

一维拓扑声子界面态研究进展^{*}

陈治江 章俊 金晓清 费多尔·博洛迪奇[†]

(重庆大学 航空航天学院, 重庆 400030)

摘要 弹性周期性结构中的拓扑界面态因其独特的传输特性和界面能量增强效果,已经引起了广泛关注和研究兴趣.这种特性为设计新型弹性波导和开发下一代信息技术中的量子器件提供了新思路,对经典波调控也具有重要价值.本文将系统地介绍一维拓扑界面态在声子、弹性波系统中的研究进展.将以 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型为例,详细阐述与拓扑研究相关的概念,如能带反转、Zak 相位等.较为深入的探讨一维拓扑界面态的设计思想以及当前的研究进展.总结了拓扑态本征频率的主动调控方式:多场耦合可重构和机械可重构.最后,探讨了拓扑界面态可能的未来发展方向,以期对相关研究提供有益的参考.

关键词 声子晶体, 拓扑界面态, 能带反转, Zak 相, SSH 模型

中图分类号: TB34

文献标志码: A

Research Progress of One Dimensional Elastic Topological Interface State^{*}

Chen Zhijiang Zhang Jun Jin Xiaoqing Feodor M. Borodich[†]

(College of Aerospace, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract The topological interface states in elastic periodic structures have attracted wide attention and research interest due to their unique transmission characteristics and eigenmodes with interface energy enhancement effects. This characteristic provides new ideas for designing novel elastic waveguides and developing quantum devices in next-generation information technology. Moreover, it is also valuable for classical wave modulation. This article systematically introduces the research progress of one-dimensional topological interface states in phonon and elastic wave systems, which elaborates on concepts related to topological research, such as band inversion, Zak phase by taking the Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model as an example. It deeply explores one-dimensional topological interface states' design ideas and current research progress. It also summarizes the active regulation methods of the eigenfrequency of topological states: multi-field coupling modulation and mechanically modulation. Finally, it explores possible directions for future research on topological interface states.

Key words phononic crystal, topological interface state, band inversion, Zak phase, Su-Schrieffer-Heeger model

引言

拓扑学起源于数学领域,专注于探索各类“空

间”在经历连续形变后仍能保持不变的本质属性,比起具体的形状和大小更关注对象之间的邻近关系.正因如此,拓扑学能够揭示出物体的某些整体

2024-07-01 收到第 1 稿,2024-07-31 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12402135), 中国博士后科学基金资助项目(2024M763861), National Natural Science Foundation of China (12402135), China Postdoctoral Science Foundation Funded Project (2024M763861).

[†] 通信作者 E-mail: borodichfm@cqu.edu.cn

特性,诸如著名的哥尼斯堡七桥问题、多面体欧拉定理和四色问题等经典案例。举例来说,在不破坏其邻近关系的前提下,一个球体或立方体可以平滑地变形为碗或勺子,但它们却无法转变为圆环或漏斗的形状。这是因为球体和圆环在拓扑意义上具有不同的拓扑数,即亏格 g (genus),这一概念可以通过高斯一波涅定理 (Gauss-Bonnet theorem) 来精确描述: $2(1 - g) = \int K dA / (2\pi)$, 其中涉及到高斯曲率 K 的表面积分。在此情境下,亏格通常为整数并与物体上的孔洞数量相对应,如球体 $g = 0$, 环形 $g = 1$ 。值得注意的是,拓扑学对细节和连续变化并不敏感。

材料性质在很大程度上由其电子能带结构所决定。如果能够在某材料电子能带结构中发现类似的拓扑特征,并且这种材料的物理量或量子态与这些拓扑特征紧密相关,那么这种材料就有可能展现出对缺陷、杂质等细节不敏感的独特物理性质或量子态。在凝聚态物理的研究领域中,随着晶体能带理论的不断深入,科学家们发现倒空间的能带结构同样可以展现出多样的拓扑性质^[1]。这一发现为拓扑材料的研究奠定了基础,这类材料具有拓扑相变、对称性以及非平庸的拓扑特性。

在 20 世纪 80 年代,德国物理学家 Klitzing 在探索半导体异质界面处的二维导电层在低温、强磁场环境下的输运性质时,发现了整数量子霍尔效应^[2]。值得注意的是,该效应在毫米尺寸的样品中也是可以被观测到的,证明了这是一种宏观尺度的量子现象。随后, Thouless 等人经过研究指出:量子化的根源在于非零拓扑不变量——陈数 (Chern number),这被称为 Thouless-Kohmoto-Nightingale-den Nijs (TKNN) 理论^[3]。在该体系中,处于体能隙中的费米面附近存在着无能隙的手性边界态,其拓扑保护表现为电子的完全背散射抑制和缺陷免疫的单向输运。这是一种不能够在朗道相变理论框架下解释的介于绝缘体和金属之间新的物态——拓扑态。

然而实现量子霍尔效应往往需要外加强磁场和较低的温度,这对实际应用构成了挑战。为了解决这一问题,2005 年, Kane 和张首晟等人共同提出了利用自旋轨道耦合的方法,使得存在一对共轭的自旋相反的无能隙边界态成为可能,即量子自旋霍尔效应(二维)^[4]和拓扑绝缘体(三维)^[5]。这两种

状态可以用 Z2 不变量或自旋陈数 (spin Chern number) 来描述,且具有时间反演对称保护的自旋输运性质。还有学者提出了利用谷自由度实现拓扑态的一种方法:量子谷霍尔效应^[6]。这些霍尔效应家族独特的鲁棒传输特性,以及不同结构交界处形成的边界和界面态模式,为实现和设计突破传统技术极限的颠覆性材料和器件提供了可能性。这些材料和器件在许多领域都具有潜在的应用价值,例如场效应管、新型传感器、量子计算、负折射和能量收集等领域^[7]。

霍尔效应家族中的量子化根源在于能带拓扑特性,从能带角度和 Bloch 定律来看,电子、光子、声子具有一定的相似性。因此,光波^[8]、声波^[9]和弹性波^[10]也能实现类似量子化拓扑态。利用人工周期结构实现量子拓扑性质具有以下优点:首先,人工带隙材料通常为玻色系统,不受电子系统中费米能级的限制。其次,在声子—光子周期性系统中,可以更方便地引入无序扰动,提高实验灵活性。再者,声光晶格系统具有更高的加工精度,可以进行更精确的调控^[11]。此外,光子和声子系统更容易实现高时空分辨率的振幅和相位测量。

近几十年来,关于光子和声子晶体以及力学超材料的研究已形成一套完整的能带理论、结构设计和实验方法。Haldane 和 Raghu^[12]提出将陈绝缘体的概念扩展到光子晶体系统中,引发了对拓扑经典物理应用的研究。随后这一概念被引入到声子晶体系统中^[13]。学者们通过打破时间和空间反演对称性的方式,在声波系统中实现了对缺陷和扰动的免疫且单向传输的声学边缘态^[14,15]。这些声学边缘态在拓扑能量输运、导波、振动噪声隔离和滤波等方面具有潜在应用价值^[16-19],为装备的故障诊断、信号处理、水下隐身、精准波导等提供了全新的技术手段^[20]。正因为如此,拓扑声子晶体的研究已经成为物理学、力学、材料学和机械等多个学科交叉形成的新型学科领域中的前沿课题^[21,22]。

近年来,随着对拓扑声学研究的不断深入,拓扑力学超材料迅速崭露头角,成为研究的热点。与传统的光学和声学系统相比,固体材料中的弹性波拥有更加丰富的偏振自由度,包括纵波和横波^[23,24]。此外,弹性声子在信息处理方面展现出独特的优势,如对集成器件的可扩展性、强大的抗干扰能力、高能量容量以及低损耗。一维拓扑界面态

系统作为拓扑力学超材料研究的重要组成部分,其研究有助于深入理解拓扑保护的物理机制.这种机制使得波在界面上传播时能够抵抗背向散射和缺陷干扰.同时,在一维结构上开发的多种调控技术手段在更复杂的系统中同样具有应用价值.在实验中成功观测到一维拓扑界面态,并验证其对缺陷的鲁棒性,这为在更复杂系统中观测和验证拓扑态提供了宝贵的经验和技术支持.这一研究不仅有助于发展关于拓扑相变和拓扑不变量^[25]等基础物理理论,还为实际应用提供了新的思路 and 方向.值得一提的是,一维系统中的能带拓扑性质由 Zak 在 1989 年提出的 Zak 相位^[26]决定,但直到 2013 年才在凝聚态物理中的超冷原子实验中得以验证^[27].这一发现不仅证明了理论的正确性,也为进一步探索拓扑力学超材料领域提供了坚实的实验基础.

本文将介绍几种具有代表性的一维力学拓扑材料,并从理论上探讨拓扑现象的产生原理.首先,以 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型为例,详细阐述相关的禁带拓扑的概念.随后介绍一维拓扑界面态的理论分析、数值计算、实验表征的研究进展,包括实时主动调控拓扑本征频率的两种手段:多场耦合调控和机械调控.最后进行总结并对一维拓扑界面态领域未来研究方向进行展望.

