

黏弹性封装层合异质结构动力学行为分析^{*}

陈浩^{1,2} 毕皓皓³ 张博涵^{1,2} 王博^{1,2†}

(1. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

(2. 西北工业大学深圳研究院, 深圳 518063)

(3. 青岛理工大学 理学院, 青岛 266520)

摘要 在生物医学和仿生皮肤等领域, 基于黏弹性材料封装的薄膜/基底结构因其卓越的力学性能展现出广阔的应用前景。然而, 基于黏弹性材料封装的薄膜/基底结构制造的可延展电子器件在实际应用中经常面临高温、高频等复杂环境的挑战, 这些因素严重威胁到电子器件的性能和可靠性。故而, 本文旨在研究黏弹性材料封装的薄膜/基底结构在外加载荷下的非线性动态力学响应。首先, 建立黏弹性材料封装的三层薄膜基底结构的动力学模型; 其次, 根据扩展的拉格朗日方程建立三层结构的控制方程; 最后, 通过对比辛 Runge-Kutta 法和经典 Runge-Kutta 法, 验证了辛 Runge-Kutta 法在保能量方面的优势, 讨论了黏弹性材料参数对薄膜/基底结构动力学响应的影响规律。

关键词 薄膜/基底结构, 黏弹性封装, 动态力学响应

中图分类号: O322

文献标志码: A

Dynamic Behavior Analysis of Viscoelastic Encapsulated Film Substrate Structures^{*}

Chen Hao^{1,2} Bi Haohao³ Zhang Bohan^{1,2} Wang Bo^{1,2†}

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(2. Shenzhen Research Institute of Northwestern Polytechnical University, Shenzhen 518063, China)

(3. School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

Abstract In the fields of biomedicine and biomimetic skin, film/substrate structures encapsulated with viscoelastic materials have shown broad application prospects due to their excellent mechanical properties. However, stretchable electronic devices made from film/substrate structures encapsulated with viscoelastic materials often face challenges in complex environments such as high temperatures and high frequencies in practical applications, which seriously threaten the performance and reliability of electronic devices. Therefore, this paper aims to study the nonlinear dynamic mechanical response of film/substrate structures encapsulated with viscoelastic materials under external loads. First, a dynamic model of the three-layer film/substrate structure encapsulated with viscoelastic materials is established. Second, the governing equations for the three-layer structure are formulated based on the extended Lagrange equations. Finally, by comparing the symplectic Runge-Kutta method with the classical Runge-Kutta method, the energy preservation advantage of the symplectic Runge-Kutta method is verified, and the

2024-12-05 收到第 1 稿, 2025-02-06 收到修改稿。

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (12172282, 12402002), 山东省自然科学基金 (ZR2024QA062), 广东省基础与应用基础研究基金项目 (2024A1515010767), 青岛市自然科学基金 (24-4-4-zrjj-7-jch), 中央高校基本科研业务费专项资金, National Natural Science Foundation of China (12172282, 12402002), Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2024QA062), Guangdong Basic and Applied Basic Research Foundation (2024A1515010767), Natural Science Foundation of Qingdao, China (24-4-4-zrjj-7-jch), Fundamental Research Funds for the Central Universities.

[†] 通信作者 E-mail: bowang@nwpu.edu.cn

influence of viscoelastic material parameters on the dynamic response of the film/substrate structure is discussed.

Key words film/substrate structures, viscoelastic encapsulation, dynamic response

引言

在现代工程和材料科学的交叉领域,薄膜/基底结构因其独特的力学特性而受到广泛关注,特别是在医疗、国防、能源和信息技术等关键领域展现出巨大的应用潜力^[1]. 这些结构通常由多层不同材料构成,每一层都拥有其独特的物理和化学属性. 在微电子机械系统(MEMS)、纳米技术、柔性电子和生物医学设备等领域,这些结构扮演着不可或缺的角色. 特别地,封装层—刚性薄膜—弹性基底三层结构因其在力学性能和功能集成方面的优势而成为研究的热点^[2-7]. 此外,黏弹性材料在振动下的响应也有广泛的研究^[8-11]. 随着技术的进步,这些结构在实际应用中面临的挑战也日益增多,尤其是在动态环境下的性能表现,如在振动^[12-14]、冲击^[15,16]和热循环^[17]等条件下的稳定性和可靠性. 随着黏弹性材料封装的薄膜基底结构在各领域的应用日益广泛,其动力学行为引起了科研工作者和工程师的广泛关注.

为了准确控制这些系统中的褶皱波长和振幅,国内外研究者对褶皱的准静态不稳定性进行了大量的研究,取得了一系列重要成果. Yuan 等^[15]通过建立了封装层临界厚度的解析模型,针对封装层通过黏弹性效应耗散冲击能量进而承受冲击载荷进行了研究. 结果表明,结构的抗冲击性取决于封装层的厚度和黏弹性,以及冲击的持续时间. Mahmoodi 等^[18]通过开发显式解析模型,确定了通过屈曲形成的复杂 3D 微观结构的线性和非线性振动规律. Kolahchi 等^[19]通过研究黏弹性矩形板的非线性振动,发现小尺度和剪切变形效应会导致挠度增加,屈曲载荷和系统固有频率降低. Fan 等^[20]建立了一个分析模型来研究屈服薄膜在柔顺基材上的振动,系统地研究了系统固有频率和振动模式的解析预测. Wang 等^[21]进一步研究了基材的黏弹性对振动行为的影响,基于附着在弹性基底上的屈曲薄膜的线性自由振动开发了一个解析模型,结合有限元计算,得到了屈曲薄膜的固有频率及其相应

的振动模式. 结果表明,基体刚度和阻尼的增加对固有频率有负面影响. 此外, Qiao 等^[22]利用辛方法求解了一类矩形薄板的弯曲、屈曲和振动问题. Zhang 等^[23]扩展了极坐标辛方法对黏弹性材料在拉普拉斯域的分析.

