

记忆信号调制随机自参数动力吸振摆系统的 共振响应分析^{*}

王德莉^{1†} 张梦¹ 韦玮¹ 裴海清² 都琳³ 徐伟³

(1. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

(2. 西北工业大学 力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(3. 西北工业大学 数学与统计学院, 西安 710072)

摘要 本文主要考虑加速度耦合态时滞反馈与自反馈信号对随机载荷下自参数动力吸振摆结构共振行为的作用机制. 引入三阶尺度摄动方法对随机自参数动力吸振摆耦合系统的确定情形、随机情形共振响应以及振态模式稳定性临界判定指标进行分析, 同步应用数值模拟技术分别从振幅—载荷确定性响应、随机载荷因子对振态时空轨迹的影响及振态随机矩响应等多层面分析评估与仿真测算系统主子振态关于记忆信号调制的共振规律. 探寻确定性矩解随载荷强度变化特征, 明确噪声强度因子基于相调制形成有界随机载荷引致系统相态轨迹的演化规律. 此外, 观察到振态随机矩保持了主子振态通过主内共振调制产生的现象; 记忆反馈信号引起系统振态矩呈现周期性及稳性交替, 系统振态敏感于耦合记忆反馈增益改变及耦合记忆振态模式引起系统能量更迭.

关键词 自参数动力吸振摆, 记忆信号, 共振响应, 多尺度分析, 有界随机激励

中图分类号: O322; O324

文献标志码: A

Resonance Response Analysis of the Stochastic Auto-Parametric Dynamic Vibration Absorption Pendulum System Modulated by Memory Signals^{*}

Wang Deli^{1†} Zhang Meng¹ Wei Wei¹ Pei Haiqing² Du Lin³ Xu Wei³

(1. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

(2. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(3. School of Mathematics and Statistics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract The mechanism of the time-delayed feedback and the auto-feedback signals of the coupled acceleration state on the resonance behavior of an auto-parametric dynamic vibration absorption pendulum structure under random loads is investigated. The third-order scale perturbation method is introduced to analyze the resonance responses in deterministic and random cases of the stochastic coupling auto-parametric dynamic vibration absorption pendulum system, as well as the critical criteria for determining the stability of vibration modes. Synchronously applying numerical simulation techniques to evaluate and simulate the resonance laws of the main and subsidiary vibration modes modulated by memory signals from multiple levels, including the deterministic amplitude-load response, the influence of the random load factor on the spatiotemporal trajectory of the system states, and the system random moment response. Further explore the characteristics of the deterministic moment solution varying with the load

2025-02-07 收到第 1 稿, 2025-02-23 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (12372033), 陕西数理基础科学研究资助项目 (22JSQ029), National Natural Science Foundation of China (12372033), Shaanxi Fundamental Science Research Project for Mathematics and Physics (22JSQ029).

[†] 通信作者 E-mail: dlwang@xauat.edu.cn

intensity, and clarify the evolution law of the system phase trajectory caused by bounded random loads formed by phase modulation based on the noise intensity factor. Besides, the random moments of system states maintain the phenomenon of main and subsidiary vibration modes through the modulation of main and internal resonances. Memory feedback signals cause the system vibration moments to exhibit periodicity and stability alternation, and system oscillation modes are sensitive to changes in the coupled memory feedback gain and this pattern leads to the system's energy to be renewed.

Key words auto-parametric dynamic vibration absorption pendulum, memory signals, resonance response, multi-scale analysis, bounded noise excitation

引言

时滞广泛甚至无可避免地存在于振动系统中。即便很小仍可能产生较大的影响,随着信息技术、人工智能、数据挖掘等技术的快速发展以及传感测试技术的日臻完善,时滞在三航事业、机械工程、土木工程以及精密仪器等诸多领域^[1-5],由以往消极的因素发展成为一种新兴的主动控振技术^[6-10]。在振动系统中,通过合理设计和灵活调整时滞及增益量,可在较宽的频率范围内达到抑振效果^[11,12]。在航空航天领域(如飞机起落架的减摆振控制)中,引入时滞半主动控制可将反共振峰振幅控制在较低水平,并几乎消除第二个共振峰^[13,14];此外,该技术还可拓展应用于发动机舱、机翼等其他振动结构的主动控制^[15-17]。智能优化算法通过提升时滞控制性能^[18],推动了其在城市轨道交通^[19]、精密加工设备等领域的应用(如高精度定位、快速响应和低延迟需求)。与此同时,这些复杂场景的应用也对时滞控制技术提出了更高要求^[20]。

复杂的振动模式中,时滞引起的非线性关联着系统的刚度、阻尼及频率等变化^[21],在某些共振情境下^[22],或增强或减弱振动幅度,表明时滞对系统振态稳定性有重要影响。分数阶时滞反馈下 Rayleigh-Duffing 系统的主共振模式^[23]表明参数激励和外激励强度变化引起不同的幅频关系多解现象。时滞反馈调控船舶摇态耦合运动^[24],使得横摇态能量向纵摇态转移。文献[25]展示了时滞反馈与多频激励联合作用下 Duffing 振子的 Hopf 分岔条件及特征。文献[21]通过优化系统结构参数及控制相关变量,对含惯容的接地刚度时滞反馈动力吸振器系统进行多目标优化设计,实现对主系统共振峰振

幅、反共振峰振幅、反共振频带对称性的有效控制。利用时滞反馈控制自参数振动系统饱和和控制减振频带^[26]及抑制扭转系统的振动^[27]。

鉴于外载环境工况的复杂性、随机性以及建立模型的精准性要求,记忆信号控制技术逐渐出现在复杂系统的研究中。文献[28,29]阐释了记忆信号技术对具有冲击约束的单自由度及双自由度耦合随机振动系统稳定性的有效控制。文献[30,31]通过确定性情形下的骨架曲线方程和不稳定区域的临界方程,分析参激作用下非线性碰撞系统的随机响应,运用矩方法估测一阶及二阶非平凡稳态矩,观察到该振动系统存在频率岛现象。文献[32,33]分类考虑了时滞对非高斯噪声下生物模型分岔行为的作用规律。文献[34]采用 Lyapunov 函数、M-矩阵等计算方法,研究了强非线性混合中立型随机时滞系统的间歇性反馈控制问题。

借鉴前述研究成果,我们考虑引入时滞反馈技术来调控自参数动力吸振摆在随机载荷下的共振行为,并聚焦探究耦合加速度式记忆信号的作用机制。本文运用(含时滞)三阶尺度摄动方法分别对自参数动力吸振摆系统主子模型展开剖析,并同步采用(均方)矩数值计算方法测算确定性及随机载荷下自参数摆系统的振态共振响应。重点探究耦合加速度态时滞信号对系统中可能出现的饱和、跳现象及临界判定范围等的作用规律,为相关工程交叉应用场景合适的共振模式设计与振动控制技术的发展铺设新路径。

1 系统振动方程描述

结合图 1 所展示的耦合记忆信号的自参数动力吸振摆模型示意图,对系统耦合微分方程组作参

数注释及无量纲化分析:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{y} + f y + h_y \dot{y} + m d [\ddot{\theta}(t - \tau_1) \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta] + z(y - y_{\tau_0}) = H(t) \\ a \ddot{\theta} + h_\theta \dot{\theta} + m d \sin \theta [g + \ddot{y}(t - \tau_2)] = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 $H(t) = Q \cos[\omega_0 t + \delta_0 W(t) + \psi]$ 为主系统所受谐波激励, ω_0 为无量纲频率, $W(t)$ 为标准维纳过程, τ_0, τ_1, τ_2 为状态时滞, y_{τ_0} 表示 $y(t - \tau_0)$, 其余参数含义见表 1. 当系统时滞设置为零时, 系统方程转为常规态.