1 SSH 模型一维能带拓扑相

一维拓扑界面态最早可以追溯到 1979 年经典的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH)^[28-30] 模型(见图 1).

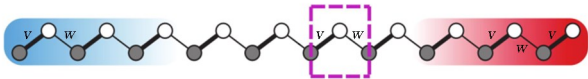


图 1 典型 SSH 模型^[28],紫色区域内为最小周期性重复单元

Fig. 1 Typical Su-Schrieffer-Heeger (SSH) model^[28], the purple area represents the smallest periodic repeating unit

SSH 模型由一维离散原子链组成,其周期性单元包括两个原子,它们通过交替跳跃参数 v 和 w 相互耦合.通过对其紧束缚哈密顿量的分析以及利用傅里叶变换,可以得到动量空间中的 Bloch 哈密顿量:

$$H_{\text{SSH}}(K) = \begin{pmatrix} 0 & v + w e^{-iK} \\ v + w e^{iK} & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 K 为 Bloch 波矢.哈密顿量(1)也可以写为 $H_{\text{SSH}}(K) = \mathbf{h}(K) \cdot \boldsymbol{\sigma}$, 其中 $h_x = v + w \cos(K)$, $h_y = w \sin(K)$, $h_z = 0$, σ_α ($\alpha = x, y, z$) 为泡利算

符.由于 $H_{\text{SSH}}(K)$ 具有反演对称性,因此能谱是关于波矢 K 对称的,即 $E(K) = E(-K)$.可很容易得到方程(1)的本征值为

$$E_{\pm}(K) = \pm \sqrt{v^2 + w^2 + 2vw \cos(K)} \quad (2)$$

对应 $v \neq w$ 本征模态为

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm e^{-i\phi_K} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 $h_x + i h_y = |\mathbf{h}(K)| e^{i\phi_K}$, 因此 $\phi_K = \arctan [h_y / h_x]$, 进而其拓扑特性可由 Zak^[24] 相位来表示:

$$\varphi_{\text{Zak}} = \frac{1}{2} \oint \frac{\partial \phi_K}{\partial K} dK \quad (4)$$

由于 SSH 单胞相对于其中心具有反演对称性 (inverse symmetric), Zak 相位只能取量子化值 0 或 π , 通过计算可得

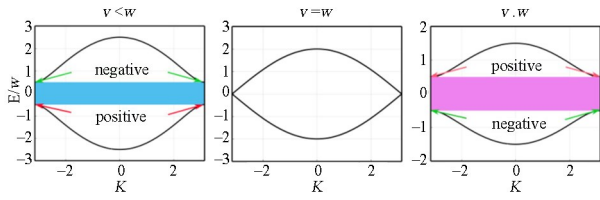
$$\varphi_{\text{Zak}} = \begin{cases} 0, & v > w \\ \pi, & v < w \end{cases} \quad (5)$$

因此,当 $v > w$ 时,系统处于拓扑平庸相;当 $v < w$ 时,系统处于拓扑非平庸相,注意到本征模态(3)在能带边缘的值为

$$|\psi_{\pm}\rangle(K = \pm\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{v - w} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

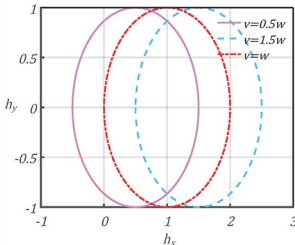
图 2 给出了三种典型情况下的能带图,分别对应 $v = 0.5w$ 、 $v = w$ 和 $v = 1.5w$. 如图 2(a) 所示,构型 $v = 0.5w$ 和 $v = 1.5w$ 两者的带隙拓扑性质完全不同,这种差异反映在能带边缘的本征模态上,当 v 和 w 的相对大小发生改变,式(6)第一项在 $K = \pm\pi$ 处的特征模态发生正负翻转.这种能带翻转现象不是偶然发生的,而是必然通过带隙关闭 ($v = w$) 进行过渡.这一点也可以通过画出 (h_x, h_y) 在连续改变波矢 K 下的轨迹观察,如图 2(b) 所示, $v > w$ 时,轨迹没有包围原点,即 $\varphi_{\text{Zak}} = 0$; 对于 $v < w$ 时,轨迹包围原点,即 $\varphi_{\text{Zak}} = \pi$; 因此必须要穿过原点 ($h_x = 0, h_y = 0$),即经过能带闭合,具有不同拓扑性质的带隙以及对应的能带结构才能平滑地相互转换.

因此将具有不同 Zak 相的两个半无限或有限 SSH 链连接起来时,带隙内会出现一个能量增强的孤子态(图 3). 该状态高度集中在两个具有不同拓扑性质的晶体交界面处,并沿着晶体两端呈指数形式衰减.由于这种界面模式受到拓扑保护,对系统中的缺陷和扰动具有很强的鲁棒性.然而,遗憾的



(a) $v=0.5w, v=w$ and $v=1.5w$ 条件下能带结构图, positive和negative 分别代表本征模态第一项正负号

(a) Energy band structure diagram under the conditions of $v=0.5w, v=w$ and $v=1.5w$, the positive and negative represent the sign of the first term of the eigenmode



(b) (h_x, h_y) 在波矢 K 遍历布里渊区的轨迹图

(b) Diagram of (h_x, h_y) as wave vector K at the Brillouin zone

图2 SSH模型能带反转

Fig. 2 Band inversion in the SSH model

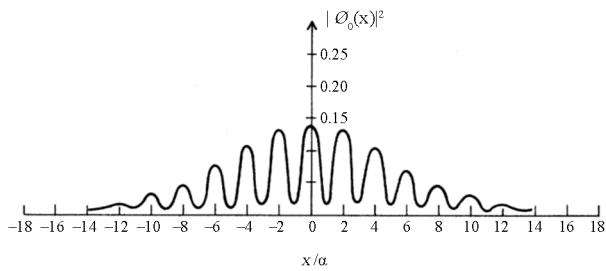


图3 不同拓扑相SSH拼接后产生密度增强的拓扑界面态^[28]

Fig. 3 Topological interface states with enhanced density produced by the connection of SSH models with different topological phases^[28]

是,SSH模型的发现早于几何拓扑相的Berry相和Zak相的发现,因此在当时并没有学者将这种界面态与系统的拓扑性质联系起来。

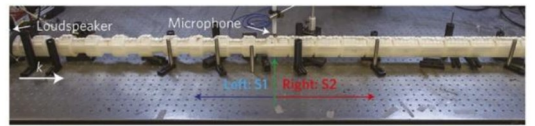
一维SSH模型具有简洁性和通用性,其带隙结构仅取决于两个邻胞之间不同的跳跃参数 v 和 w .因此只需构建由两相不同材料或结构构成的重复性周期性单元,即可研究一维拓扑界面态在其他材料(如光子、声子和机械晶体)中的表现.此外,SSH模型还可以进一步扩展至二维结构,其边界态可在二维系统的边缘处实现局域化^[31,32].

2 一维拓扑界面态系统的形成和设计方法

2.1 拓扑界面态的数值模拟研究

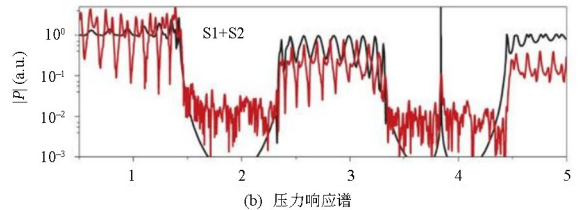
目前,国内外对一维拓扑界面态系统的研究颇为丰富,主要集中在数值模拟、实验观测和定性分析上^[17-19].声学 and 弹性的类SSH模型理论研究和

实验观测始于2015年.香港科技大学陈子亭课题组利用SSH模型设计了一种由不同半径的圆柱形波导管构成的一维声学系统^[33].数值仿真发现调整系统的结构参数可以实现能带反转,进而发生拓扑相变.采用实验测量能带边缘态的对称性和禁带内的反射相位的方法来计算系统的Zak相位(见图4).此外,还证明了单元结构相对于其中心具有反演对称性时Zak相位只能取量子化值0或 π .随后,该课题组又研究了具有反演对称性单元的一维声子结构^[34].在这样的系统中,希尔伯特空间被分为拓扑子空间和非拓扑子空间.在拓扑子空间中的体一边对应关系确保了拓扑界面态的存在,并通过实验和数值模拟验证了拓扑连续体边界态的存在,为深入理解拓扑界面态系统的特性和应用提供了理论支撑和实验依据。



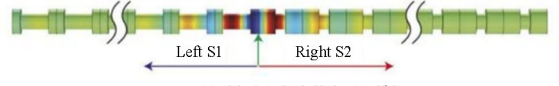
(a) 声学实验装置图

(a) Acoustic experimental setup



(b) 压力响应谱

(b) Pressure response spectra at interfaces state



(c) 界面态本征频率的声压场模拟

(c) Simulated pressure field of the interface state

图4 一维声学拓扑界面态模型^[33]

Fig. 4 One-dimensional topological interface state model^[33]

一维拓扑界面态系统的构造通常集中于调整结构参数来改变选定能带的Zak相位,从而形成两类具有不同拓扑相的结构.在这个领域,多位学者取得了显著的研究成果.华中科技大学赵德刚等学者^[35]首次提出在局部共振产生的声子带隙中构建拓扑界面态系统.他们采用弹簧-质点模型,并利用数值模拟验证了其理论.这种方法为在亚波长区域内产生声学拓扑界面态提供了有效途径. Kalozoumis等^[36]研究了Dirac点附近的复杂共振,以探索有限结构尺寸变化对拓扑界面态的影响.他们首先展示了与Dirac点周围的能带反转相

对应的复杂共振分布,并指出拓扑界面态对尺寸变化的鲁棒性.同济大学金亚斌等学者^[37]通过控制柱状梁不同平面上的振动模式,实现了能带反转,构造了两种不同的边界态.这使得扩散频谱中形成了双重 Dirac 锥.当两种界面态叠加时,便实现了具有拓扑保护的 Fano 共振.实验还验证了随机扰动对 Fano 共振的影响.