尽管现有研究已经提供了一定的理论和技术基础,但是关于黏弹性材料封装的薄膜基底结构动力学行为的研究,仍有许多空白. 本文的主要工作是构建黏弹性材料封装的薄膜基底结构在加载作用下的动力学模型. 通过开发一个耦合的动态模型,并基于扩展的拉格朗日方程来建立其振动控制方程,本研究旨在详尽地描述黏弹性材料封装的薄膜/基底结构的非线性动力学响应. 该模型的建立,预期将为此类结构的设计和应用提供新的理论指导和技术支持,从而促进相关技术领域的进步与应用拓展.

1 黏弹性材料封装的薄膜/基底动力学模型

如图 1 所示,考虑刚性薄膜附着弹性基底上,封装层采用黏弹性材料. 假设接触面完美结合,层与层之间无相对滑动,认为位移和应力是连续的. 基底和封装的厚度相比于薄膜足够大,可以被视为

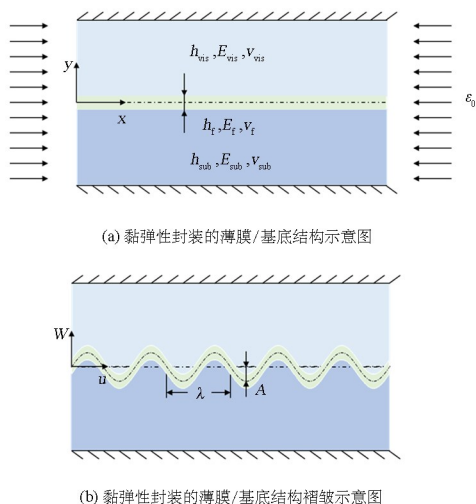


图 1 黏弹性封装的薄膜/基底结构力学分析模型

Fig. 1 Mechanical analysis model of film/substrate structure in viscoelastic packaging

无限空间.当加载 $-\varepsilon_0 = \chi \sin(2\pi f x) - \gamma$ 超过临界值,结构会屈曲产生如图1(b)所示的“正弦形”褶皱.

建立笛卡尔平面坐标系($O-xy$),原点 O 位于薄膜的中性层, x 轴从左到右, z 轴指向上层黏弹性层.对于黏弹性材料封装的三层薄膜基底结构,分别给出刚性薄膜的厚度、弹性模量、泊松比分别为 h_f 、 E_f 、 ν_f ,黏弹性封装层以及弹性基底的杨氏模量、泊松比分别为 E_{vis} 、 ν_{vis} 、 E_{sub} 、 ν_{sub} .

为了研究黏弹性材料封装的三层薄膜基底结构的非线性动力学特性,采用扩展的拉格朗日方程建立控制方程:

$$\frac{\partial L}{\partial A} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{A}} = Q_A \quad (1)$$

其中, $L=U-V$ 代表系统的拉格朗日函数, U 和 V 分别代表整个系统的势能和动能, Q_A 表示能量耗散的广义力.为了得到拉格朗日函数,下面将分别针对刚性薄膜,弹性基底和黏弹性的封装层进行分析.

1.1 薄膜能量

如图1(b)所示的褶皱模式,薄膜面外位移可以假设为

$$w_f(x, t) = A(t) \cos(kx) \quad (2)$$

其中, $A(t)$ 表示了周期性褶皱的幅值; $k=2\pi/\lambda$ 表示周期性褶皱的特征波数.

由于刚性薄膜周期性褶皱的波长远大于刚性薄膜的厚度,刚性薄膜被建模为梁,忽略其面内位移,中性轴处的轴向应变定义为

$$\varepsilon_f = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_f}{\partial x} \right)^2 \quad (3)$$

同时假定薄膜为线弹性材料,根据胡克定律,刚性薄膜沿轴向的力可以表示为

$$N_x = \bar{E}_f h_f \varepsilon_f \quad (4)$$

其中, $\bar{E}_f = E_f / (1 - \nu_f^2)$ 表示平面应变模量.

在平面应变条件下,给出薄膜的平衡方程

$$p(x, t) = \frac{\bar{E}_f h_f^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

刚性薄膜单位长度的总能量为弯曲应变能和薄膜应变能的和:

$$U_f = U_f^m + U_f^b \quad (6)$$

弯曲应变能和拉伸应变能分别表示为

$$U_f^m = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} N_x \varepsilon_f dx \quad (7)$$

$$U_f^b = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\bar{E}_f h_f^3}{24} \left(\frac{d^2 w_f}{dx^2} \right)^2 dx \quad (8)$$

对于刚性薄膜,可以在薄膜厚度足够小的情况下计算动能

$$V_f = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho_f h_f \left(\frac{dw_f}{dt} \right)^2 dx \quad (9)$$

1.2 弹性基底能量

由于弹性基底的水平位移远小于法向位移,因此忽略弹性基底的水平位移,假设弹性基底位移模式为

$$w_{sub}(x, t) = A_{sub}(z, t) \cos(kx) \quad (10)$$

其中, A_{sub} 表示了弹性基底周期性褶皱法向位移的幅值; $k=2\pi/\lambda$ 表示周期性褶皱的特征波数.