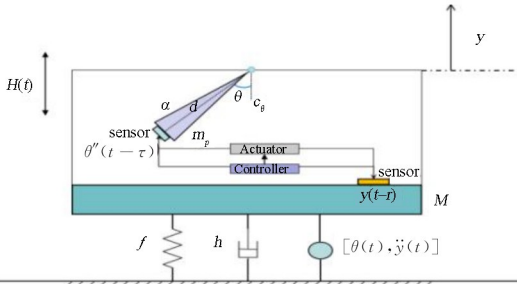


图 1 自参数动力吸振摆模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the auto-parameter dynamic vibration absorption pendulum model

表 1 系统方程中参数表示

Table 1 Parameter representations of system equations

Notation	Physical significance
M	The mass of the main vibrating object
m	The pendulum mass
θ	The pendulum angle
d	The pendulum length
$H(t)$	Bounded noise excitation
a	Moment of inertia
z	Self-feedback signal gain
$h_{y,\theta}$	Damping coefficient
f	Stiffness coefficient

2 多尺度摄动分析

为方便求解分析,引入无量纲量:

$$\dot{t} = \frac{v}{v_0} t, \alpha = \frac{v_1}{v_3}, \beta = \frac{v_2}{v_1}, x = \frac{y}{d}, \gamma = \frac{v_4}{v_3},$$

$$R = \frac{m}{M}, F = \frac{Q}{f d}, \omega_0 = \frac{v}{v_3}, \mu = \frac{m d^2}{a},$$

$$v^3 = \sqrt{\frac{f}{m}}, \xi_1 = \frac{h_y}{2 M v_3 (1 + R)}, \xi_2 = \frac{h_\theta}{2 a v_3},$$

$$v^1 = \sqrt{\frac{f}{M + m}}, v^2 = \sqrt{\frac{g}{d}}, v^4 = \sqrt{\frac{z}{M + m}},$$

$$\dot{\tau}_\lambda = \frac{v}{\omega_0} \tau_\lambda (\lambda = 0, 1, 2), \text{ 便于书写计算, 将方程}$$

中“ $\cdot$ ”去除, 则系统的无量纲化方程为

$$\begin{cases} x'' + 2\xi_1 x' + \alpha^2 x + \frac{R}{1 + R} [\theta''(t - \tau_1) \sin \theta + \theta'^2 \cos \theta] + \gamma^2 (x - x_{\tau_0}) = \alpha^2 F \cos[\omega_0 t + \delta_0 W(t) + \psi] \\ \theta'' + 2\xi_2 \theta' + \mu [\alpha^2 \beta^2 + x''(t - \tau_2)] \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (2)$$

接下来, 我们对式(2)中 x, θ 相关小量进行泰勒展开 $[(\cos \theta \approx 1 - (\theta^2/2), \sin \theta \approx \theta - (\theta^3/6)]$, 对变量重新标度, 更新系统运动方程如下

$$\begin{cases} x'' + \omega_1^2 x = \epsilon^2 \{-2\xi_1 x' - \frac{R}{1 + R} [\theta''(t - \tau_1) + \theta'^2] + \gamma^2 x_{\tau_0} + \alpha^2 F \cos[\omega_0 t + \delta_0 W(t) + \psi]\} + O(\epsilon^3) \\ \theta'' + \omega_2^2 \theta = \epsilon^2 [-2\xi_2 \theta' - \mu x''(t - \tau_2) \theta] + O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\omega_1^2 = \alpha^2 + \gamma^2, \omega_2^2 = \mu \alpha^2 \beta^2, g = \alpha^2 F$.

采用多尺度扩展^[13,24,35] 寻求方程的三阶尺度解, 系统状态可展示为

$$\begin{cases} x(t, \epsilon) = \epsilon^0 x_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^1 x_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \\ \theta(t, \epsilon) = \epsilon^0 \theta_0(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^1 \theta_1(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^2 \theta_2(T_0, T_1, T_2) + \dots \\ x_{\tau_0}(t, \epsilon) = \epsilon^0 x_{0\tau_0}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^1 x_{1\tau_0}(T_0, T_1, T_2) + \dots \\ \theta_{\tau_1}(t, \epsilon) = \epsilon^0 \theta_{0\tau_1}(T_0, T_1, T_2) + \epsilon^1 \theta_{1\tau_1}(T_0, T_1, T_2) + \dots \end{cases} \quad (4)$$

其中 $T_n = \epsilon^n t; n = 0, 1, 2, \dots$, 为尺度变量. 进一步, 通过尺度变量转化原来状态变量:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + O(\epsilon^3) \\ \frac{d^3}{dt^3} = D_0^3 + 2\epsilon [D_0^2 D_1 + D_0 D_1^2] + 2\epsilon^2 [D_0^2 (D_1 + D_2) + D_0 (D_1^2 + D_2^2)] + O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k} (k = 0, 1, 2, \dots, n)$, 联合式(4)、(5)

转化系统方程(3)为与尺度因子阶数相关的方程组

$$\epsilon^0: \begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_1^2 x_0 = 0 \\ D_0^2 \theta_0 + \omega_2^2 \theta_0 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\epsilon^1: \begin{cases} D_0^2 x_1 + 2D_0 D_1 x_0 + \omega_1^2 x_1 = 0 \\ D_0^2 \theta_1 + 2D_0 D_1 x_0 + \omega_2^2 \theta_1 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\epsilon^2: \begin{cases} D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -2D_0 D_2 x_0 - 2\xi_1 D_0 x_0 - \\ \frac{R}{1+R} D_0^2 \theta_{0r_1} \theta_0 - \frac{R}{1+R} (D_0 \theta_0)^2 + \\ \gamma^2 x_{0r_0} + g \cos[\omega_0 t + \delta_0 W(t) + \psi] \\ D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -2D_0 D_2 \theta_0 - 2\xi_2 D_0 \theta_0 - \\ \mu D_0^2 x_{0r_2} \theta_0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_0(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} a_1(T_1, T_2) \cdot \\ \exp\{i[\omega_1 T_0 + \vartheta_1(T_1, T_2)]\} + cc \\ x_{0r}(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} a_1(T_2) \cdot \\ \exp\{i[\omega_1 T_0 + \vartheta_1(T_2) - \omega_1 \tau_0]\} + cc \\ \theta_0(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} a_2(T_1, T_2) \cdot \\ \exp\{i[\omega_2 T_0 + \vartheta_2(T_1, T_2)]\} + cc \\ \theta_{0r}(T_0, T_1, T_2) = \frac{1}{2} a_2(T_2) \cdot \\ \exp\{i[\omega_2 T_0 + \vartheta_2(T_2) - \omega_2 \tau_1]\} + cc \end{cases} \quad (9)$$

列出方程组(6)~(8)解的复数表达式为

逐阶求解尺度因子关联的方程得

$$\begin{cases} D_0^2 x_2 + \omega_1^2 x_2 = -i\omega_1 a_1'(T_2) \exp\{i[\omega_1 T_0 + \vartheta_1(T_2)]\} + \omega_1 a_1(T_2) \vartheta_1'(T_2) \exp\{i[\omega_1 T_0 + \\ \vartheta_1(T_2)]\} - i\omega_1 \xi_1 a_1(T_2) \cdot \exp\{i[\omega_1 T_0 + \vartheta_1(T_2)]\} + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 a_2^2(T_2) \exp\{i[2\omega_2 T_0 + \\ 2\vartheta_2(T_2) - \omega_2 \tau_1]\} + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 a_2^2(T_2) \exp\{i[2\omega_2 T_0 + 2\vartheta_2(T_2)]\} + \gamma^2 \frac{1}{2} a_1(T_2) \cdot \\ \exp\{i[\omega_1 T_0 + \vartheta_1(T_2) - \omega_1 \tau_0]\} + \frac{g}{2} \exp\{i[\omega_0 T_0 + \delta_0 W(T_2) + \psi]\} + cc \\ D_0^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 = -i\omega_2 a_2'(T_2) \exp\{i[\omega_2 T_0 + \vartheta_2(T_2)]\} + \omega_2 a_2(T_2) \vartheta_2'(T_2) \exp\{i[\omega_2 T_0 + \\ \vartheta_2(T_2)]\} - i\omega_2 \xi_2 a_2(T_2) \cdot \exp\{i[\omega_2 T_0 + \vartheta_2(T_2)]\} + \frac{1}{4} \mu a_1(T_2) a_2(T_2) \omega_1^2 \cdot \\ \exp\{i[\omega_2 T_0 + \sigma_2 T_2 + \vartheta_1(T_2) - \vartheta_2(T_2) - \omega_1 \tau_2]\} + cc \end{cases} \quad (10)$$