湖南大学陈久久课题组^[38]采用了有限元法和本征模匹配理论,成功实现了反平面波在一维复合结构中的拓扑界面态,还研究了由 Bragg 散射和局部共振引起的周期声学系统中的拓扑边缘模式.在所研究的系统中,他们发现同时出现了界面态和缺陷态,并为此提出了一种灵活可调的拓扑界面态设置方法.南京大学的范理等^[39]对分别具有等效负模量和负密度由侧管和薄膜组成的两种超材料进行了研究.他们深入调查了基于局部共振形成带隙的能带边缘态对称性、Zak 相、拓扑相变、阻抗和反射系数与拓扑界面态的关系,还利用禁带范围内阻抗之和为零的原理,构造了负模量和负密度超材料的拓扑界面态. Tsai 等^[40]展示了由两个不同的一维周期性弹性张紧弦组成的系统中也可以产生拓扑界面态模式,并分析了能带简并点的形成条件,发现几何和物理参数的比例必须是有理数,并进一步提出了可能的实验设置方法.实际上,完全可以考虑利用张紧力来机械调控界面态. Muhammad 等^[41]对周期性杆和 Euler 梁结构的拓扑界面态进行了研究,通过调整结构参数使特定禁带发生拓扑相变.使用 von-Mises 本征应力来验证界面态本征频率,得出界面态对材料的损耗有很强的鲁棒性,但较高的阻尼比对本征模态会有很大影响.昆明学院杨海等学者^[42]设计了一种由两个相同的带有侧缝隙的中空圆柱体组成的超材料.该模型在亚波长区域内产生了两个区域折叠引起的带隙和一个局部谐振带隙.通过旋转控制两个分离的圆柱体之间的耦合强度,可以对拓扑界面态进行调控.广州大学刘义捷等学者^[43]对由周期性谐振器组成的超材料中亚波长平面波的拓扑界面态进行了数值研究,分析了有效质量、有效刚度以及能带 Zak 相之间的关系.最后,通过计算结构的瞬态响应,验证了亚波长平面内波的拓扑态的存在.华中科技大学祝雪丰团队^[44]在理论和实验上证明了一维 Helmholtz 共振器阵列中可利用拓扑界面态进行亚波长声能量

收集.该系统可在亚波长领域产生两种类型的带隙.通过调整晶格结构参数,可以改变由于区域折叠引起的带隙拓扑性质.但该系统无法在局部共振带隙中获得拓扑态.南洋理工大学 Yu 等^[45]探讨了在沙漏型夹层结构中产生拓扑界面态的可行性.通过研究沙漏支柱的半径和能带边缘态确定了能带反转现象,并设计出产生拓扑界面态效果的典型结构.与普通结构进行对比分析验证了拓扑界面态的能量集中效果.南京大学陈延锋团队^[46]将阻抗匹配方法引入到一维多层弹性波系统中,与定性确定带隙中存在一个拓扑界面态的 Zak 相分析不同,提出的方法可以定量地设计弹性波模型中拓扑态本征频率.数值能带结构、透射谱和本征模态验证了这一方法的有效性.

2.2 拓扑界面态的实验观测研究

大量学者也通过实验测量,并利用实验数据验证了拓扑界面态的能量集中作用. Yang 等^[47]设计了一种由圆柱形水箱和狭窄水道构成的一维表面水波系统.通过调整水箱中的水深,成功实现了拓扑相变.实验结果证实,在具有不同 Zak 相位的结构边界处存在拓扑保护的界面态. Esmann 等^[48]提出了在 GHz~THz 范围内工作的一维类 SSH 模型耦合的声学纳米共振器,构建了纳米声子边缘态和界面态的拓扑转变点,并提出光学泵浦-探测技术来直接探测界面态的空间分布. Kim 等^[49]则设计了一维拓扑界面态系统,该系统主要由二氧化硅材料构成.通过调整结构参数实现了拓扑相变,利用光弹性成像技术,测量了拓扑界面态的本征模态能量集中效果,并提出这样的结构可用于高速弹性器件.国防科技大学尹剑飞等学者^[50]对一维周期性杆结构和周期性 Timoshenko 梁结构进行了研究,发现能带简并-重新打开可导致能带反转从而产生拓扑相变.并首次在实验中验证了弹性系统拓扑界面态的存在.同时,还提出了如果能带反转前后禁带结构没有公共频率范围则无法形成界面态的观点.

重庆大学王蜀霞课题组^[51]提出了一种基于声波管几何参数的设计方法,实现了在任意带隙结构组合中产生拓扑界面态的功能.通过拓扑界面态的数值模拟和实验结果验证了该方法的有效性.此后,还设计出基于 SSH 模型的一维周期声学系

统^[52]. 通过调整共振器连接管的半径(相当于 SSH 模型中的跃迁参数),可以控制整个系统的拓扑相变. 实验中,他们测量了声学系统中拓扑非平庸和平庸相之间的拓扑界面态,并深入分析了一维链中的拓扑边界态. Esmann 等学者^[53]首次利用拓扑相的概念来设计纳米声子学器件,并在实验中成功构建了支持拓扑界面态的纳米声子系统. 这种状态通过能带反转构建,并已通过拉曼光谱实验证实了其存在. 南京大学的唐一藩等学者^[54]提出了一种具备 Helmholtz 共振器的声子晶体. 通过调整腔体的边长和旋转角度生成可调的界面态. 该设计主要利用了局部共振元素和破坏镜面对称性的底层机制. 在特定频率的入射波作用下能产生拓扑谷态传输,并通过实验验证这种输运性质. 重庆大学合焯等学者^[55]通过在几何界面安装压电悬臂板,实验测量了一维声子晶体拓扑界面态的能量集中效果. 结果显示,当入射波频率与拓扑界面态本征频率相同时,界面态声学压力几乎为入射波的 66 倍. 这一发现为新型能量收集设备提供了新的思路. 该团队还进一步指出,拓扑界面态同样可以通过局部共振来激发^[56]. 通过调整局部共振器的位置,可以实现拓扑相变. 值得注意的是,此拓扑界面模式的激发频率低于共振频率,从而克服了低频时 Bragg 拓扑声子晶体的无效性. 南京大学梁彬等学者^[57]为了实现在较高频率范围内的拓扑界面态,通过对一维声子晶体的 Zak 相进行数值计算,揭示了低频范围能带结构的转变点. 实验结果表明,当晶格常数缩小至亚波长尺度时,界面态的声强与理论预测相符,这意味着在亚波长范围内可以实现高频拓扑态. Lee 等^[58]注意到大多数经典的电磁波/声波都由二阶偏微分方程描述,这对于薄板运动并不适用. 因此他们提出了一种弹性板结构拓扑界面态,并利用界面处的局部态进行能量收集. 实验证明,拓扑态通过压电效应可以提供足够高的电压馈源. 北京交通大学马天雪等学者^[59]利用有限元方法数值计算了一维周期性梁的拓扑界面态. 使用压电传感器作用于 3D 打印的两个结构之间的几何界面,首次实验测量了界面态的弯曲波能量收集作用. 结果显示,输出能量相比于参考梁结果有显著放大作用,并且再次验证了该特殊状态对随机扰动的鲁棒性. 武汉大学刘正猷课题组^[60]提出了在水中使用的钢-空气周期性复合结构,实验测量拓扑界面态和非

零 Zak 相,对界面态对扰动的鲁棒性进行了验证,为在水中观察拓扑态提供了一种策略.

2.3 构造拓扑界面态转换点策略

随着拓扑系统研究的深入,多位学者提出了不同于传统调整结构参数的拓扑转换点构造方法. 青岛理工大学张洪波等学者^[61]提出了一种区域折叠(zone-folding)的方式来创造拓扑界面态(图 5). 通过将周期性单元长度加倍创建拓扑相转换点,从而避免繁琐的调整参数确定 Dirac 锥的位置. 并使用有限元法对声子晶体的拓扑性质进行了分析.