考虑平面应变问题,采用应力函数法求解弹性基底的应力场与位移场函数,假设其应力函数为

$$F_{sub}(x, z) = \frac{1}{k^2} [C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} + C_3 z e^{kz} + C_4 z e^{-kz}] \cos(kx) \quad (11)$$

考虑位移边界条件:

$$\begin{cases} w_{sub} = 0 & , z = -\infty \\ w_{sub} = w_f & , z = 0 \end{cases} \quad (12)$$

应力边界条件:

$$\begin{cases} \sigma_{zz}^{sub} = -p_f - \frac{\bar{E}_{sub}}{2(1+\nu_{sub})} k^2 \int_{-\infty}^0 w_{sub} dz & , z = -\infty \\ \sigma_{zz}^{sub} = -p_f & , z = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$p_f = Ah_f k^2 \bar{E}_f / 12 [12\varepsilon_0 + k^2 h_f^2 (1 + 3A^2/h_f^2)].$$

通过边界条件可以确定待定系数 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 .将 C_1 、 C_2 、 C_3 和 C_4 代入公式,可以得到弹性基底的位移场函数表达式

$$w_{sub} = [A(1 - kz) - \frac{z(1 - 2\nu_{sub})}{\bar{E}_{sub}(1 - \nu_{sub})} (1 + \nu_{sub}) p_f] e^{kz} \cos(kx) \quad (14)$$

弹性基底的应变能可以表示为

$$U_{sub} = \frac{7 + 2\nu_{sub}}{32(1 + \nu_{sub})} \cdot \left[\bar{E}_{sub} A^2 k + \frac{(1 - \nu_{sub} - 2\nu_{sub}^2)^2 p_f^2}{\bar{E}_{sub} k (1 - \nu_{sub})^2} \right] + \frac{(1 - \nu_{sub} - 2\nu_{sub}^2) A p_f}{8(1 - \nu_{sub}^2)} \quad (15)$$

弹性基底的动能可以表示为

$$V_{\text{sub}} = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_{-h_{\text{sub}}}^0 \frac{1}{2} \rho_{\text{sub}} \left(\frac{d\mathbf{w}_{\text{sub}}}{dt} \right)^2 dx dz \quad (16)$$

1.3 黏弹性封装层能量

同样地,忽略黏弹性封装层的水平位移,假设黏弹性封装层的位移模式为

$$\mathbf{w}_{\text{vis}}(x, t) = A_{\text{vis}}(z, t) \cos(kx) \quad (17)$$

由于结构的对称性,经过类似 1.2 节的求解,可以得到黏弹性封装层的位移函数

$$\mathbf{w}_{\text{sub}} = [A(1 + kz) + \frac{z(1 - 2\nu_{\text{sub}})}{\bar{E}_{\text{sub}}(1 - \nu_{\text{sub}})}(1 + \nu_{\text{sub}})p_f]e^{-kz} \cos(kx) \quad (18)$$

封装层的应变能可以表示为

$$U_{\text{vis}} = \frac{7 + 2\nu_{\text{vis}}}{32(1 + \nu_{\text{vis}})} \cdot \left[\bar{E}_{\text{vis}} A^2 k + \frac{(1 - \nu_{\text{vis}} - 2\nu_{\text{vis}}^2)^2 p_f^2}{\bar{E}_{\text{vis}} k (1 - \nu_{\text{vis}})^2} \right] + \frac{(1 - \nu_{\text{vis}} - 2\nu_{\text{vis}}^2) A p_f}{8(1 - \nu_{\text{vis}}^2)} \quad (19)$$

封装层的动能可以表示为

$$V_{\text{vis}} = \frac{k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_0^{h_{\text{vis}}} \frac{1}{2} \rho_{\text{vis}} \left(\frac{d\mathbf{w}_{\text{vis}}}{dt} \right)^2 dx dz \quad (20)$$

根据 Hu 等^[24]对黏弹性层上的刚性薄膜的动力学起皱行为的研究,微单元在无限小过程中由阻尼引起的能量耗散可由阻尼力与相对位移的乘积得到,由正应变率和应变率引起的能量耗散可以表示为

$$\delta W_n = \frac{k}{2\pi} \dot{A} \delta A \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_{-h_{\text{vis}}}^0 \eta_n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial A \partial z} \right)^2 dx dz \quad (21)$$

$$\delta W_t = \frac{k}{2\pi} \dot{A} \delta A \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_{-h_{\text{vis}}}^0 \eta_t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial A \partial z} \right)^2 dx dz \quad (22)$$

其中, η_t 和 η_n 分别表示切向和法向的阻尼系数。

描述能量耗散的广义力可以表示为

$$Q_A = \frac{k}{2\pi} \dot{A} \int_0^{\frac{2\pi}{k}} \int_{-h_{\text{vis}}}^0 \left[\eta_t \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial A \partial z} \right)^2 + \eta_n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial A \partial z} \right)^2 \right] dx dz. \quad (23)$$

1.4 控制方程

整个系统的势能和动能可以由薄膜、弹性基底和黏弹性封装层的势能表示为

$$U^{\text{total}} = U_f + U_{\text{vis}} + U_{\text{sub}} \quad (24)$$

$$V^{\text{total}} = V_f + V_{\text{vis}} + V_{\text{sub}} \quad (25)$$

代入式(1)中可以得到控制方程

$$(a_1 + a_2 A^2 + a_3 A^4) \ddot{A} + (b_1 + b_2 A^2 + b_3 A^4) \dot{A} + (c_1 A + c_2 A^3) \dot{A}^2 + d_1 A + d_2 A^3 + d_3 A^5 = 0 \quad (26)$$