考虑耦合系统主内共振发生时系统的动力学行为(设置主内共振调节参数 σ_1, σ_2 , 构建频率方程 $2\omega_2 = \omega_1 - \epsilon^2 \sigma_2$, $\omega_1 = \omega_0 - \epsilon^2 \sigma_1$), 主内共振调节参数与系统减振技术、减振频带密切相关. 引进调谐因子关联方程 $\Phi_1(T_2) = \sigma_1 T_2 + \delta_0 W(T_2) + \psi - \vartheta_1(T_2)$, $\Phi_2(T_2) = \vartheta_1 T_2 + \sigma T_2 - 2\vartheta_2(T_2)$. 进一步计算获得实虚部联合方程组

$$\begin{cases} -i\omega_1 a_1'(T_2) + \omega_1 a_1'(T_2) \vartheta_1'(T_2) - i\omega_1 \xi_1 a_1(T_2) + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \cdot \omega_2^2 a_2^2(T_2) [\cos(\Phi_2 + \omega_2 \tau_1) - \\ \text{isin}(\Phi_2 + \omega_2 \tau_1)] + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \cdot \omega_2^2 a_2^2(T_2) (\cos\Phi_2 - \text{isin}\Phi_2) + \frac{\gamma^2}{2} a_1(T_2) [\cos(\omega_1 \tau_0) - \\ \text{isin}(\omega_1 \tau_0)] + \frac{g}{2} (\cos\Phi_1 - \text{isin}\Phi_1) = 0 \\ -i\omega_2 a_2'(T_2) + \omega_2 a_2(T_2) \vartheta_2'(T_2) - i\omega_2 \xi_2 a_2(T_2) + \frac{1}{4} \mu \cdot a_1(T_2) a_2(T_2) \omega_1^2 \cos(\Phi_2 - \omega_1 \tau_2) + \\ \frac{1}{4} \mu a_1(T_2) a_2(T_2) \cdot \omega_1^2 \sin(\Phi_2 - \omega_1 \tau_2) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

求解确定性模式耦合方程组的稳态矩, 其中振幅状态记为 a_1^0, a_2^0 , 调谐因子及相位的关联变量列为 Φ_1^0, Φ_2^0

$$\begin{cases} \omega_1 \xi_1 a_1^0 + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 (a_1^0)^2 \sin\Phi_2^0 \cos(\omega_2 \tau_1) + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 (a_1^0)^2 \cdot \cos\Phi_2^0 \sin(\omega_2 \tau_1) + \\ \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 \cdot (a_2^0)^2 \sin\Phi_2^0 + \frac{\gamma^2}{2} a_1^0 \sin(\omega_1 \tau_0) - \frac{g}{2} \sin\Phi_1^0 = 0 \\ \sigma_1 a_1^0 + \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 (a_1^0)^2 \cos\Phi_2^0 \cos(\omega_2 \tau_1) - \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 (a_1^0)^2 \cdot \sin\Phi_2^0 \sin(\omega_2 \tau_1) + \\ \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 (a_2^0)^2 \cos\Phi_2^0 + \frac{\gamma^2}{2} a_1^0 \cos(\omega_1 \tau_0) + \frac{g}{2} \cos\Phi_1^0 = 0 \\ \omega_2 \xi_2 a_2^0 - \frac{1}{4} \mu \omega_1^2 a_1^0 a_2^0 \sin\Phi_2^0 \cos(\omega_1 \tau_2) + \frac{1}{4} \mu \omega_1^2 a_1^0 a_2^0 \cos\Phi_2^0 \sin(\omega_1 \tau_2) = 0 \\ \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) a_2^0 + \frac{1}{4} \mu \omega_1^2 a_1^0 a_2^0 \cos\Phi_2^0 \cos(\omega_1 \tau_2) + \frac{1}{4} \mu \omega_1^2 a_1^0 a_2^0 \sin\Phi_2^0 \sin(\omega_1 \tau_2) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

分别从振态的单模式及耦合模式分析一阶矩,其中系统的单模式振态表现相较稳定,而耦合式振态出现了增强外部激励引致主系统饱和现象、非直接激励的子系统产生强烈振动.耦合模式引起主子系统间能量渗透,通过调控饱和频带模式达到所需振态阶段.

3 系统矩响应解及其稳定性分析

3.1 确定性矩响应解计算

根据第2部分分析,分别讨论主子系统振态的平衡解模式,首先稳态线性模式为

$$\begin{cases} a_2^0 = 0 \\ a_1^0 = \frac{g}{2} (k_2^2 + l_2^2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (13)$$

其中 $k_2 = \omega_1 \xi_1 + \frac{\gamma^2}{2} \sin(\omega_1 \tau_0)$, $l_2 = \omega_1 \sigma_1 +$

$$\frac{\gamma^2}{2} \cos(\omega_1 \tau_0).$$

稳态非线性模式为

$$\begin{cases} a_1^0 = [(k_1^2 + l_1^2) S_1^{-2}]^{\frac{1}{2}} \\ a_2^0 = \{[(S_2^2 + S_3^2)^{-2} (k_2 S_2 + l_2 S_3)^2 (a_1^0)^2 - (S_2^2 + 4S_3^2)^{-1} [(k_2^2 + l_2^2) (a_1^0)^2 - (\frac{g}{2})^2] \}^{\frac{1}{2}} - \Gamma_0\}^{\frac{1}{2}} \\ \Gamma_0 = (S_2^2 + S_3^2)^{-1} (k_2 S_2 + l_2 S_3) a_1^0 \\ k_1 = -\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2), l_1 = \omega_2 \xi_2, S_1 = \frac{1}{4} \mu \omega_1^2 \\ S_2 = \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 [\sin(\Phi_2^0 + \omega_2 \tau_1) + \sin \Phi_2^0] \\ S_3 = \frac{R}{1+R} \frac{1}{4} \omega_2^2 [\cos(\Phi_2^0 + \omega_2 \tau_1) + \cos \Phi_2^0] \\ \sin \Phi_2^0 = (k_1^2 + l_1^2)^{-\frac{1}{2}} [\sin(\omega_1 \tau_2) k_1 + \cos(\omega_1 \tau_2) l_1] \\ \cos \Phi_2^0 = (k_1^2 + l_1^2)^{-\frac{1}{2}} [\cos(\omega_1 \tau_2) k_1 - \sin(\omega_1 \tau_2) l_1] \end{cases} \quad (14)$$

标记激励强度临界态 g_1^c, g_2^c

$$\begin{cases} g_1^c = [(S_2^2 + S_3^2)^{-2} (k_2 S_2 + l_2 S_3)^2 (a_1^0)^2 - (S_2^2 + S_3^2)^{-1} (k_2^2 + l_2^2)^2 (a_1^0)^2 \cdot (S_2^2 + S_3^2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ g_2^c = \sqrt{(k_2^2 + l_2^2)} \cdot 2a_1^0 \end{cases} \quad (15)$$

其与主子系统振态的平衡解模式密切相关,为振态稳定性判断奠定条件.