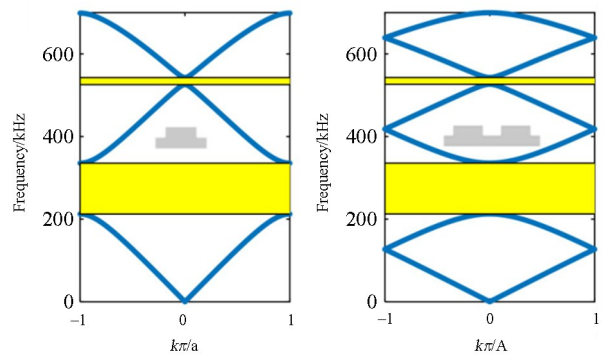


图 5 区域折叠策略构造拓扑转换点^[61]

Fig. 5 Topological transition point produced by zone folding^[61]

南京大学程营课题组^[62]则设计了迷宫声学超材料双通道的 Mie 谐振器,并通过能带折叠理论实现能带简并. 通过改变超元胞内单元的间距调节了 Zak 相位,进一步在两种具有不同拓扑相的声子晶体的交界处实现了多极拓扑界面态. 北京交通大学的石志飞等学者^[63]利用区域折叠技术,在 Winkler 弹性地基梁上形成了拓扑转换点. 此过程可以通过调整共振器的固有频率和 Winkler 地基的弹性参数来实现,作者进一步研究了该结构的拓扑界面态,并发现阻尼的引入会降低拓扑传输效率,而质量缺损则能提高传输效率. 此外还有基于声波管几何参数的全相图设计方法^[51]等也被提出并应用于拓扑系统的研究中. 这些方法为拓扑界面态结构和拓扑转换点的构造和调控提供了新的思路和途径.

拓扑界面态的形成需要组合两个在公共禁带范围内具有不同拓扑相的结构^[50],而结构的禁带拓扑相又与系统表面阻抗相关^[33,34]. 从结构的响应谱上可以观察到,拓扑界面态的本征频率对应着一条狭窄的通带(图 4),此时整个系统阻抗之和为零^[34,51]. 因此对结构在禁带频率范围内的阻抗进

行解析研究,有助于定量分析拓扑界面态的本征频率,从而可以根据实际工程的需要反演设计拓朴器件,以实现弹性拓朴界面态的精确调控。

2.4 拓朴界面态在准周期结构中的构造

除了上述一维周期性 SSH 型晶体的拓朴态研究成果,研究人员还将拓朴的概念引入到准周期弹性波系统中。Xia 等学者^[64]研究了一维准周期局部共振的拓朴系统,发现准周期的结构设置会引入额外的禁带,并通过数值计算色散频谱发现了类似 Hofstadter 蝴蝶状的结构。此外,他们还通过准周期悬臂梁的实验验证了拓朴界面态的存在,并认为这样的系统具有能量收集功能。另外,湖南大学陈久久课题组^[65]在由 Fibonacci 序列构造的一维准周期声子晶体板中实现了剪切(SH)波的多重拓朴态。他们使用了与光子晶体相同的拓朴界面态形成机理,即两不同结构公共禁带频率范围内阻抗之和为零。

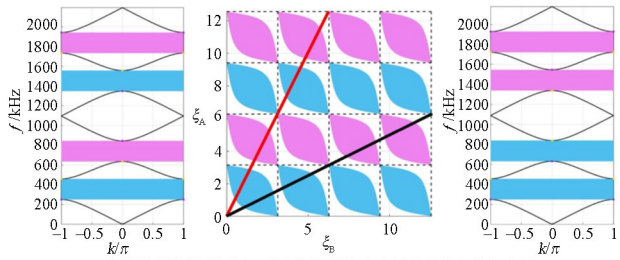
2.5 拓朴界面态本征频率求解

然而,关于拓朴界面态的本征频率与整个系统的物理几何参数之间的潜在关系研究较少。同济大学金亚斌等学者^[66]基于一维声子晶体梁的反射系数和扩散频谱,提出了一种使用强化学习模型来实现预期带隙的周期性声子晶体梁设计,通过从本征模式的角度确定界面态本征频率,并研究了界面态对于结构几何缺陷和扰动的鲁棒性。另外, Muhammad 等^[67]介绍了使用深度学习技术来逆向设计拓朴界面态系统,通过将周期性杆、梁结构的扩散方程和拓朴界面态等作为输入数据对神经网络进行训练,创建了拓朴界面态响应与结构几何物理参数之间的非线性映射,提出了一种新拓朴界面态系统设计方法。

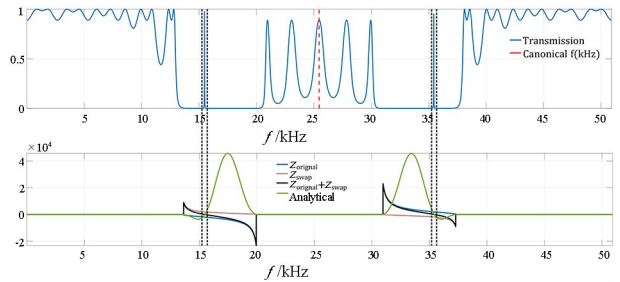
拓朴界面态本征频率对应系统两个周期性结构的阻抗虚部之和为零,而禁带范围内的阻抗与两相材料的物理和几何参数、Bloch 波数以及入射波的频率都相互关联,同时要保证系统中两个周期性结构在公共禁带频率的范围内拓朴性质相反。因此一维周期性结构的禁带频率范围需要进行合理预测,并计算其拓朴性质。英国卡迪夫大学的 Gei 等结合了传递矩阵法和 Floquet-Bloch 边界条件,精确计算了一维准周期结构(如杆^[68,69]和层合板^[70])

的色散频谱。基于 Kohmoto 微分流形上由动力矩阵的迹确定的初始鞍点的研究,他们发现结构对应的色散频谱形成了完全对称且周期性的能带结构。这本质上是利用了传递矩阵的迹中三角函数的周期性。该方法可视为一种预测弹性波在周期结构中传播的方法。之后又结合学者们在度量图上研究 Schrödinger 算子的一种方法:环面图^[71],对周期性杆的能带结构的带隙密度、材料几何参数进行了优化。

陈治江在该方法的基础上,进一步确定了三种不同的结构几何和材料参数的设置解析表达式,并和 Gei 一起将这样的结构称为一维正则周期性结构(canonical structure),并成功应用于周期性杆弹性波禁带预测^[72]、反平面剪切波在周期性层合板中的负折射优化设计^[73,74]问题中。一维结构的禁带拓朴相和拓朴转换点实际上可方便地表示在环面图^[75]上。于是陈治江基于环面图上的禁带边缘方程和能带边缘本征模态的对称性条件,直接预测一维周期性正则结构的禁带拓朴相,从而指导拓朴界面态系统中两种结构的设计[图 6(a)]。而后,基于周期性杆的反射系数与阻抗之间的关系研究,进而利用传递矩阵法结合 Chebyshev 恒等关系,构造了结构阻抗与 Bloch 波数、几何物理参数之间的显



(a) 周期性结构的环面图,中间图红线代表左边能带的拓朴相分析,而黑线代表右边拓朴相分析,不同颜色拓朴相的交点即拓朴转换点
(a) Diagrams of tons and energy band for a periodic structure. The red line in the middle graph represents the topological phase of the left band, while the black line represents the topological phase of the right. The intersection points of different coloured topological phases are the topological transformation points



(b) 一维周期性结构组合传输系数和阻抗图,灰色线代表拓朴界面态本征频率理论解
(b) The transmission coefficient and impedance diagram of periodic structure combination, with grey lines representing the analytical solution of the eigenfrequency of topological interface

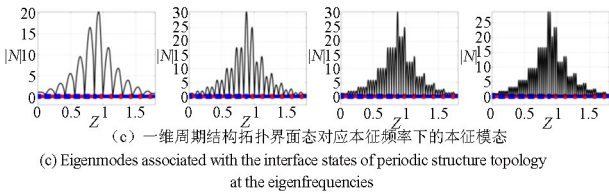


图6 一维拓扑界面态本征频率的理论解析和对应结构设计方法^[75]
Fig. 6 Analytical analysis and corresponding structural design for one-dimensional topological interface states eigenfrequency^[75]

式关系. 他们发现一对周期性结构, 它们具有相同的频散关系, 但公共禁带拓扑相正好相反. 将经过这样的两种周期性结构进行组合, 通过分析整个系统阻抗为零的条件, 顺利推导出对应结构组合下的拓扑态本征频率理论解[图 6(b)], 并通过数值计算验证了解析结果的准确性^[75][图 6(c)].

3 拓扑界面态的主动调控

由于周期性结构的禁带频率由结构物理属性和几何参数决定, 在拓扑界面态系统组装完成后即固定不变, 因此无法动态调控拓扑界面态的本征频率, 这极大地限制了该波导的应用范围和灵活性^[17-19]. 如何实现对其工作频率的实时调控成为一个具有重要价值的课题. 目前主要有两种不同的调控手段: 机械调控和基于多场耦合调控.