其中,令 $E_{\text{vis}} = E_{\text{sub}}$ 、 $\nu_{\text{vis}} = \nu_{\text{sub}}$ 有

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{1152k\zeta_4 \bar{E}_{\text{sub}}^2} [48\zeta_6(2\nu_{\text{sub}} - 1)(3 + 2\nu_{\text{sub}})\rho_{\text{sub}} \bar{E}_f \bar{E}_{\text{sub}} k h_f (12\epsilon_0 + k^2 h_f^2) + \zeta_1 \rho_{\text{sub}} \bar{E}_f^2 k^4 h_f^4 (24\epsilon_0 + k^2 h_f^2) + 144\zeta_1 \rho_{\text{sub}} \epsilon_0^2 \bar{E}_f^2 k^2 h_f^2 + 576\zeta_4 \rho_f \bar{E}_{\text{sub}}^2 k h_f + 720\zeta_4 \rho_{\text{sub}} \bar{E}_{\text{sub}}^2] , \\ a_2 &= -\frac{\zeta_6 \rho_{\text{sub}} \bar{E}_f k^2 h_f}{64(\nu_{\text{sub}} - 1)^2 \bar{E}_{\text{sub}}^2} [24\bar{E}_{\text{sub}}(\nu_{\text{sub}} - 1) - (k^2 h_f^2 + 12\epsilon_0)\zeta_1 \bar{E}_f k h_f] , \\ a_3 &= \frac{9\zeta_2 \rho_{\text{sub}} \bar{E}_f^2 h_f^2 k^5}{128\zeta_4 \bar{E}_{\text{sub}}^2} , \\ b_1 &= \frac{k}{1152\bar{E}_{\text{sub}}^2 \zeta_4} [\zeta_2(\eta_t + \eta_n) \bar{E}_f^2 k^4 h_f^4 (24\epsilon_0 + k^2 h_f^2) + 48\zeta_3(1 - \nu_{\text{sub}})(3 + 2\nu_{\text{sub}}) \eta_n \bar{E}_f \bar{E}_{\text{sub}} k^3 h_f^3 + 144\zeta_3(\eta_t + \eta_n)(3 + 2\nu_{\text{sub}}) \epsilon_0^2 \bar{E}_f^2 k^2 h_f^2 + 576(2\nu_{\text{sub}} - 1)(\nu_{\text{sub}}^2 - 1) \times (3 + 2\nu_s) \epsilon_0 \eta_n \bar{E}_{\text{sub}} \bar{E}_f k h_f + 144\zeta_4 \bar{E}_{\text{sub}}^2 (\eta_t + 5\eta_n)] , \\ b_2 &= \frac{k\zeta_2}{1152\bar{E}_{\text{sub}}^2 \zeta_4} [18\bar{E}_f^2 k^6 h_f^4 (\eta_n + \eta_t) + 216\epsilon_0 \bar{E}_f^2 k^4 h_f^2 (\eta_n + \eta_t) + \frac{432}{\zeta_3} \bar{E}_f \bar{E}_{\text{sub}} \eta_n k^3 h_f (1 - \nu_{\text{sub}})] , \\ b_3 &= \frac{81\bar{E}_f^2 h_f^2 k^7 \zeta_2}{1152\bar{E}_{\text{sub}}^2 \zeta_4} (\eta_n + \eta_t) , \\ c_1 &= -\frac{\rho_{\text{sub}} \bar{E}_f k^2 h_f \zeta_3}{64\bar{E}_{\text{sub}}^2 (\nu_{\text{sub}} - 1)^2} \{ 2\bar{E}_f k h_f (k^2 h_f^2 + 12\epsilon_0) \nu_{\text{sub}}^2 + [(h_f^3 k^3 + 3\epsilon_0 k h_f) \bar{E}_f + 6\bar{E}_{\text{sub}}] (\nu_{\text{sub}} - 1) \} , \\ c_2 &= \frac{9\rho_{\text{sub}} \bar{E}_f^2 k^5 h_f^2}{64} \frac{\zeta_2}{\bar{E}_{\text{sub}}^2 \zeta_4} , \end{aligned}$$

$$d_1 = \frac{k}{2304\bar{E}_{\text{sub}}\zeta_5} [\zeta_2(24\epsilon_0 k^2 h_f^2 + 144\epsilon_0^2 + k^4 h_f^4)\bar{E}_f^2 k^2 h_f^2 + 48(\nu_{\text{sub}}^2 - 1)(4\nu_{\text{sub}} - 3) \times (12\epsilon_0 + k^2 h_f^2)\bar{E}_{\text{sub}}\bar{E}_f k h_f + 144(\nu_{\text{sub}} - 1)^2(2\nu_{\text{sub}} + 7)\bar{E}_{\text{sub}}^2],$$
$$d_2 = \frac{k}{192\bar{E}_{\text{sub}}\zeta_5} [\zeta_2(12\epsilon_0 + k^2 h_f^2)\bar{E}_f^2 k^4 h_f^2 + 24(\nu_{\text{sub}}^2 - 1)(3\nu_{\text{sub}} - 2)\bar{E}_{\text{sub}}\bar{E}_f k^3 h_f],$$
$$d_3 = \frac{3\bar{E}_f^2 k^7 h_f^2 \zeta_2}{256\bar{E}_{\text{sub}}\zeta_5},$$
$$\zeta_2 = (1 + \nu_{\text{sub}})^2(3 + 2\nu_{\text{sub}})(2\nu_{\text{sub}} - 1)^2,$$
$$\zeta_3 = (1 + \nu_{\text{sub}})(1 - 2\nu_{\text{sub}}),$$
$$\zeta_4 = (1 - \nu_{\text{sub}})^2(3 + 2\nu_{\text{sub}}),$$
$$\zeta_5 = (\nu_{\text{sub}} - 1)^2(1 + \nu_{\text{sub}}), \zeta_6 = \nu_{\text{sub}}^2 - 1.$$

2 数值方法

辛数值方法在求解保守系统问题时,展现出优异的保辛特性.

在进行数值求解前,需要先进行降阶处理,引入新的变量

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2]^T, y_1 = A, y_2 = \dot{A} \tag{27}$$

然后,利用方程(27),方程(26)可以改写为如下二阶微分方程组:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{Y}) \tag{28}$$

其中 $\mathbf{f}(t, \mathbf{Y})$ 为 $[y_2, -\alpha_1 y_1/\alpha_2 h_f^2 - y_1^3]^T$.

采用辛 Runge-Kutta 方法,其迭代格式为^[24]:

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \sum_{i=1}^2 b_i \mathbf{K}_i,$$
$$\mathbf{K}_i = \mathbf{f}(t_n + d_i \Delta t, \mathbf{Y}_n + \sum_{j=1}^2 a_{ij} \mathbf{K}_j) \tag{29}$$

其中

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$
$$[b_1 \quad b_2] = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right],$$
$$[d_1 \quad d_2] = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right].$$

图 2 对比了无阻尼结构采用辛 Runge-Kutta 法和经典 Runge-Kutta 法计算的 Hamilton 能量相对的误差. 不难发现辛 Runge-Kutta 法在保能量方

面的优势.