3.2 随机矩响应解计算

基于确定性矩响应解的计算结果,进一步考虑随机情形下系统矩响应特征.更新原确定性矩为含有随机扰动项的综合矩($a_n = a_{ns} + u_{nr}, \varphi_n = \varphi_{ns} + v_{nr}, n=1,2$),结合随机矩理论^[35],重新计算矩响应方程(13)、(14).得关于随机扰动组 $[F = (u_{1r}, u_{2r}, v_{1r}, v_{2r})^T]$ 的伊藤随机微分方程 $[dF = AFdT_2 + BdW(T_2), B$ 为随机因子组],记中间变量 $x_1 = E(u_{1r}^2), x_2 = E(u_{1r}u_{2r}), \dots, x_5 = E(u_{2r}^2), \dots, x_{10} = E(v_{2r}^2)$,依次计算随机一阶矩、均方矩为

$$\begin{cases} Eu_{nr} = 0 = Ev_{nr}, n=1,2 \\ EF^T(AI_{44} + I_{44}A)F = \gamma^2, \\ EF^T(AI_{3q} + I_{3q}A)F = 0, q=3,4 \\ EF^T(AI_{2q} + I_{2q}A)F = 0, q=2,3,4 \\ EF^T(AI_{1q} + I_{1q}A)F = 0, q=1,2,3,4 \end{cases} \quad (16)$$

其中 I_{pq} 表示第 p 行 q 列元素为1、其余元素为0的四阶矩阵.因此系统方程随机矩响应解列为

$$\begin{cases} E(a_n) = E(u_{nr}) + a_{ns} = a_{ns} \\ E(a_n^2) = E(u_{nr}^2) + (a_n^2) \end{cases} \quad n=1,2 \quad (17)$$

4 分析评估与仿真测算

本部分中,我们依据前述模型方程的解析表达式,同步进行数值模拟测算以验证分析方法的有效性.多层面探寻耦合态记忆信号控振技术对主子系统稳定性的作用机制,探明影响耦合系统共振行为参数源样例的阈值范围.

4.1 振幅一载荷响应讨论

首先考虑系统共振矩响应关于随机扰动 $\delta_0 = 0$ 情形的外载荷参数变化关系.图2展示了双调谐调制下矩响应 a_{ns} 随外载荷强度 g 的变化.可观察到多尺度方法分析的矩响应解(由线标识,其中实线为稳定分支,虚线表示不稳定分支)接近于对应数值测算结果(由填充的正方形、菱形符号标识),验证了分析方法的有效性.

图2(a)中针对调谐样例 $\sigma_1 = 0.4, \sigma_2 = -0.4$,设定载荷强度临界值 g_1^c 非负,进而获得其第二临界值 g_2^c .图2(a)表明载荷强度第二临界值指示着矩响应解由稳定分支向不稳定分支与稳定分支共存过渡;当载荷强度未达到第二临界值时,矩响应解仅有平凡态的稳定分支;当载荷强度超越第二临

界值时,系统主振态矩出现了饱和现象(由图中淡灰色箭头指示),另外,未直接接触外载荷的子振态矩显示出随载荷强度增大而呈减速率增大(由图中浅橙色箭头指示)。

图 2(b)展示了调谐样例 $\sigma_1=0.4, \sigma_2=0.4$, 引致矩响应情形。随着载荷强度先后历经第一临界值、第二临界值,主子振态矩解表现为:线性稳定分支;大小值稳定分支与非线性不稳定分支共存;非线性稳定分支与线性不稳定分支共存。因此载荷强度引致主子振态矩响应出现多分支解,即外共振态在临界值附近过渡为饱和(由图中淡灰色箭头指示),内共振态发生跳跃行为(由图中浅橙色、褐粉色箭头指示)。图 2 所展示的调谐样例情形启示了耦合摆系统主子态在实际工况中适宜共振模式的设计思路。

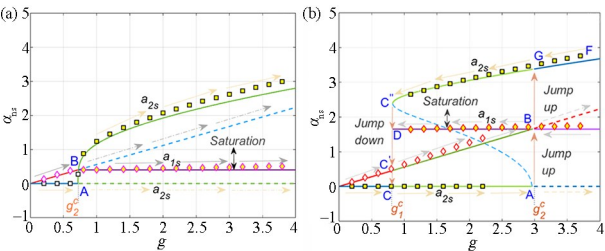


图 2 双调谐参数场景下关于载荷强度的主子振态矩响应演化:
(a) $\sigma_1=0.4, \sigma_2=-0.4$; (b) $\sigma_1=0.4, \sigma_2=0.4$
Fig. 2 Moments evolution of the primary and secondary vibration states with respect to the load strength in scenarios of double-tuned parameters; (a) $\sigma_1=0.4, \sigma_2=-0.4$; (b) $\sigma_1=0.4, \sigma_2=0.4$

进一步考虑主子振态矩关于激励频率、载荷强度的演化关系。图 3 分别列出线性与非线性情形下振态矩三维曲面,一方面论证了图 2 所述的载荷强度引致主子振态矩的饱和、跳现象;另一方面阐释了基于外载频率共振模式的合适带宽遴选机制。

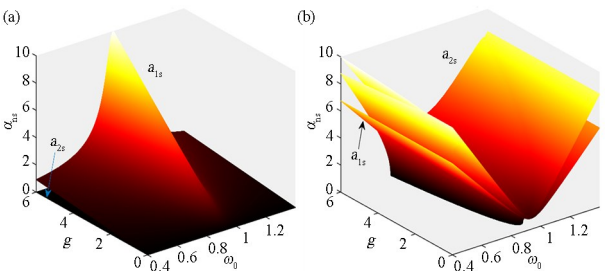


图 3 主子振态矩响应关于激励频率与载荷强度的演化曲面:
(a) 线性; (b) 非线性
Fig. 3 The evolution surface of the principal and sub-vibration moment response with respect to the excitation frequency and load intensity; (a) Linear; (b) Nonlinear

此外,图 4 列出了五种载荷强度样例下主子振态矩响应关于激励频率变化的曲线。由图 4(a)可清楚地观察到主振态矩响应 a_{1s} 随载荷强度 g 在

0.5~7.0 范围内更替而增大,其中橙色虚线标识部分代表振态矩解的不稳定部分,而子振态矩响应 a_{2s} 关于载荷强度变化保持为零,表明系统振动主要发生在主振子即为线性情形。当载荷达到一定强度时,系统振态表现出强非线性特征。图 4(b)展示了非线性场景下主子振态矩响应关于图 2 载荷强度样例与激励频率的演化规律:主振态矩表现出饱和,子振态矩发生跳跃即产生矩响应的多解共振带,这里矩响应分支的不稳定部分以虚线荧光绿色标识。

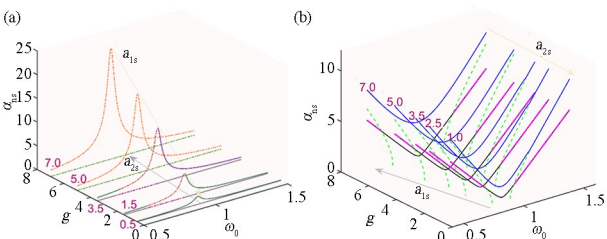


图 4 不同载荷强度样例下主子振态矩响应关于激励频率的演化曲线:(a)线性;(b)非线性
Fig. 4 The moment evolution curves of the primary and secondary vibration states with respect to the excitation frequency under different load intensity examples; (a) Linear; (b) Nonlinear

进一步考虑振态稳定性关于系统参数演化规律,图 5 展示了线性阻尼系数改变引致主振态自反馈增益与时滞的矩等势投影情况。主子振态随位移自反馈增益与时滞的细微变化表现为周期性响应(红、蓝及灰色线)及稳性(实线与虚线标识)交替,随阻尼系数增大振荡加强。表明主振态自反馈信号设计是调控耦合系统振荡的必要有效途径。

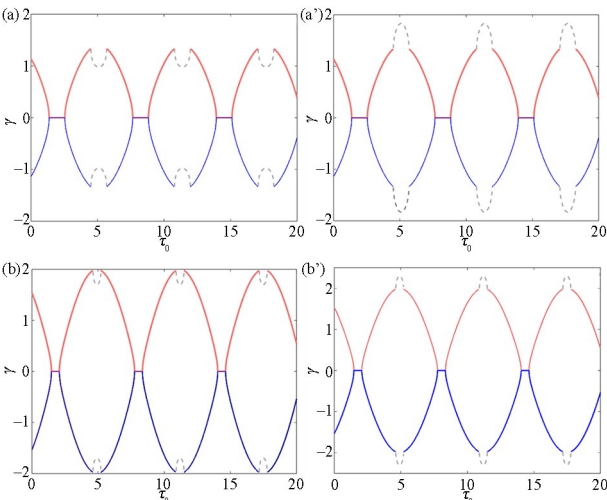


图 5 两类振态振幅响应的自反馈增益与时滞关系曲线:
(a), (a') $\xi_1=1$; (b), (b') $\xi_1=2$
Fig. 5 The relationship between the self-feedback gain and the time delay for two types of amplitude moments; (a), (a') $\xi_1=1$; (b), (b') $\xi_1=2$

