical system identification of structures [C]//Proceedings of the 5th International Conference on Structural Safety and Reliability. New York: ASCE, 1989, 1395–1402.

[9] BECK J L, KATAFYGIOTIS L S. Updating models

- and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124(4): 455–461.
- [10] CHING J, CHEN Y C. Transitional Markov chain Monte Carlo method for Bayesian model updating, model class selection, and model averaging [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2007, 133(7): 816–832.
- [11] 卿宏军, 谢宝娣, 张连怡. 基于贝叶斯推理的乘员约束系统参数识别[J]. *湖南大学学报(自然科学版)*, 2018, 45(8): 42–47.
QING H J, XIE B D, ZHANG L Y. Parameters identification for occupant restraint system based on Bayesian inference [J]. *Journal of Hunan University (Natural Sciences)*, 2018, 45(8): 42–47. (in Chinese)
- [12] GREEN P L. Bayesian system identification of a nonlinear dynamical system using a novel variant of Simulated Annealing [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 52: 133–146.
- [13] GREEN P L, CROSS E J, WORDEN K. Bayesian system identification of dynamical systems using highly informative training data [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2015, 56: 109–122.
- [14] FELDMAN M. Nonlinear system vibration analysis using Hilbert transform; I. Free vibration analysis method ‘Freevib’ [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1994, 8(2): 119–127.
- [15] 程乾生. 希尔伯特变换与信号的包络、瞬时相位和瞬时频率[J]. *石油地球物理勘探*, 1979, 14(3): 1–14.
- CHENG Q S. Hilbert transform and envelope, instantaneous phase, and instantaneous frequency of signals [J]. *Oil Geophysical Prospecting*, 1979, 14(3): 1–14. (in Chinese)
- [16] VAINIO O, OVASKA S J. Noise reduction in zero crossing detection by predictive digital filtering [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(1): 58–62.
- [17] JIN M S, BRAKE M R W, SONG H W. Comparison of nonlinear system identification methods for free decay measurements with application to jointed structures [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 453: 268–293.
- [18] TANG B, WANG S B, BRENNAN M J, et al. Identifying the stiffness and damping of a nonlinear system using its free response perturbed with Gaussian white noise [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2020, 26(9/10): 830–839.
- [19] TANG B, BRENNAN M J, GATTI G, et al. Experimental characterization of a nonlinear vibration absorber using free vibration [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 367: 159–169.
- [20] CIVIDINI A, MAIER G, NAPPI A. Parameter estimation of a static geotechnical model using a Bayes’ approach [J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics*, 1983, 20(5): 215–226.
- [21] NICHOLS J M, LINK W A, MURPHY K D, et al. A Bayesian approach to identifying structural nonlinearity using freedecay response: Application to damage detection in composites [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(15): 2995–3007.