3.1 拓扑界面态系统的机械调控

目前有大量的研究致力于通过调整外部预应力来改变周期性结构的频散关系, 进而调整拓扑界面态的工作频率. 武汉大学刘正猷课题组^[76]提出了一种基于 SSH 模型的可调控外部预应力非线性声子晶体, 这种晶体可以调控拓扑相变, 从而实现拓扑界面态的开关功能. 华中科技大学的臧剑锋课题组^[77]则展示了对于拥有周期性蜂窝形状空洞的 Ecoflex 软力学超材料的可调拓扑性质的实验观察和数值模拟. 通过改变力学超材料的填充率、张拉或压缩变形, 成功实现了选定禁带拓扑相的按需切换. 由于软材料具有模量小、易变形的特性, 研究者还提出了通过力学变形来调控弹性波的拓扑态的方法, 即将一边的超材料固定, 另一边的超材料变形. 实验结果表明, 随着应变的增大, 拓扑态会从无到有, 并且对应频率值逐渐降低.

广州大学刘义捷等学者^[78]基于 Hertz 接触原理开发了一种颗粒型晶体, 这种晶体可以根据不同的接触条件形成三种不同的等效弹簧模型. 通过研

究不同预压力对结构刚度的影响, 从而调控 Bloch 禁带拓扑相, 形成可机械调控的拓扑界面态系统. 通过数值计算本征频率时结构的动力响应从而验证了理论结果. 浙江大学伍斌等学者^[79]为了克服拓扑界面态本征频率不可调整的问题, 提出了使用软材料制作的声子晶体搭配非线性弹性力学模型. 研究了 Neo-Hookean 和 Gent 力学模型中轴向力对系统的影响, 发现对于 Neo-Hookean 模型, 轴向拉力的升高会导致拓扑态的本征频率下降. 而对于 Gent 模型, 本征频率与轴向拉力并不是单调变化的关系. 华中科技大学臧剑锋课题组^[80]制作了一种基本单元受启发于氮化硼的软超材料, 并观察到扩散频谱中同时发生的两种弹性界面态. 研究了轴向应变对拓扑界面态本征频率和本征模态的影响, 发现该超材料在水平方向上打破了反演对称性, 为可调弹性谷霍尔效应提供了一些参考. 接下来他们利用该周期单元的特殊性^[81], 直接对结构进行镜像对称操作, 从而构建拓扑系统中另一个结构, 并可直接采取拉压该超材料来调控拓扑本征频率, 形成了可重复、可逆的频率调控和拓扑界面态的开关功能. Hu 等^[82]设计了一种具有均匀的主体结构的声子晶体材料, 直接对局部共振单元进行设计, 构造能带反转, 从扩散频谱中找到了三个拓转换点, 并成功获得拓扑界面态. Cajic 等学者^[83]在一维类似双原子和三原子的周期性质点单元中引入惯性计, 通过对两种不同周期单元结构的特征值谱和频率响应函数的研究, 展示了拓扑界面态的存在以及惯性计、局部共振质点质量和阻尼对其的影响. 数值分析表明, 惯性计的引入会明显降低禁带结构和拓扑界面态本征频率, 而阻尼的引入则会使拓扑本征模态更快地衰减. 华中科技大学祝雪丰团队^[84]提出了反平面波和平面内波可以倾斜入射至周期性复合板拓扑界面态系统, 并提出了一种新的方法去激发和调整拓扑态. 他们还分析了该非厄米 (non-Hermitian) 系统会产生“偏极化”(拓扑能量转换) 和“全向极化”等有趣现象, 并可通过改变入射角来主动调控拓扑界面态. 受压-扭耦合超材料的启发, 中南大学李盈利等学者^[85]设计了一种质量-弹簧周期性结构. 该结构在拓扑界面态本征频率处表现出极大的扭转效果. 还分析了调整不同弹簧之间的刚度比和引入缺陷对拓扑态的集中效果和带隙结构的影响, 随着刚度比的下降和缺陷靠近

几何界面, 拓扑本征模态的能量集中效果更明显。

上述工作介绍了多个研究团队通过调整外部预应力、利用软材料、设计周期性结构等方式, 来实现对拓扑界面态工作频率的调控, 本质上是实现了对周期结构、声子晶体的色散关系调控^[22], 以及拓扑相变的开关功能。这些研究展示了力学变形、材料特性和结构设计对拓扑界面态的影响, 为外部荷载可调弹性波拓扑态的实现提供了参考。

部分研究通过机械变形周期性结构来主动调控拓扑界面态。Chaunsali 等学者^[86]基于 SSH 模型设计了一种由圆柱形颗粒组成的一维可调谐机械系统(图 7)。通过改变圆柱体之间的接触角, 可以调整整体结构的刚度, 进而调控结构禁带的拓扑相, 主动调控拓扑界面态。研究成果得到了数值计算和实验的验证, 并推导了对应系统中拓扑界面态本征频率理论解。浙江大学陈伟球团队^[87]设计了一种由超弹性材料组成的周期性声子晶体结构, 通过调整几何参数产生拓扑界面态, 并通过有限元数值仿真验证了理论结果。同济大学金亚斌等学者^[88]设计了一种单侧或双侧的柱状声子梁结构, 发现拓扑界面态的位移衰减速率与频散关系在 Dirac 点附近的斜率成反比。由于单侧声子梁可以将

扭转(压缩)波转换为扭转和剪切波(或压缩和弯曲波), 而双侧声子梁则阻止扭转(压缩)波的通过。通过将这两种结构组合在一起, 研究了波的单向通过模式。

东北大学杨天智等学者^[89]结合了 Bragg 散射和局部共振的力学机制, 在一维声子晶体 Euler 梁中形成了拓扑界面态。通过调节声学黑洞的几何参数来调控禁带拓扑相转换, 并通过实验测量验证了传递矩阵法和有限元方法的数值结果。他们还研究了扰动和几何缺陷对界面态的影响, 表明这样的结构设置可以在亚波长范围内操纵弹性波。江苏大学葛勇等学者^[90]意识到, 一维拓扑界面态由于其固有的局部性质而不能作为载体从一个地点到另一个地点传递信息。于是他们设计了一种具有可移动界面的结构, 通过两种可相互切换的周期性单元, 构建了一个可编程拓扑声子晶体, 从而观察到在频段中沿结构传播的零维拓扑界面态。

3.2 拓扑界面态系统的多物理场调控

目前, 一些学者通过在声子晶体中引入力电(磁)材料, 利用外部电(磁)场的改变来调控拓扑界面态^[17-19]。湖南大学陈久久团队^[91]将磁弹性引入拓扑界面态系统, 构建了由磁弹性和非磁弹性结构组成的类 SSH 模型。通过调节外部磁场, 成功地改变了声子晶体中的 Lamb 波特性和禁带拓扑相的改变, 从而实现了拓扑态的开关控制。此外, 还进一步主动调控了本征频率的位置。Vila 等^[92]设计了一种磁耦合的机械晶体, 通过打破空间反演对称性研究了带隙结构中的拓扑界面态。他们利用小变形假设, 将晶体之间的相互作用视为线性, 同时还研究了非线性连接弹簧对拓扑界面态的影响, 得出可将拓扑保护与非线性作用相结合的结论。

浙江大学陈伟球团队^[93]采用逐步开闭的周期性电边界条件, 通过调整两相材料连接电容的参数以实现拓扑相位的反转, 在一维均质压电声子晶体杆系统中成功实现了主动可调的拓扑保护界面态(图 8), 并提出了可能的实验设置来验证这一结论。

广州大学刘义捷课题组^[94]通过在弹性梁上周期排列压电层, 通过改变电场, 可以改变周期单元的刚度, 结合区域折叠技术成功实现了能带反转和拓扑相变, 表明通过电流的改变, 可以在多个频段

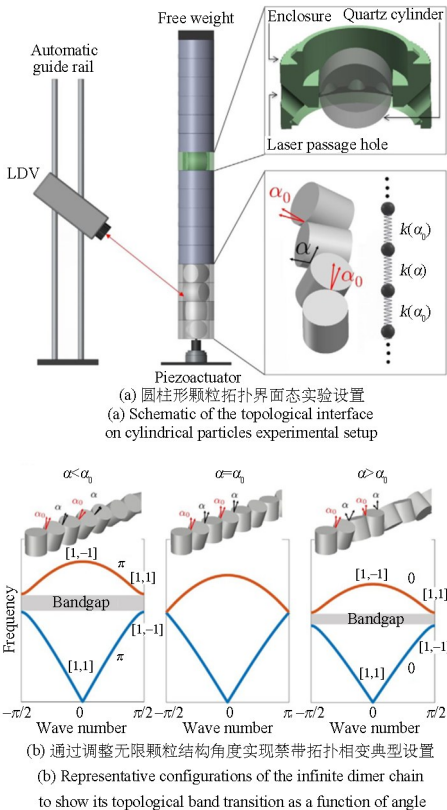


图 7 圆柱形颗粒组成的一维可调谐机械系统^[86]
Fig. 7 One-dimensional cylindrical tunable mechanical system^[86]

设计出拓扑界面态.他们还研究了局部共振效应对拓扑界面模式的影响.浙江大学陈伟球团队^[95]研究了一维软介电声子晶体梁.他们使用非线性电弹性模型结合波谱单元法,成功分析了系统在低频下的拓扑界面态情况.同时,还研究了轴向力和电压对拓扑界面态本征频率的影响.更进一步地,通过单独调整周期单元电压,可以在更大范围内对拓扑界面态进行调控.Chen等^[96]提出了一种创新的活性夹层结构,该结构由活性材料钛酸钡(BaTiO_3)和二氧化钴(CoO_2)组成,考虑了温度影响的磁电弹性材料的线性本构关系.他们使用波谱单元法和平面波展开法分析了系统的能带结构,并成功地实现了拓扑界面态模式.宁夏大学董旭光等学者^[97]设计了一种磁性柱状声子结构.他们发现,通过调整磁柱在周期性单元结构中的位置,可以控制其纵波通过时的扩散频谱和拓扑转换.有趣的是,随着柱状声子梁数量的增加,拓扑态的能量集中效果逐渐下降.数值计算和实验模拟的结果进一步验证了理论结果.