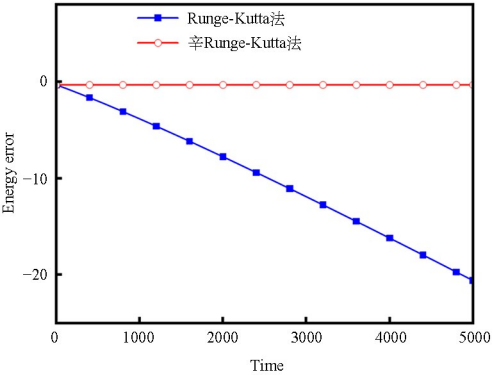


图 2 能量误差图
Fig. 2 Energy error diagram

3 黏弹性封装的薄基结构动力学行为分析

由于能量耗散的存在,采用四阶龙格-库塔法对参数振动控制方程(26)进行数值求解. 为了得到数值解,计算所需的结构材料参数见表 1.

表 1 材料参数
Table 1 Material parameters

结构	杨氏模量/MPa	泊松比	密度/(kg/m ³)
黏弹性层	1.8	0.49	970
刚性薄膜	2500	0.30	1420
弹性基底	1.8	0.49	970

考虑一个封装的三层结构,假设薄膜与黏弹性层和弹性基底之间的界面完全黏结. 结构采用 Neo-Hookean 材料,并在商业软件 Abaqus 中使用 2D 有限元模型.

在结构的左右两侧设置对称边界条件,弹性基底的底部和黏弹性封装层顶部在垂直方向上固定,转角也被限制. 整个结构使用 CPE4H 单元. 对于整个结构都使用结构化网格,在薄膜的厚度方向上设置四个单元以确保计算精度,沿薄膜长度方向的单元大小与厚度方向相匹配. 为了模拟褶皱的发生,在有限元模型中引入线性特征值分析的第一阶模式作为初始缺陷.

3.1 理论模型有效性验证

为了验证模型的有效性,图 3 绘制了褶皱振幅随加载的变化情况,理论解和有限元拟合很好,并且当加载小于 ϵ_c 时,黏弹性封装的三层薄膜基底结构不会发生失稳,刚性薄膜保持平坦. 当加载大于 ϵ_c 时,黏弹性封装的三层薄膜基底结构失稳,薄膜发生褶皱. 并且从图 3 中,可以很容易地注意到,

当加载大于 ϵ_c 时,随着加载的增大,薄膜基底结构的褶皱振幅也会逐渐增大。

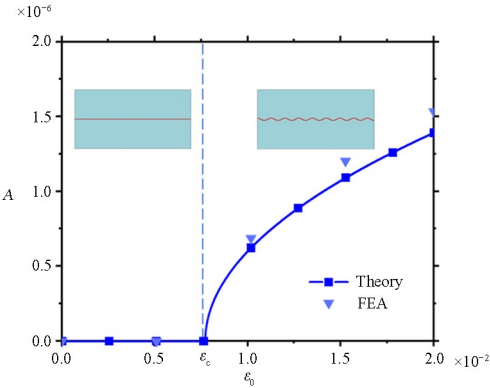


图 3 不同水平的加载作用下结构的势能和静态褶皱振幅的关系
Fig. 3 The relationship between potential energy of structure and static fold amplitude under different loading levels

研究薄膜基底结构的势能是了解其动态性能的有效途径之一。为了研究在加载作用下黏弹性封装的三层薄膜基底结构的非线性动力学行为,根据式(24)绘制了不同水平的加载下整个结构的势能随褶皱振幅的变化情况,如图 4 所示。

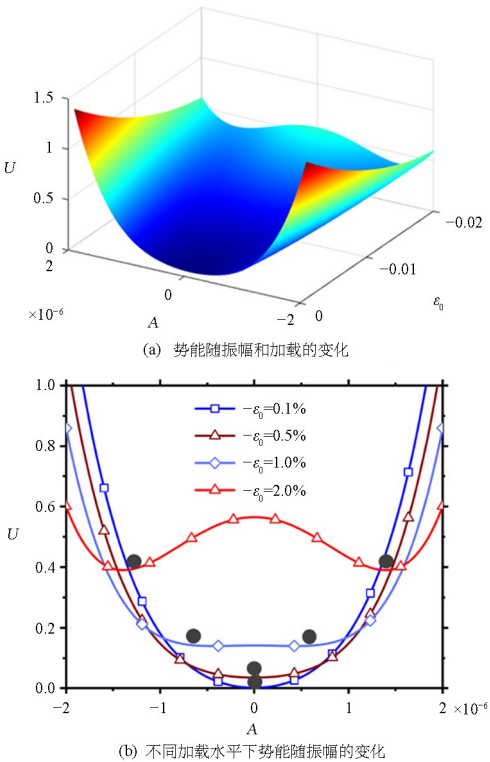


图 4 势能和振幅与加载的关系
Fig. 4 The relationship between potential energy, amplitude and loading

在图 4(a)绘制了势能随振幅和加载变化的三维曲面,可以发现随着加载的增大,势能从一开始具有一个极小值点变成两个极小值点。在图 4(b)中, γ 分别取 0.1%、0.5%、1%和 2%,从图 4(b)中

不难看出, γ 分别为 0.1%和 0.5%时对应的势能只有一个在零点附近稳定的平衡点(圆形实体表示),此时加载的水平不足以使得黏弹性封装的三层薄膜基底结构屈曲,薄膜保持平坦。随着 γ 进一步增大到 1.0%时,可以清楚地发现势能出现了两个稳定的平衡点,两个稳定点的位置都远离初始位移,这意味着随着加载的增加,黏弹性封装的三层薄膜基底结构开始发生褶皱。随着 γ 进一步增大到 2.0%时,势能两个稳定点的位置进一步远离初始位移,这意味着薄膜基底结构的褶皱振幅会随着载荷的增加而增加。更有意思的是,静态褶皱振幅也可以从势能曲线中得到。