此外,对应于图 4,图 6 以子图的形式展示出载荷强度 g 达到不同值时主子振态矩随载荷频率

变化的二维图.从图 6(a)中可观察到 g 取 0.5 时,线性情形的主子振态矩未存在不稳定部分.图 6(b)~(f)中当 g 历经 1.5~7.0 样例时,主子振态矩同时存在线性情形和非线性情形(分别以实线表示稳定分支、虚线及点虚线标识不稳定部分),子振态矩响应出现双峰或两个分支,同时,系统振态矩响应存在双跳跃现象.与图 2、图 4 比对,图 6(b)~(f)中随着 ω_0 由 0.4 增大到 1.4,约在 ω_{01} 处有一个向上的跳跃,在 ω_{02} 处有一个向下的跳跃.反之, ω_0 逐渐减小,约在 ω'_{01} 处发生向上的跳跃,在 ω'_{02} 处发生向下的跳跃.由此系统振态幅频响应曲线对应多值分支形成左向峰或右向峰弯曲,共振调谐因子引起了两峰的不对称现象.此外,共振带宽与载荷强度在样例范围内呈单调相关趋势.

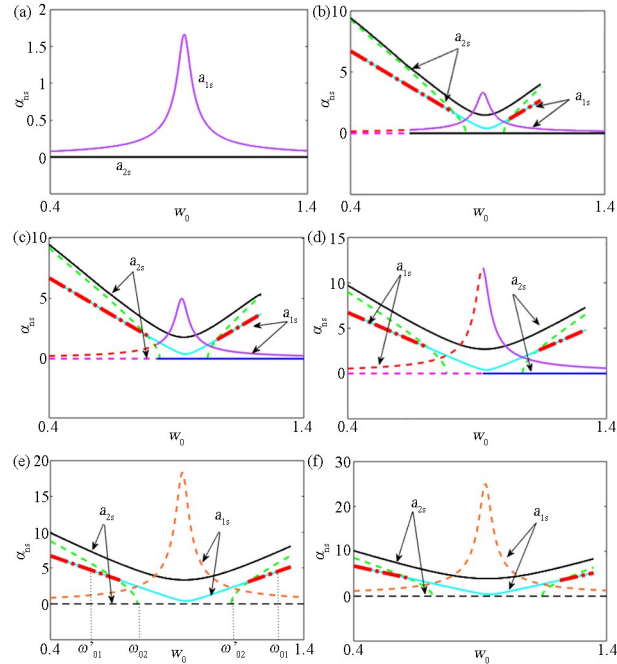


图 6 对应图 4 中不同载荷强度下主子振态矩随载荷频率变化子图:
(a) $g=0.5$; (b) $g=1.5$; (c) $g=2.5$; (d) $g=3.5$; (e) $g=5.0$; (f) $g=7.0$
Fig. 6 The deterministic moments of the system states vary with the load frequency under different load intensities corresponding to the details in fig. 4: (a) $g=0.5$; (b) $g=1.5$; (c) $g=2.5$; (d) $g=3.5$; (e) $g=5.0$; (f) $g=7.0$

图 7(a)~(d)展示了耦合振态模式下反馈增益 μ 与耦合时滞 τ_2 改变时引起系统振态矩随耦合时滞 τ_1 的变化规律.所列参数样例场景反映了反馈增益的小程度变化引起系统振态矩响应的显著变化,即系统振态高敏感于耦合记忆反馈增益改变,耦合记忆性振态模式易引起能量在系统主子振态中的积累、传递与耗散.图 7(a)、(b)反馈增益设置为 $\mu=0.01$,耦合时滞 τ_2 值由 5 减小到 4.5,主子振态矩总体减小,其中子振态非线性响应矩 a_{2s}

减小明显,而主振态线性响应矩 a_{1a} 减小明显.比较图 7(b)与(c)、图 7(a)与(d),发现耦合态时滞 τ_2 固定,反馈增益 μ 增加 0.01,主子振态矩总体减小,其中子振态非线性响应矩 a_{2s} 明显减小,主振态线性响应矩 a_{1a} 明显减小.此外,系统振态矩响应随耦合态时滞 τ_1 呈周期性变化趋势.图 7 所列参数样例表明,短耦合时滞有助于主子振态快速同步,系统稳态响应矩相对快速稳定,即小耦合时滞引致信息在耦合态间及时传递与反馈,使系统振态更快调整至稳定模式.

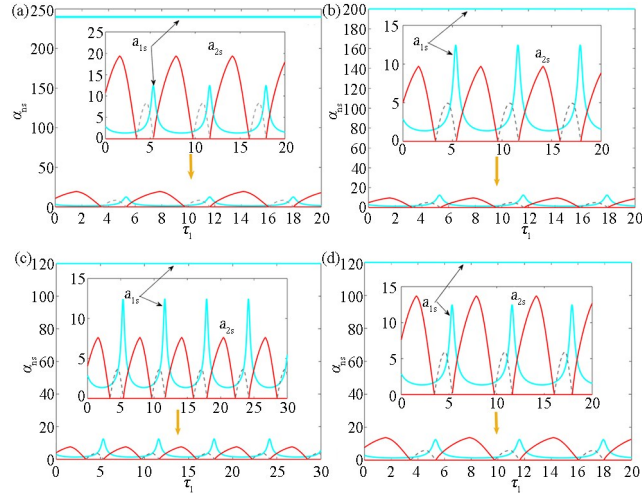


图 7 耦合态下记忆反馈系数与时滞引致主子振态矩响应: (a) $\mu=0.01$, $\tau_2=5$; (b) $\mu=0.01$, $\tau_2=4.5$; (c) $\mu=0.02$, $\tau_2=4.5$; (d) $\mu=0.02$, $\tau_2=5$
Fig. 7 System states moments induced by the memory feedback coefficient and time delays in the coupled mode: (a) $\mu=0.01$, $\tau_2=5$; (b) $\mu=0.01$, $\tau_2=4.5$; (c) $\mu=0.02$, $\tau_2=4.5$; (d) $\mu=0.02$, $\tau_2=5$

4.2 随机载荷因子对振态时空轨迹的影响

对比于文献[29]研究结果,本节分析随机载荷参数调制耦合反馈模式下主子振态响应的时间历程与相轨迹演化规律.为便于后续阐述,在图 8~11 中,我们将符号 $Y_i(t)$, ($i=1,2$) 分别记为主内共振态变量 $x(t)$ 、 $\theta(t)$.以不同强度维纳过程载入谐波相位调制主子振态响应的时程及相空间轨迹:图 8~11 显示随机载荷因子 δ_0 增大促使系统振态振荡加强.从确定性激励到有界随机相调制激励,

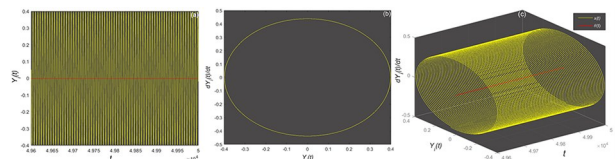


图 8 确定性周期激励($\delta_0=0$)系统振态 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 的模拟结果:
(a) 时间历程; (b) 相轨迹; (c) 三维时程与相轨迹
Fig. 8 Spatiotemporal trajectories of system states $x(t)$, $\theta(t)$ under the deterministic periodic excitation ($\delta_0=0$):
(a) Time histories; (b) Phase trajectory; (c) Time histories combined with the phase trajectory from a three-dimensional view

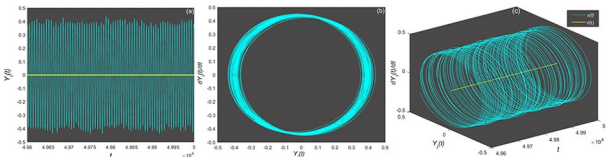


图9 有界随机激励($\delta_0=0.05$)系统振态 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 的模拟结果:
(a)时间历程;(b)相轨迹;(c)三维时程与相轨迹