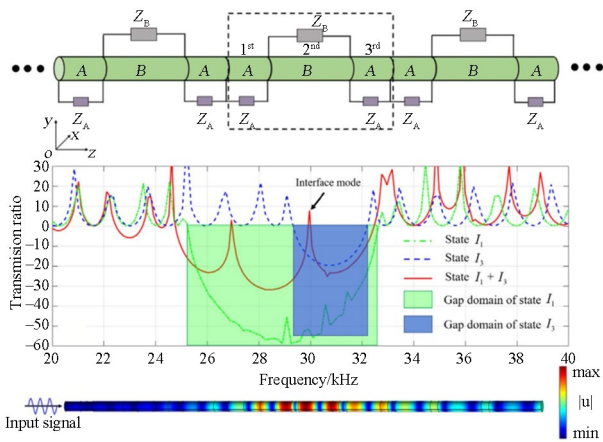


图8 一维压电声子晶体的可调拓扑界面态^[93]

Fig. 8 Tunable topological interface states in one-dimensional piezoelectric phononic crystals^[93]

4 结论

本文以简明的一维SSH模型为例,对一维拓声子系统进行了较为系统的介绍,涉及基本概念、原理与动力学现象.限于篇幅,简单探讨了能带拓扑相变、几何Zak相、拓扑界面态的形成以及对应的本征模态等内容.梳理了关于一维拓扑界面态的国内外研究现状及发展动态,关于一维拓扑界面态的研究主要集中于通过计算力学和实验测量的方法获得能带几何Zak相,并构造公共禁带频率范

围内拓扑反转的两类结构,以形成拓扑界面态系统,进而获得该系统的本征频率.国内外学者们还研究了一维拓扑界面态的形成机理,并从理论上证明了能带边缘态对称性与禁带拓扑相的关系.部分学者已尝试通过引入机械变形或压电磁材料来调控完成组装后系统的拓扑界面态本征频率,为实现超材料系统在结构、性能、设计、控制等方面的一体化提供了有力支持.然而,拓扑界面态特殊的拓扑保护本征模态需要在工作频率等于其本征频率时才会被激发,而国内外学术界在涉及其本征频率与系统物理几何参数的关联规律方面,尚缺乏深入的理解.

因此亟需开展拓扑界面态的本征频率理论解的研究^[66,86],理论解的缺失导致无法精确地根据工程所需的频率逆向设计结构,并主动调控拓扑界面态,有望为拓扑弹性声子晶体器件实际工程应用提供理论支持.拓扑界面态系统通常由两个或多个不同的器件组成,本征频率的理论解析应该与这些器件的特殊设计方式紧密相关.如何设计出特殊的一维拓声子器件组合,并利用不同结构或器件在公共禁带范围内实现阻抗匹配,以阻抗解析表达式反向设计周期性结构,同时获得本征频率的理论解,以期可以高效率利用拓声子态的免疫缺陷和能量集中效果,是值得进一步深入探索和研究的问题.

近年来,超材料中的非厄米系统(non-Hermitian)研究备受关注.这类系统与外界环境存在能量交换,因此展现出更加丰富的物理现象^[98],如复能谱、非正交本征模态、奇异点(exceptional point)等.这些特性赋予非厄米系统独特的性质和功能,例如高灵敏传感和鲁棒性模态转换等^[99].非厄米性与拓声子性的相互作用能够产生一系列在单独的非厄米系统或拓声子系统中难以实现的奇特现象.与厄米系统相比,人们发现在非厄米拓声子系统中不存在熟悉的体边对应关系.目前,建立非厄米体系的体边对应有两种独立的方法:一种是2018年Yao和Wang等人提出的基于非Bloch能带理论的体边界对应^[100];另一种方法是由Bergholtz等人提出的基于双正交基的体边界对应^[101],他们借助双正交量子力学的概念,为非厄米体系建立了一个完整的体边界对应关系理论框架.而当周期性边界条件变为开边界条件时,非厄米系统的体本征态空间分布会发生显著变化,其特征是所有的体本征态会聚集到某一边界上,这一现象通常被称为非厄米趋

肤效应(skin effect)^[100].然而,目前关于非厄米拓扑声子晶体的研究仍较为匮乏.因此,有必要进一步研究非厄米系统与其他拓扑物态的相互作用机制,包括奇异点对能带拓扑相变的影响,以及特征向量空间坍塌时产生的拓扑界面态.

此外,受时间反演对称性保护的互易性是波传输的本质特性.而非互易性(non-reciprocity),作为一种极其重要的响应性质,在能流控制、成像技术和拓扑绝缘体等领域具有重大应用前景^[102].非互易性指波能在一个方向上不受阻碍地传输,而在相反方向上传输被基本禁止的现象.实现非互易性的方法主要有三种:基于非线性介质、引入动态分量和考虑磁弹性的相互作用^[103].但这些结构很难利用现有加工技术精确地生产出来,是否可以考虑采用拓扑保护特性而具有免疫缺陷的特点,实现完美的非互易器件也是一个值得继续深入研究的问题.

参考文献

- [1] RICCA R L, BERGER M A. Topological ideas and fluid mechanics [J]. *Physics Today*, 1996, 49(12): 28—34.
- [2] KLITZING K, DORDA G, PEPPER M. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance [J]. *Perspectives in Condensed Matter Physics*, 1989, 2: 145—148.
- [3] THOULESS D J, KOHMOTO M, NIGHTINGALE M P, et al. Quantized Hall conductance in a two-dimensional periodic potential [J]. *Physical Review Letters*, 1982, 49(6): 405—408.
- [4] KANE C L, MELE E J. Z₂ topological order and the quantum spin Hall effect [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(14): 146802.
- [5] ANDREI BERNEVIG B, HUGHES T L, ZHANG S C. Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells [J]. *Science*, 2006, 314(5806): 1757—1761.
- [6] RYCERZ A, TWORZYDLO J, BEENAKKER C W J. Valley filter and valley valve in graphene [J]. *Nature Physics*, 2007, 3(3): 172—175.
- [7] POLASH M M H, YALAMEHA S, ZHOU H H, et al. Topological quantum matter to topological phase conversion: Fundamentals, materials, physical systems for phase conversions, and device applications [J]. *Materials Science & Engineering R: Reports*, 2021, 145: 100620.
- [8] LU L, JOANNOPOULOS J D, SOLJACIC M. Topological photonics [J]. *Nature Photonics*, 2014, 8(11): 821—829.
- [9] 彭湃, 刘正猷. 拓扑声子晶体[J]. *物理实验*, 2021, 41(5): 1—9.
PENG P, LIU Z Y. Topological phononic crystal [J]. *Physics Experimentation*, 2021, 41(5): 1—9. (in Chinese)
- [10] SUSSTRUNK R, HUBER S D. Observation of phononic helical edge states in a mechanical topological insulator [J]. *Science*, 2015, 349(6243): 47—50.
- [11] LU L, JOANNOPOULOS J D, SOLJACIC M. Topological states in photonic systems [J]. *Nature Physics*, 2016, 12(7): 626—629.
- [12] HALDANE F M, RAGHU S. Possible realization of directional optical waveguides in photonic crystals with broken time-reversal symmetry [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(1): 013904.
- [13] KUSHWAHA M S, HALEVI P, DOBRZYNSKI L, et al. Acoustic band structure of periodic elastic composites [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(13): 2022—2025.
- [14] YANG Z J, GAO F, SHI X H, et al. Topological acoustics [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(11): 114301.
- [15] LU J Y, QIU C Y, DENG W Y, et al. Valley topological phases in bilayer sonic crystals [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(11): 116802.
- [16] 孙晓晨, 何程, 卢明辉, 等. 人工带隙材料的拓扑性质[J]. *物理学报*, 2017, 66(22): 40—56.
SUN X C, HE C, LU M H, et al. Topological properties of artificial bandgap materials [J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(22): 40—56. (in Chinese)
- [17] 陈毅, 张泉, 张亚飞, 等. 弹性拓扑材料研究进展[J]. *力学进展*, 2021, 51(2): 189—256.
CHEN Y, ZHANG Q, ZHANG Y F, et al. Research progress of elastic topological materials [J]. *Advances in Mechanics*, 2021, 51(2): 189—256. (in Chinese)
- [18] 杨世礼, 钟雨豪, 颜士玲, 等. 弹性板波超材料研究进展 [J]. *科学通报*, 2022, 67(12): 1232—1248.
YANG S L, ZHONG Y H, YAN S L, et al. A review of elastic plate wave metamaterials [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2022, 67(12): 1232—1248.