3.2 阶跃荷载下动力学行为分析

图 5 绘制了无阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在不同加载作用下的动态响应。当 γ 分别取 0.1%(红色虚线)和 0.5%(蓝色实线)时,薄膜保持平坦,从图 5(a)和图 5(b)可以很容易地看出,无阻尼情况下该结构的动态行为是周期性的,结构围绕零点进行振动。可以发现加载越大,振动行为的幅值越大,由于系统中没有阻尼,能量不会耗散,因此,振动幅值围绕零点连续振荡。

图 6 显示了带阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在不同加载作用下的动态行为。 γ 分别取 0.1%(红色虚线)和 0.5%(蓝色实线),从图 6(a)

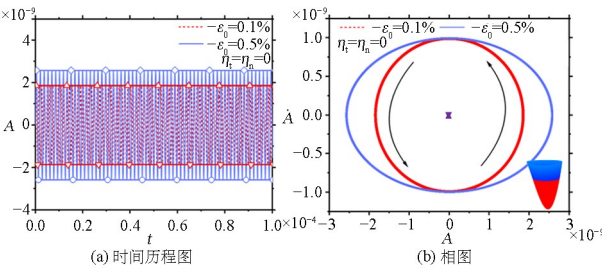


图 5 无阻尼结构在不同水平的阶跃加载下的动态响应
Fig. 5 Dynamic response of undamped structures under step loading at different levels

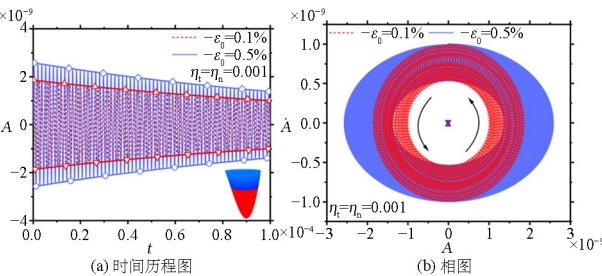


图 6 带阻尼结构在不同水平的阶跃加载下的动态响应
Fig. 6 Dynamic response of damped structures under step loading at different levels

和图 6(b)看出,阻尼存在的情况下该结构的动态行为是非周期性的,结构围绕零点进行振动.同样的,加载越大,振动行为的幅值越大.随着时间的推移,振动幅值会逐渐衰减至零点.

图 7 显示了带阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在不同加载作用下的动态行为.取 γ 分别为 1.0%(红色虚线)和 2.0%(蓝色实线),此时薄膜产生褶皱,存在静态褶皱振幅,从图 7(a)可以看出,不同加载下黏弹性封装的三层薄膜基底结构围绕各自的静态平衡振幅进行非周期性的振动行为.

随着时间的推移,可以预测,长时间后结构将处于静止状态,振动的上下边界(空心菱形和圆形,空心上三角形和空心下三角形)将趋向静态屈曲幅值.

图 8 显示了带阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在不同阻尼作用下的动态行为.从图 8(a)和图 8(b)可以看出,不同阻尼对应的动态行为都是非周期性的,随着时间的推移,振动幅值会逐渐减小至静态褶皱振幅.如图 8(b),由于加载相同,两种动态行为对应的静态褶皱振幅是相同的.可以预测,长时间后结构将处于静止状态,并且较大的阻尼系数会导致振动更快地衰减.

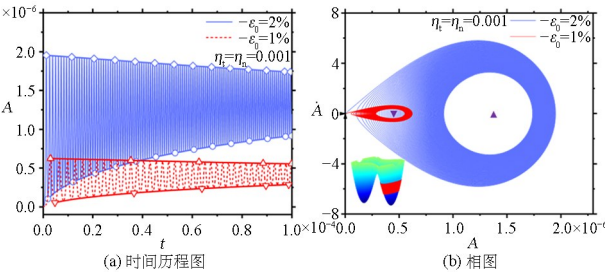


图 7 带阻尼结构在不同水平的阶跃加载下的动态响应
Fig. 7 Dynamic response of damped structures under step loading at different levels

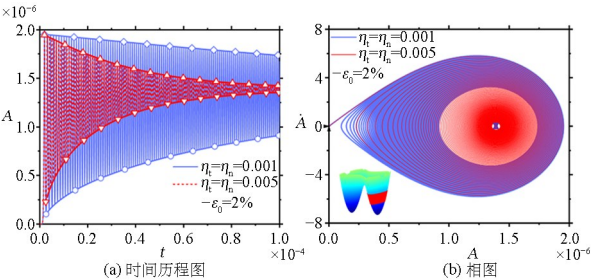


图 8 切向和法向不同阻尼在阶跃加载下结构动力学响应
Fig. 8 Structural dynamic response under step loading with different tangential and normal damping

3.3 时变荷载下动力学行为分析

由于可延展电子器件服役的特殊性,考虑 $f = 10$ MHz. 图 9 绘制了无阻尼黏弹性封装的三层薄

膜基底结构在时变加载作用下的动态行为,其中, γ 取 0.03, χ 取 0.005. 从图 9 中可以看出,此时薄膜已经褶皱,并且围绕静态幅值作周期性振动.

图 10 同样绘制了无阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在时变加载作用下的跃出能量势垒的动态响应,其中, γ 取 0.03, χ 取 0.015 可以看出,当加载振动幅值较大时,输入的能量足以使结构脱离局部极小值点的能量势垒,结构会在两个稳定状态发生跳转.

图 11 绘制了 γ 取 0.03, χ 分别取 0.015 和 0.005 作用下结构的动态行为. 可以看出,此时薄膜已经褶皱,并且结构在时变加载的作用下围绕静态幅值做周期性振动,并且会一直持续振荡. 此外,结构振动的幅值随着加载幅值的增大而增大.