Fig. 9 Spatiotemporal trajectories of system states $x(t), \theta(t)$ under the bounded noise excitation ($\delta_0=0.05$):
(a) Time histories; (b) Phase trajectory; (c) Time histories combined with the phase trajectory from a three-dimensional view

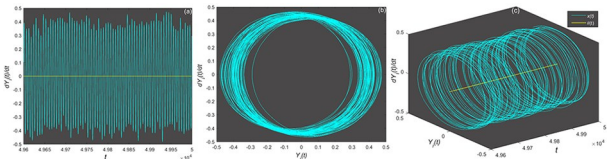


图10 有界随机激励($\delta_0=0.12$)系统振态 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 的模拟结果:
(a)时间历程;(b)相轨迹;(c)三维时程与相轨迹

Fig. 10 Spatiotemporal trajectories of system states $x(t), \theta(t)$ under the bounded noise excitation ($\delta_0=0.12$):
(a) Time histories; (b) Phase trajectory; (c) Time histories combined with the phase trajectory from a three-dimensional view

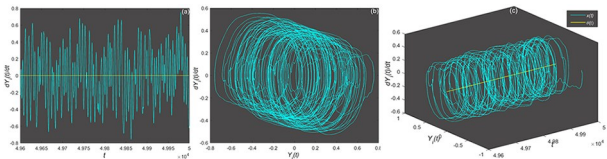


图11 有界随机激励($\delta_0=0.7$)系统振态 $x(t)$ 与 $\theta(t)$ 的模拟结果:
(a)时间历程;(b)相轨迹;(c)三维时程与相轨迹

Fig. 11 Spatiotemporal trajectories of system states $x(t), \theta(t)$ under the bounded noise excitation ($\delta_0=0.7$):
(a) Time histories; (b) Phase trajectory; (c) Time histories combined with the phase trajectory from a three-dimensional view

系统振态相轨迹从极限环发展为扩散极限环,且随着增大,振态振荡无序性增强,极限环扩散显著,表明系统振态时空轨迹的拓扑结构发生改变.当前参数场景下系统能量主要集中于主振态,子振态能量改变较弱.

4.3 振态随机矩响应

结合前述振态时空轨迹特征、振态振幅关于载荷因子、记忆反馈参数的演化规律,我们进一步考虑随机载荷因子及记忆反馈参数对主子振态均方矩 $E(a_n^2)$ 的调控机制.图12展示了随机载荷($\delta_0=0.053$)情形双调谐条件下均方矩关于载荷强度的模拟结果:一方面保持了确定性振态矩的变化特征;另一方面均方矩显著增加(实线与短虚线分别表示分析解的稳定及不稳定分支,填充的菱形及正方形分别标识振态随机矩的数值模拟分支).

观察图12(a)(调谐样例: $\sigma_1=0.4, \sigma_2=-0.4$) 当外载荷强度 g 超过第二临界值 g_2^c 时,系统子振

态有随载荷强度线性增加的随机矩 $E(a_2^2)$ 解分支(绿色实线表示解析结果),主振态有随载荷强度非线性增加的随机矩解分支,同时出现饱和分支.与图2确定性矩值 a_{ns} 相比,均方矩值总体明显增大,数值模拟结果(填充的方形、菱形符号)再次表明分析结论的可靠性.对调谐样例进行变更: $\sigma_1=0.4, \sigma_2=0.4$,图12(b)展示了均方矩随载荷强度历经两临界态的变化特征.通过分析方法确定两临界值约为 $g_1^c(0.824), g_2^c(2.956)$,两临界态标识了通过内共振调制子振态随机矩出现跳跃,主内共振作用的主振态随机矩保持饱和,处于两临界值间的振态随机矩增加稳定性分支(实线标识).基于分析方法直观呈现了系统平衡态以及解析解存在条件(虚线表示不稳定解分支).

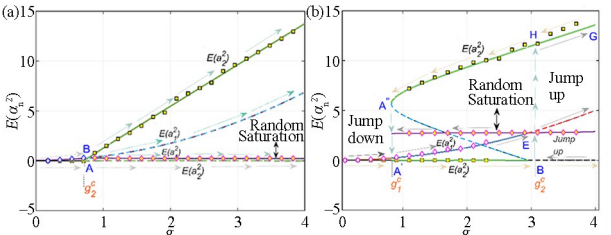


图12 双调谐参数场景下有界随机激励($\delta_0=0.053$)的振态均方矩随载荷强度变化:(a)线性;(b)非线性

Fig. 12 The mean square moments of system states under bounded noise excitation ($\delta_0=0.053$) varies with the load intensity in the dual tuning parameters scenario; (a) Linear; (b) Nonlinear

振态时空轨迹关于随机载荷因子的变化特征指示一定程度的 δ_0 仍然保持了主子振态通过主内共振调制所出现的随机跳、随机饱和等现象.这也启示了联合随机载荷与共振机制共同调控系统振态稳定性的设计模式.

进一步地,图13呈现了随机情形下($\delta_0=0.053$)系统振态随机矩 $E(a_n^2)$ 关于载荷频率与强度的三维演化关系:均方矩值随载荷强度增加明显增大;载荷强度的改变历经了随机矩关于载荷频率变化中的跳跃、饱和及共振频段的更替特征.

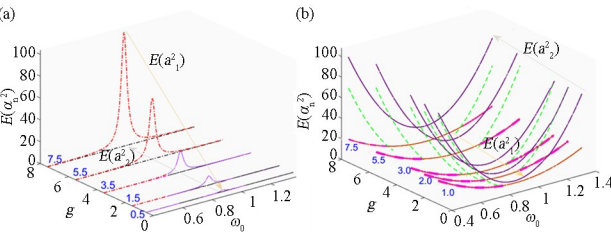


图13 系统振态随机矩 $E(a_n^2)$ 关于载荷频率与强度的变化关系:
(a)线性;(b)非线性

Fig. 13 Variations on the random moments $E(a_n^2)$ of system states with respect to the load frequency and intensity:
(a) Linear; (b) Nonlinear

图 14(a)~(f) 细致展示主子振态随机矩的变化情形:主子振态均方矩值随载荷强度增加有明显增大,共振频段拓宽;内共振作用调制子振态随机矩由单分支解到多分支解即伴随跳跃现象,外共振同时调制主振态随机矩解交替于稳定及不稳定性分支并伴随饱和现象。

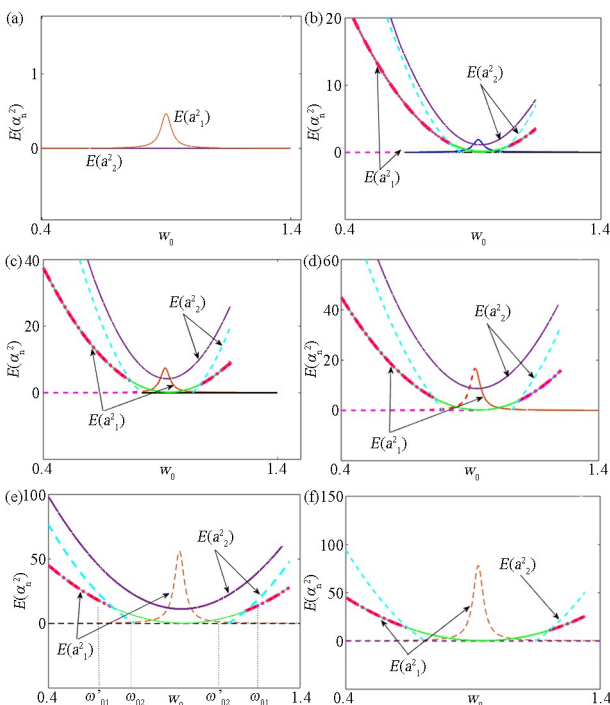


图 14 对应图 13 中不同载荷强度下主子振态随机矩关于载荷频率变化子图:(a) $g=0.5$; (b) $g=1.5$; (c) $g=2.5$; (d) $g=3.5$; (e) $g=5.0$; (f) $g=7.0$