- (in Chinese)
- [19] 郑周甫, 尹剑飞, 温激鸿, 等. 基于声子晶体板的弹性波拓扑保护边界态[J]. 物理学报, 2020, 69(15): 285—294.
- ZHENG Z F, YIN J F, WEN J H, et al. Topologically protected edge states of elastic waves in phononic crystal plates [J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, 69(15): 285—294. (in Chinese)
- [20] 夏百战, 杨天智. 声学超材料和声子晶体研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(7): 1—4.
- XIA B Z, YANG T Z. Progress in acoustic metamaterial and phononic crystals [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(7): 1—4. (in Chinese)
- [21] 国家自然科学基金委员会, 中国科学院. 中国学科发展战略—材料与工程 [M]. 北京: 科学出版社, 2021.
- National Natural Science Foundation, Chinese Academy of Sciences. Strategy for academic discipline development in China—Materials science and engineering [M]. Beijing: Science Press, 2021. (in Chinese)
- [22] 国家自然科学基金委员会, 中国科学院. 中国学科发展战略——固体力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2021.
- National Natural Science Foundation, Chinese Academy of Sciences. Strategy for academic discipline development in China—Solid mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2021. (in Chinese)
- [23] AULD B A, GREEN R E. Acoustic fields and waves in solids: two volumes [J]. *Physics Today*, 1974, 27(10): 63.
- [24] ACHENBACH J. Wave Propagation in Elastic Solids [M]. Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1973.
- [25] BERRY M V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes [J]. *Proceedings of the Royal Society of London A Mathematical and Physical Sciences*, 1984, 392(1802): 45—57.
- [26] ZAK J. Berry's phase for energy bands in solids [J]. *Physical Review Letters*, 1989, 62(23): 2747—2750.
- [27] ATALA M, AIDELSBURGER M, BARREIRO J, et al. Direct measurement of the Zak phase in topological Bloch bands [J]. *Nature Physics*, 2013, 9: 795—800.
- [28] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Solitons in polyacetylene [J]. *Physical Review Letters*, 1979, 42(25): 1698—1701.
- [29] SU W P, SCHRIEFFER J R, HEEGER A J. Soliton excitations in polyacetylene [J]. *Physical Review B*, 1980, 22(4): 2099—2111.
- [30] ASBOTH J, OROSZLANY L, PALYI A. A Short Course on Topological Insulators [M]. Cham, Switzerland: Springer, 2016.
- [31] ZHENG L-Y, ACHILLEOS V, RICHOUX O, et al. Observation of edge waves in a two-dimensional Su-Schrieffer-Heeger acoustic network [J]. *Physical Review Applied*, 2019, 12(3): 034014.
- [32] OBANA D, LIU F, WAKABAYASHI K. Topological edge states in the Su-Schrieffer-Heeger model [J]. *Physical Review B*, 2019, 100(7): 075437.
- [33] XIAO M, MA G C, YANG Z Y, et al. Geometric phase and band inversion in periodic acoustic systems [J]. *Nature Physics*, 2015, 11(3): 240—244.
- [34] XIAO Y X, MA G C, ZHANG Z Q, et al. Topological subspace-induced bound state in the continuum [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(16): 166803.
- [35] ZHAO D G, XIAO M, LING C W, et al. Topological interface modes in local resonant acoustic systems [J]. *Physical Review B*, 2018, 98: 014110.
- [36] KALOZOU MIS P A, THEOCHARIS G, ACHILLEOS V, et al. Finite-size effects on topological interface states in one-dimensional scattering systems [J]. *Physical Review A*, 2018, 98(2): 023838.
- [37] WANG W, JIN Y B, WANG W, et al. Robust Fano resonance in a topological mechanical beam [J]. *Physical Review B*, 2020, 101(2): 024101.
- [38] HUANG H B, CHEN J J, HUO S Y. Simultaneous topological Bragg and locally resonant edge modes of shear horizontal guided wave in one-dimensional structure [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2017, 50(27): 275102.
- [39] FAN L, YU W W, ZHANG S Y, et al. Zak phases and band properties in acoustic metamaterials with negative modulus or negative density [J]. *Physical Review B*, 2016, 94(17): 174307.
- [40] TSAI Y W, WANG Y-T, LUAN P-G, et al. Topological phase transition in a one-dimensional elastic string system [J]. *Crystals*, 2019, 9(6): 313.
- [41] MUHAMMAD Z, ZHOU W J, LIM C W. Topological edge modeling and localization of protected interface modes in 1D phononic crystals for longitudinal and bending elastic waves [J]. *International*

- Journal of Mechanical Sciences, 2019, 159: 359 — 372.
- [42] WANG Z Y, ZHAO D G, LUO J L, et al. Broadband modulation of subwavelength topological interface states in a one-dimensional acoustic system [J]. Applied Physics Letters, 2020, 116(1): 013102.
- [43] LIU Y J, JIN L, WANG H F, et al. Topological interface states in translational metamaterials for sub-wavelength in-plane waves [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2021, 197: 106308.
- [44] ZHAO D G, CHEN X C, LI P, et al. Subwavelength acoustic energy harvesting via topological interface states in 1D Helmholtz resonator arrays [J]. AIP Advances, 2021, 11(1): 015241.
- [45] YU D W, HU G B, GUO Z K, et al. Topological interface state formation in an hourglass lattice sandwich meta-structure [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2023, 246: 108170.
- [46] ZHANG W Y, CHEN H, LAI H S, et al. Multi-mode topological interface states in a one-dimensional elastic-wave phononic crystal [J]. Physics Letters A, 2023, 479: 128929.
- [47] YANG Z J, GAO F, ZHANG B L. Topological water wave states in a one-dimensional structure [J]. Scientific Reports, 2016, 6: 29202.
- [48] ESMANN M, LAMBERTI F R, LEMAÎTRE A, et al. Topological acoustics in coupled nanocavity arrays [J]. Physical Review B, 2018, 98(16): 161109.
- [49] KIM I, IWAMOTO S, ARAKAWA Y. Topologically protected elastic waves in one-dimensional phononic crystals of continuous media [J]. Applied Physics Express, 2018, 11(1): 017201.
- [50] YIN J F, RUZZENE M, WEN J H, et al. Band transition and topological interface modes in 1D elastic phononic crystals [J]. Scientific Reports, 2018, 8(1): 6806.
- [51] MENG Y, WU X X, ZHANG R Y, et al. Designing topological interface states in phononic crystals based on the full phase diagrams [J]. New Journal of Physics, 2018, 20(7): 073032.
- [52] LI X, MENG Y, WU X X, et al. Su-Schrieffer-Heeger model inspired acoustic interface states and edge states [J]. Applied Physics Letters, 2018, 113(20): 203501.
- [53] ESMANN M, LAMBERTI F R, SENELLART P, et al. Topological nanophononic states by band inversion [J]. Physical Review B, 2018, 97(15): 155422.
- [54] TANG Y F, LIANG B, YANG J, et al. Topological phononic crystals with tunable interface state based on local resonance [J]. Applied Physics Express, 2019, 12(9): 094002.
- [55] FAN L, HE Y, CHEN X A, et al. Acoustic energy harvesting based on the topological interface mode of 1D phononic crystal tube [J]. Applied Physics Express, 2020, 13(1): 017004.
- [56] FAN L, HE Y, ZHAO X, et al. Subwavelength and broadband tunable topological interface state for flexural wave in one-dimensional locally resonant phononic crystal [J]. Journal of Applied Physics, 2020, 127(23): 235106.
- [57] LI Z W, FANG X S, LIANG B, et al. Topological interface states in the low-frequency band gap of one-dimensional phononic crystals [J]. Physical Review Applied, 2020, 14(5): 054028.
- [58] LEE D, LANZILLOTTI-KIMURA N D, LI J, et al. Elastic topological interface states and voltage feeder by breaking inversion symmetry on thin plates [J]. Physical Review B, 2022, 106(10): 104107.
- [59] MA T X, FAN Q S, ZHANG C Z, et al. Flexural wave energy harvesting by the topological interface state of a phononic crystal beam [J]. Extreme Mechanics Letters, 2022, 50: 101578.
- [60] LUO L C, YE L P, HE H L, et al. Experimental observation of the topological interface state in a one-dimensional waterborne acoustic waveguide [J]. Physical Review Applied, 2023, 20(4): 044008.
- [61] ZHANG H B, LIU B L, ZHANG X L, et al. Zone folding induced tunable topological interface states in one-dimensional phononic crystal plates [J]. Physics Letters A, 2019, 383(23): 2797—2801.
- [62] ZHANG Z W, CHENG Y, LIU X J, et al. Subwavelength multiple topological interface states in one-dimensional labyrinthine acoustic metamaterials [J]. Physical Review B, 2019, 99(22): 224104.
- [63] NI A C, SHI Z F. Subwavelength tunable topological interface modes in metamaterial beams on elastic foundation [J]. Physics Letters A, 2023, 466: 128734.
- [64] XIA Y W, ERTURK A, RUZZENE M. Topological edge states in quasiperiodic locally resonant metastructures [J]. Physical Review Applied, 2020, 13(1): 014023.