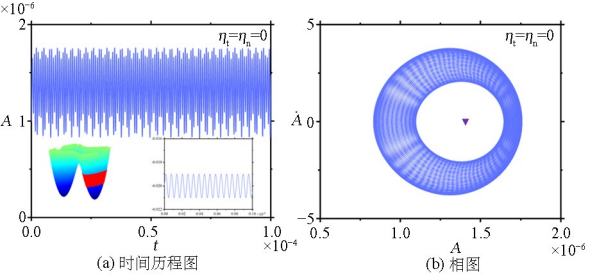


图 9 无阻尼结构在时变加载下的动态响应
Fig. 9 Dynamic response of undamped structures under time-varying loading

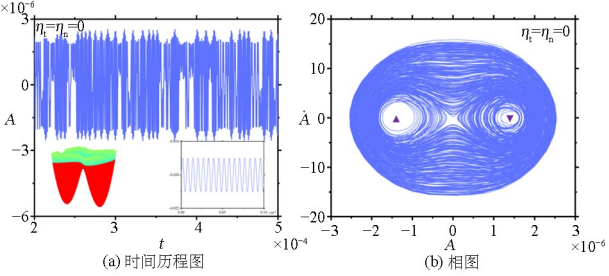


图 10 无阻尼结构在时变加载下的动态响应
Fig. 10 Dynamic response of undamped structures under time-varying loading

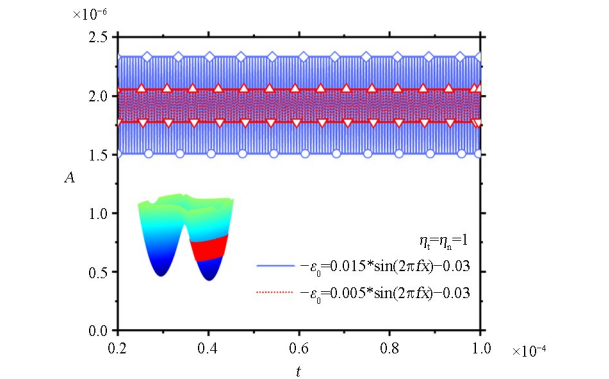


图 11 带阻尼结构在不同水平的时变加载下的动态响应
Fig. 11 Dynamic response of damped structures under time-varying loading at different levels

图 12 绘制了不同阻尼黏弹性封装的三层薄膜基底结构在取 γ 取 0.03, χ 取 0.015 时的动态行为。可以看出,结构振动的幅值随着阻尼的增大而减小。

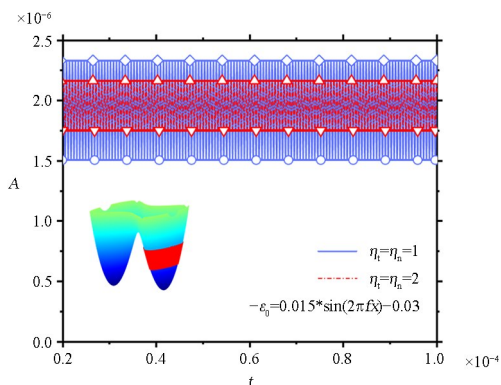


图 12 不同阻尼的结构在时变加载下的动态响应

Fig. 12 Dynamic response of structures with different damping under time-varying loading

3.4 封装薄膜基底结构瞬态响应分析

此外,还可以得到黏弹性封装的三层薄膜基底结构的瞬态响应,研究封装层的黏弹性效应对加载作用下结构瞬态响应的影响。取不同的阻尼系数绘制图 13,可以清楚地发现,结构的瞬态响应随着时间发生变化,褶皱振幅的瞬态响应从零点变化到静态褶皱振幅,整个周期内的振幅增长呈 s 型,在起始阶段振幅呈指数增长,之后振幅增长速度逐渐衰减到 0,褶皱振幅最终逐渐稳定到静态褶皱振幅。此外,阻尼系数为 5 对应的振幅在 0.5×10^{-4} 就已经到达了稳定状态,而阻尼系数为 8 对应的振幅在 0.8×10^{-4} 才稳定,这表明阻尼系数越大,褶皱振幅到达稳定所需要的时间越长。

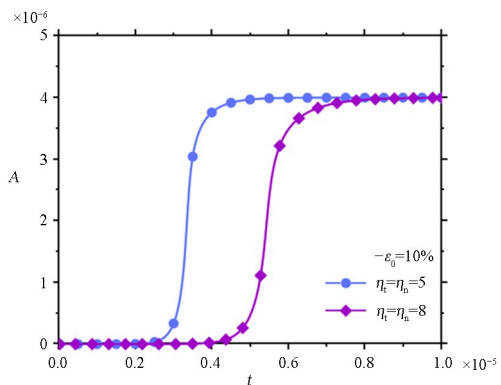


图 13 黏弹性封装的薄膜/基底结构不同阻尼系数下的瞬态响应

Fig. 13 Transient responses of viscoelastic encapsulated film/substrate structures with different damping coefficients

4 结论

针对基于黏弹性材料封装的薄膜/基底结构可延展电子器件,本文建立黏弹性封装的薄膜/基底

结构的动力学模型,根据扩展的拉格朗日方程建立三层结构的控制方程,通过数值和有限元计算的结果,讨论黏弹性材料参数对薄膜/基底结构动力学响应的规律。得到的结论如下:

(1)数值仿真验证了辛算法具有保结构、保能量的特点;

(2)黏弹性封装的薄膜/基底结构振动幅值会随加载的增大和阻尼的减小而增大,在阶跃加载作用下振动幅值会围绕静态振幅运动并衰减;

(3)黏弹性材料在作用阶跃荷载之后,振幅随时间会发生类似 s 型函数的增长,并且黏弹性材料的切向和法向阻尼系数对结构的瞬态响应影响不同;