Fig. 14 Random moments on the system states vary with the load frequency under different load intensities corresponding to the details in fig. 13: (a) $g=0.5$; (b) $g=1.5$; (c) $g=2.5$; (d) $g=3.5$; (e) $g=5.0$; (f) $g=7.0$

继续观察主内共振调谐因子关于自反馈增益及时滞的变化规律,图 15(a)、(b) 给出了自反馈增益、时滞与调谐因子引致的系统稳态矩的参数对关系图,其中 σ_1 为红色实线、红色虚线, σ_2 为黑色/蓝色实线、灰色/淡蓝色虚线。图 15(a) 中,主振态自反馈增益 γ 与调谐参数 σ_1 、 σ_2 的投影曲线反映了

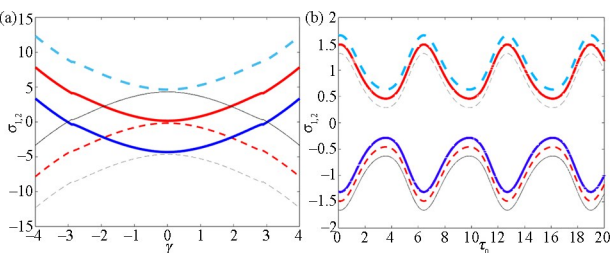


图 15 自反馈增益 γ 、时滞 τ_0 与共振调谐因子 σ_1 、 σ_2 引致系统稳态矩的参数对关系投影

Fig. 15 Projections on the parameters pair relationship of the system steady-state moments induced by self-feedback gain γ , time delay τ_0 , and resonance tuning factors

稳态矩的多分支解及稳定性情况;系统方程分析解体现 σ_1 、 σ_2 以二支对四支形式;图 15(b) 中调谐参数 σ_1 、 σ_2 随时滞 τ_0 呈现为周期性趋势,投影分支稳性交替变化。

对比于图 7(a)~(d) 展示的确定性情形耦合振态模式下反馈增益与时延调制引起主子振态矩响应的变化趋势,图 16 展示了均方矩 $E(a_n^2)$ 关于耦合态记忆信号因子的交替规律:随机矩保持确定性矩的总体特征,且模拟结果值显著增大;增加(缩减)耦合主振态的时延 τ_2 (增益 μ) 会明显增强主子振态振荡,即耦合反馈信号变更易引起系统能量的快速积聚与耗散;此外,其维持了系统振态随机矩随耦合子振态时延 τ_1 的周期性更替结果;图中可同时观察到均方矩曲线出现类似毛刺现象(由随机载荷因子引致,同前结论)。因而进一步启示了耦合记忆反馈信号的联合共振机制能够有效调控对系统在随机工况下振动状态稳定性的辨识模式。

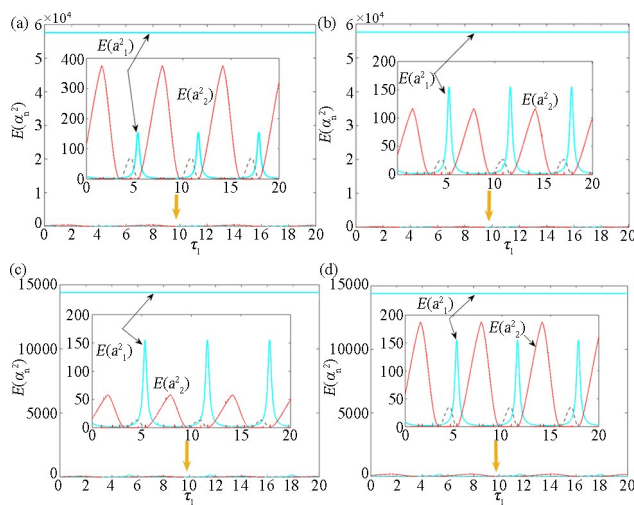


图 16 耦合态下记忆反馈系数与时滞引致主子振态随机矩响应:(a) $\mu=0.01$, $\tau_2=5$; (b) $\mu=0.01$, $\tau_2=4.5$; (c) $\mu=0.02$, $\tau_2=4.5$; (d) $\mu=0.02$, $\tau_2=5$

Fig. 16 Random moments of system states induced by the memory feedback coefficient and time delays in the coupled mode:

(a) $\mu=0.01$, $\tau_2=5$; (b) $\mu=0.01$, $\tau_2=4.5$; (c) $\mu=0.02$, $\tau_2=4.5$; (d) $\mu=0.02$, $\tau_2=5$

5 结论

本文聚焦于自参数动力吸振摆系统非线性随机振动的共振调制问题,考虑引入耦合态时滞反馈信号、自反馈时滞信号,探究了耦合态、自反馈记忆信号关于目标系统的振动控制机制。通过三阶尺度摄动法及数值模拟技术等分别对系统状态、加速度式耦合态及自反馈态记忆信号逐步展开确定情形与随机情形的共振响应分析与验证。

从振幅—载荷确定性响应、随机载荷因子对振态时空轨迹的影响以及振态随机矩响应等多角度分析评估与仿真测算系统主子振态共振规律;确定性矩解随载荷强度变化表现为不稳定分支与稳定分支共存过渡,载荷强度在线性与非线性情形中达到双临界值时引致系统主振态矩出现饱和现象、子振态矩发生跳跃;噪声强度因子通过相调制形成有界随机载荷见证了系统相态轨迹从极限环发展为扩散极限环,且随噪声因子增大振态振荡无序性增强,极限环扩散显著,系统振态时空轨迹的拓扑结构发生改变,另外振态随机矩保持了主子振态通过主内共振调制所出现的随机跳、随机饱和等现象;记忆反馈信号引致系统振态矩呈现周期性及稳性交替,系统振态敏感于耦合记忆反馈增益改变,耦合记忆性振态模式易引起能量在系统主子振态中的积累、传递与耗散.因而启示了联合记忆反馈信号与共振机制共同调控自参数动力吸振摆随机工况下振态稳定性的设计模式.

参考文献

- [1] 王在华,胡海岩.时滞动力系统的稳定性与分岔:从理论走向应用[J].力学进展,2013,43(1):3—20.
WANG Z H, HU H Y. Stability and bifurcation of delayed dynamic systems: from theory to application [J]. Advances in Mechanics, 2013, 43(1): 3—20. (in Chinese)
- [2] SUZUKI Y, LU M Y, BEN-JACOB E, et al. Periodic, quasi-periodic and chaotic dynamics in simple gene elements with time delays [J]. Scientific Reports, 2016, 6: 21037.
- [3] 梁霄,陈林聪,赵兆冰.宽带噪声激励下带有分数阶控制器的强非线性系统的随机平均技术[J].动力学与控制学报,2020,18(4):70—78.
LIANG X, CHEN L C, ZHAO Y B. Stochastic averaging technique of strongly nonlinear systems with fractional-order controller under the wide-band noise excitation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(4): 70—78. (in Chinese)
- [4] 陈林聪,朱位秋.随机扰动下简单电力系统的可靠度反馈最大化[J].动力学与控制学报,2010,8(1):19—23.
CHEN L C, ZHU W Q. Feedback maximization of reliability of a simple power system under random perturbations [J]. Journal of Dynamics and Control, 2010, 8(1): 19—23. (in Chinese)
- [5] 孙中奎,金晨.时滞系统非线性动力学研究进展[J].动力学与控制学报,2023,21(8):6—18.
SUN Z K, JIN C. Advances in nonlinear dynamics for delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 6—18. (in Chinese)
- [6] 严尧,张丽,陈龙祥.时滞动力学与控制研究进展[J].动力学与控制学报,2023,21(8):1—5.
YAN Y, ZHANG L, CHEN L X. Progress in dynamics and control of time-delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 1—5. (in Chinese)
- [7] 管明杰,茅晓晨.含时滞轨道吸振器的建筑结构的动力学分析[J].动力学与控制学报,2023,21(8):68—74.
GUAN M J, MAO X C. Dynamical analysis of a building structure with a time-delay track vibration absorber [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 68—74. (in Chinese)
- [8] 袁韦欣,镇斌,徐鉴.单向耦合 FitzHugh-Nagumo 神经元的滞后同步研究[J].动力学与控制学报,2023,21(8):19—23.
YUAN W X, ZHEN B, XU J. The study for lag synchronization between two Fitzhugh-Nagumo neurons with unidirectional coupling [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 19—23. (in Chinese)
- [9] 唐艺玮,彭剑,符翔,等.多输入时滞反馈控制下的斜拉梁主共振响应[J].动力学与控制学报,2020,18(5):92—96.
TANG Y W, PENG J, FU X, et al. Primary resonance response of cable-stayed beam under multi-input time-delayed feedback control [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(5): 92—96. (in Chinese)
- [10] TÖPFER J D, SIGURDSSON H, PICKUP L, et al. Time-delay polaritonics [J]. Communications Physics, 2020, 3: 2.
- [11] ZHANG L, STEPAN G. Bifurcations in basic models of delayed force control [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(1): 99—108.
- [12] 胡海岩.振动主动控制中的时滞动力学问题[J].振动工程学报,1997,10(3):273—279.
HU H Y. On dynamics in vibration control with time delay [J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 10(3): 273—279. (in Chinese)
- [13] 赵艳影,徐鉴.时滞动力吸振器及其对主系统振动