- [65] ZHAO J M, HUO S Y, HUANG H B, et al. Topological interface states of shear horizontal guided wave in one-dimensional phononic quasicrystal slabs [J]. *Physica Status Solidi—Rapid Research Letters*, 2018, 12(10): 1800322.
- [66] 金亚斌, 何良书. 声子晶体梁边界态的强化学习设计方案与本征模式分析 [J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2022, 50(11): 1539—1547, 1528.
- JIN Y B, HE L S. Reinforcement learning design scheme and eigenmode analysis of edge states of phononic beams [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2022, 50(11): 1539—1547, 1528. (in Chinese)
- [67] MUHAMMAD, OGUN O, KENNEDY J. Inverse design of a topological phononic beam with interface modes [J]. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 2023, 56(1): 015106.
- [68] GEI M. Wave propagation in quasiperiodic structures: stop/pass band distribution and prestress effects [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, 47(22/23): 3067—3075.
- [69] MORINI L, GEI M. Waves in one-dimensional quasicrystalline structures: dynamical trace mapping, scaling and self-similarity of the spectrum [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2018, 119: 83—103.
- [70] MORINI L, EYZAT Y, GEI M. Negative refraction in quasicrystalline multilayered metamaterials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, 124: 282—298.
- [71] MORINI L, TETIK Z G, SHMUEL G, et al. On the universality of the frequency spectrum and band-gap optimization of quasicrystalline-generated structured rods [J]. *Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2020, 378(2162): 20190240.
- [72] GEI M, CHEN Z, BOSI F, et al. Phononic canonical quasicrystalline waveguides [J]. *Applied Physics Letters*, 2020, 116(24): 241903.
- [73] CHEN Z J, MORINI L, GEI M. On the adoption of canonical quasi-crystalline laminates to achieve pure negative refraction of elastic waves [J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2022, 380(2237): 20210401.
- [74] CHEN Z J, MORINI L, GEI M. Negative refraction for anti-plane elastic waves in canonical quasicrystalline laminates [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2023, 100: 104577.
- [75] CHEN Z J. Quasicrystalline-generated phononic crystals for advanced engineering applications [D]. Cardiff, Wales: Cardiff University, 2022.
- [76] 李锋, 黄学勤, 陆久阳, 等. 一维颗粒声子晶体的拓扑相变及可调界面态 [J]. *物理学报*, 2017, 66(22): 67—74.
- LI F, HUANG X Q, LU J Y, et al. The topological phase transition and the tunable interface states in granular crystal [J]. *Acta Physica Sinica*, 2017, 66(22): 67—74. (in Chinese)
- [77] LI S F, ZHAO D G, NIU H, et al. Observation of elastic topological states in soft materials [J]. *Nature Communications*, 2018, 9(1): 1370.
- [78] WANG H F, LIU D Y, FANG W B, et al. Tunable topological interface states in one-dimensional extended granular crystals [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 176: 105549.
- [79] CHEN Y J, WU B, LI J, et al. Low-frequency tunable topological interface states in soft phononic crystal cylinders [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2021, 191: 106098.
- [80] NIU H, LI S F, ZANG J F. Interface-dependent tunable elastic interface states in soft metamaterials [J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, 129(6): 065305.
- [81] NIU H, LI S F, ZANG J F. Reliable and tunable elastic interface states in soft metamaterials [J]. *Physica Status Solidi (RRL)—Rapid Research Letters*, 2020, 14(10): 2000338.
- [82] HU G B, LAN C B, TANG L H, et al. Local resonator stimulated polarization transition in metamaterials and the formation of topological interface states [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 165: 108388.
- [83] MILAN C, DANILO K, JOHAN C, et al. Tunable topological interface states in one-dimensional inerter-based locally resonant lattices with damping [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2023, 542: 117326.
- [84] LI P, HU W P, PENG P, et al. Elastic topological interface states induced by incident angle [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 225: 107359.
- [85] LI Y L, ZHANG H Q. Theoretical analysis on topological interface states of 1D compression-torsion

- coupling metamaterial [J]. *Composite Structures*, 2023, 305: 116556.
- [86] CHAUNSALE R, KIM E, THAKKAR A, et al. Demonstrating an in-situ topological band transition in cylindrical granular chains [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 119(2): 024301.
- [87] HUANG Y L, HUANG Y, CHEN W Q, et al. Flexible manipulation of topologically protected waves in one-dimensional soft periodic plates [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 170: 105348.
- [88] JIN Y B, WANG W, DJAFARI-ROUHANI B. Asymmetric topological state in an elastic beam based on symmetry principle [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 186: 105897.
- [89] LYU X F, LI H Z, MA Z S, et al. Numerical and experimental evidence of topological interface state in a periodic acoustic black hole [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 514: 116432.
- [90] GE Y, SHI B J, XIA J P, et al. Programmable dual-band acoustic topological insulator with dynamically movable interface states [J]. *Applied Physics Reviews*, 2023, 10(3): 031403.
- [91] FENG L Y, HUANG K, CHEN J J, et al. Magnetically tunable topological interface states for Lamb waves in one-dimensional magnetoelastic phononic crystal slabs [J]. *AIP Advances*, 2019, 9(11): 115201.
- [92] VILA J, PAULINO G H, RUZZENE M. Role of nonlinearities in topological protection: Testing magnetically coupled fidget spinners [J]. *Physical Review B*, 2019, 99(12): 125116.
- [93] ZHOU W J, WU B, CHEN Z Y, et al. Actively controllable topological phase transition in homogeneous piezoelectric rod system [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2020, 137: 103824.
- [94] LIU Y J, WANG H F, FANG W B, et al. Tunable control of subwavelength topological interface modes in locally resonance piezoelectric metamaterials [J]. *Composite Structures*, 2021, 276: 114541.
- [95] CHEN Y J, WU B, DESTRADE M, et al. Voltage-controlled topological interface states for bending waves in soft dielectric phononic crystal plates [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2022, 259: 112013.
- [96] CHEN Z Y, WANG G F, SHI F, et al. Analytical modeling and numerical analysis for tunable topological phase transition of flexural waves in active sandwiched phononic beam systems [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2022, 223: 107292.
- [97] ZHANG S Z, WAN Y K, BIAN X H, et al. Broad-band and controllable topological interface state of longitudinal wave in pillared phononic crystal beams [J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2023, 650: 414555.
- [98] 顾仲明, 郭佳敏, 祝捷. 非厄米拓扑声学中新奇物态的研究进展[J]. *科学通报*, 2023, 68(26): 3428—3436.
- GU Z M, GUO J M, ZHU J. Progress on the novel states in non-Hermitian topological acoustics [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2023, 68(26): 3428—3436. (in Chinese)
- [99] 耿琳琳, 袁锦波, 程文, 等. 非厄米力学系统基本原理与研究进展[J]. *力学进展*, 2024, 54(1): 1—60.
- GENG L L, YUAN J B, CHENG W, et al. Fundamental principles and research progress of non-Hermitian mechanical systems [J]. *Advances in Mechanics*, 2024, 54(1): 1—60. (in Chinese)
- [100] YAO S Y, WANG Z. Edge states and topological invariants of non-Hermitian systems [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(8): 086803.
- [101] KUNST F K, EDVARDSSON E, BUDICH J C, et al. Biorthogonal bulk-boundary correspondence in non-Hermitian systems [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(2): 026808.
- [102] 王子, 张丹妹, 任捷. 声子系统中弹性波与热运输的拓扑与非互易现象[J]. *物理学报*, 2019, 68(22): 8—20.
- WANG Z, ZHANG D M, REN J. Topological and non-reciprocal phenomena in elastic waves and heat transport of phononic systems [J]. *Acta Physica Sinica*, 2019, 68(22): 8—20. (in Chinese)
- [103] 冯陆洋, 陈久久, 黄宏波. 声学超材料的非互易性研究进展 [J]. *科学通报*, 2022, 67(12): 1214—1222.
- FENG L Y, CHEN J J, HUANG H B. Progress on nonreciprocity of acoustic metamaterials [J]. *Chinese Science Bulletin*, 2022, 67(12): 1214—1222. (in Chinese)