(4)在时变荷载作用下,当加载使得结构能量越过势垒时,结构会在两个平衡状态之间发生振动。

本文所得结论将会为基于黏弹性封装的薄膜/基底结构的可延展电子器件设计提供理论支撑。

参考文献

- [1] 李学通,全洪月,赵越,等. 柔性电子器件的应用、结构、力学及展望[J]. 力学与实践, 2015, 37(3): 295—301, 325.
- [2] LI X T, TONG H Y, ZHAO Y, et al. Structures, mechanical properties and applications of flexible electronic components [J]. Mechanics in Engineering, 2015, 37(3): 295—301, 325. (in Chinese)
- [3] GUO Y Q, NIE G H. Theoretical and numerical analysis of period-doubling bifurcation in sandwich systems [J]. International Journal of Solids and Structures, 2024, 294: 112744.
- [4] GAO C, LI Y N. Tuning the wrinkling patterns of an interfacial/coating layer via a regulation interphase [J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, 104: 92—102.
- [5] YUAN X B, ZHAO P Z, FAN Q Q, et al. Theoretical and numerical analysis on buckling instability in a thin film sandwiched between two finite-thickness substrates under in-plane compression [J]. International Journal of Solids and Structures, 2024, 304: 113037.
- [6] COLIN J, HOLLAND M A. Layer wrinkling in an inhomogeneous matrix [J]. International Journal of Solids and Structures, 2019, 156: 119—125.
- [7] XIE W H, HUANG X, CAO Y P, et al. Buckling and postbuckling of stiff lamellae in a compliant matrix [J]. Composites Science and Technology, 2014, 99: 89—95.
- [8] 鲁康,王博,毕皓皓,等. 基于几何积分方法的压

- 电岛—桥结构动力行为分析[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(3): 15—24.
- LU K, WANG B, BI H H, et al. Dynamic analysis of piezoelectric island-bridge structure based on geometric integral method [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(3): 15—24. (in Chinese)
- [8] 金涛, 金肖玲, 黄志龙. 多自由度粘弹性非线性随机系统的瞬态响应[J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(3): 214—222.
- JIN T, JIN X L, HUANG Z L. Transient response of nonlinear multi-degree-of-freedom stochastic system with viscoelasticity [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(3): 214—222. (in Chinese)
- [9] 盛冬发, 罗敏锋, 池德汝, 等. 非线性损伤粘弹性薄板准静态力学行为分析[J]. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 173—176.
- SHENG D F, LUO M F, CHI D R, et al. Quasi-static behaviors of nonlinear viscoelastic thin plates with damage [J]. Journal of Dynamics and Control, 2008, 6(2): 173—176. (in Chinese)
- [10] 罗佳伟, 徐旭. 一个粘弹性振子的动力学与控制[J]. 动力学与控制学报, 2014, 12(3): 210—214.
- LUO J W, XU X. Dynamics and control of an oscillator with viscoelastic item [J]. Journal of Dynamics and Control, 2014, 12(3): 210—214. (in Chinese)
- [11] 张云飞, 杨鄂川, 李映辉. 变截面粘弹性旋转梁非线性参数振动研究[J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(5): 418—423.
- ZHANG Y F, YANG E C, LI Y H. Studies on nonlinear parametric vibration of a rotating viscoelastic beam with variable cross-sections [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(5): 418—423. (in Chinese)
- [12] BI H H, TIAN J Y, ZHANG B H, et al. Utilisation of a wrinkled film-based structure for the sensing measurement of a vibro-impact capsule robot [J]. Meccanica, 2023, 58(11): 2151—2164.
- [13] 朱成秀, 随岁寒, 彭丹华, 等. 轴向运动三阶剪切变形板自由振动的有限元模型及应用[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(5): 49—58.
- ZHU C X, SUI S H, PENG D H, et al. Finite element modeling and application on free vibration of axially moving third-order shear deformation plates [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(5): 49—58. (in Chinese)
- [14] 韩清凯, 王浩博, 吕昊, 等. 大型挤压油膜阻尼器非线性动力学分析与优化研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(5): 1—19.
- HAN Q K, WANG H B, LV H, et al. Progress review on nonlinear dynamic analyses and optimization for large-scale squeeze film dampers [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(5): 1—19. (in Chinese)
- [15] YUAN J H, PHARR M, FENG X, et al. Design of stretchable electronics against impact [J]. Journal of Applied Mechanics, 2016, 83(10): 101009.
- [16] 蔡正政, 孙加亮, 金栋平. 高超声速折叠翼展开动力学研究[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(6): 85—93.
- CAI Z Z, SUN J L, JIN D P. Deployment dynamics of a hypersonic folding wing [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(6): 85—93. (in Chinese)
- [17] LI K, CHEN L, ZHU F, et al. Thermal and mechanical analyses of compliant thermoelectric coils for flexible and bio-integrated devices [J]. Journal of Applied Mechanics, 2021, 88(2): 021011.
- [18] MAHMOODI S N, JALILI N, KHADEM S E. An experimental investigation of nonlinear vibration and frequency response analysis of cantilever viscoelastic beams [J]. Journal of Sound Vibration, 2008, 311(3): 1409—1419.
- [19] KOLAHCHI R. A comparative study on the bending, vibration and buckling of viscoelastic sandwich nano-plates based on different nonlocal theories using DC, HDQ and DQ methods [J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 66: 235—248.
- [20] FAN X Q, WANG Y, LI Y H, et al. Vibration analysis of post-buckled thin film on compliant substrates [J]. Sensors, 2020, 20(18): 5425.
- [21] WANG Y, CUI X B, FU H R, et al. Dynamic behaviors of postbuckled thin film on flexible substrates considering viscoelastic effects [J]. Journal of Applied Mechanics, 2021, 88(4): 041007.
- [22] QIAO Y F, HOU G L, CHEN A. A complete symplectic approach for a class of partial differential equations arising from the elasticity [J]. Applied Mathematical Modelling, 2021, 89: 1124—1139.
- [23] ZHANG W X, BAI Y. The symplectic method in polar coordinates for linear viscoelastic materials [J]. The Open Materials Science Journal, 2015, 9(1): 130—134.
- [24] ZHOU J F, HU K M, LIN H Y, et al. Dynamic wrinkling instability of elastic films on viscoelastic substrates [J]. Journal of Applied Mechanics, 2024, 91(8): 081011.