- 的影响[J]. 振动工程学报, 2006, 19(4): 548—552.
- ZHAO Y Y, XU J. Delayed resonator and its effects on vibrations in primary system [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(4): 548—552. (in Chinese)
- [14] 李非凡, 赵艳影. 基于时滞半主动控制的起落架摆振反共振峰优化[J]. 振动与冲击, 2023, 42(8): 341—350.
- LI F F, ZHAO Y Y. Anti-resonance optimization of landing gear shimmy based on time-delay semi-active control [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(8): 341—350. (in Chinese)
- [15] 孔嘉祥, 王博洋, 刘铸永, 等. 带 Stewart 平台的航天器刚柔耦合动力学建模与仿真分析 [J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 76—84.
- KONG J X, WANG B Y, LIU Z Y, et al. Rigid-flexible dynamic modeling and simulation of Stewart platform spacecraft [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 76—84. (in Chinese)
- [16] 周德元, 李严彪, 田岳. 滑跑无人机起降过程动力学特性分析及性能底数评估[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(9): 91—97.
- ZHOU D Y, LI Y B, TIAN Y. Analysis of the dynamic characteristics of the takeoff and landing process of taxi-running uav and evaluation of the performance base [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(9): 91—97. (in Chinese)
- [17] SUN X T, WANG F, XU J. Dynamics and realization of a feedback-controlled nonlinear isolator with variable time delay [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2019, 141(2): 021005.
- [18] 张京军, 郭晓品, 何丽丽, 等. 改进遗传算法在智能悬臂梁模糊控制的应用[J]. 动力学与控制学报, 2011, 9(1): 58—63.
- ZHANG J J, GUO X P, HE L L, et al. Application of improved genetic algorithm in fuzzy control for intelligent cantilever beam [J]. Journal of Dynamics and Control, 2011, 9(1): 58—63. (in Chinese)
- [19] 黎丽, 徐鉴. 振动陀螺仪单向时滞耦合系统的摄动分析[J]. 力学季刊, 2019, 40(4): 666—673.
- LI L, XU J. Perturbation analysis for a unidirectionally delay-coupled vibratory gyroscope system [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2019, 40(4): 666—673. (in Chinese)
- [20] 孙中奎, 徐伟, 杨晓丽. 窄带激励下带有时滞反馈的非线性动力系统的响应[J]. 振动工程学报, 2006, 19(1): 57—64.
- SUN Z K, XU W, YANG X L. Response of nonlinear system to random narrow-band excitation with time delay state feedback [J]. Journal of Vibration Engineering, 2006, 19(1): 57—64. (in Chinese)
- [21] 杨柳青, 赵艳影. 一种含惯容的接地刚度时滞反馈动力吸振器的多目标优化设计[J]. 振动与冲击, 2023, 42(23): 133—143.
- YANG L Q, ZHAO Y Y. Multi-objective optimization design of a grounded stiffness time delay feedback dynamic vibration absorber with inerter [J]. Journal of Vibration and Shock, 2023, 42(23): 133—143. (in Chinese)
- [22] 莫帅, 张应新, 罗炳睿, 等. 时滞反馈下非正交面齿轮主共振特性的多尺度法研究[J]. 振动工程学报, 2023, 36(3): 623—633.
- MO S, ZHANG Y X, LUO B R, et al. Multi-scale method analysis on the primary resonance of non-orthogonal face gears with time-delay feedback [J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(3): 623—633. (in Chinese)
- [23] 王媛媛, 陈聚峰, 张静. 分数阶时滞反馈下 Rayleigh-Duffing 系统的主共振[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(9): 29—36.
- WANG Y Y, CHEN J F, ZHANG J. Primary resonance of Rayleigh-duffing systems under fractional-order delayed feedback [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(9): 29—36. (in Chinese)
- [24] WANG D L, PEI H Q, YAO J T, et al. Memory feedback signals in nonlinear coupled pitch-roll ship motions under narrow-band stochastic excitations [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2023, 192: 110220.
- [25] 王东梅, 余跃, 张正娣. 时滞反馈与多频激励联合作用下 Duffing 振子的快慢动力学[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(1): 37—46.
- WANG D M, YU Y, ZHANG Z D. Fast-slow dynamics of duffing oscillator with time-delay feedback under multi-frequency excitations [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(1): 37—46. (in Chinese)
- [26] 赵艳影, 杨如铭. 利用时滞反馈控制自参数振动系统饱和控制减振频带[J]. 物理学报, 2011, 60(10): 433—441.
- ZHAO Y Y, YANG R M. Using delayed feedback

- to control the band of saturation control in an auto-parametric dynamical system [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(10): 433–441. (in Chinese)
- [27] 赵艳影, 李昌爱. 时滞动力吸振器抑制扭转系统的振动 [J]. *动力学与控制学报*, 2013, 11(1): 36–41.
- ZHAO Y Y, LI C A. Vibration suppression of torsional vibration system by using the delayed vibration absorber [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2013, 11(1): 36–41. (in Chinese)
- [28] WANG D L, XU W, GU X D. Stationary response of stochastic viscoelastic system with the right unilateral nonzero offset barrier impacts [J]. *Chinese Physics B*, 2019, 28(1): 010203.
- [29] WANG D L, XU W, XU J W, et al. Resonance responses in a two-degree-of-freedom viscoelastic oscillator under randomly disordered periodic excitations [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019, 68: 302–318.
- [30] 黄冬梅, 徐伟, 谢公南. 随机窄带噪声作用下非线性碰撞振动系统的稳态响应研究 [J]. *应用数学和力学*, 2016, 37(6): 633–643.
- HUANG D M, XU W, XIE G N. Dynamic responses of nonlinear vibro-impact systems under narrow-band random parametric excitation [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, 37(6): 633–643. (in Chinese)
- [31] HUANG D M, LI W, YANG G D, et al. Vibration analysis of a piecewise-smooth system with negative stiffness under delayed feedback control [J]. *Shock and Vibration*, 2017, 2017: 3502475.
- [32] SUN Y L, NING L J. Bifurcation analysis of a self-sustained birhythmic oscillator under two delays and colored noises [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, 30(1): 2050013.
- [33] NING L J, SUN Y L. Modulating bifurcations in a self-sustained birhythmic system by α -stable Lévy noise and time delay [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(3): 2339–2347.
- [34] 宋公飞, 张子梦, 李涛. 强非线性中立型随机时滞系统的间歇性反馈控制 [J]. *控制理论与应用*, 2023, 40(9): 1657–1664.
- SONG G F, ZHANG Z M, LI T. Intermittent feedback control for highly nonlinear neutral stochastic delay systems [J]. *Control Theory & Applications*, 2023, 40(9): 1657–1664. (in Chinese)
- [35] 朱位秋. 随机振动 [M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- ZHU W Q. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1992. (in Chinese)