

一类时变非线性系统的精确解^{*}

刘畅^{1†} 王国夫¹ 宋禹含¹ 姜文安²

(1. 辽宁大学 物理学院, 沈阳 110036)

(2. 江苏大学 土木工程与力学学院, 镇江 212013)

摘要 本文提出了一种新的时空非线性变换,并将其应用于一类时变非线性系统的求解问题.通过坐标变换推导了系统的可积条件,得到可解的常系数线性微分方程.基于逆变换和常系数线性微分方程的解析解,导出了原系统的精确解.把 1/2 阶贝塞尔方程作为该类时变非线性系统的特殊情况,并利用该理论得到其精确解.最后,通过一些数值仿真验证了该方法的有效性和正确性.

关键词 时变系统, 变换理论, 精确解, 可积性条件

中图分类号:O316

文献标志码:A

Exact Solution for a Class of Time-Varying Nonlinear Systems^{*}

Liu Chang^{1†} Wang Guofu¹ Song Yuhan¹ Jiang Wenan²

(1. College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

(2. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjinag 212013, China)

Abstract In this paper, a new space-time nonlinear transformation is proposed and applied to a class of time-varying nonlinear systems. Then the integrability condition of the system is derived by coordinate transformation, and the linear differential equation with constant coefficients is obtained. Based on the inverse nonlinear transformation and the analytic solution of linear differential equations with constant coefficients, the exact solution of the original system is derived. The 1/2 order Bessel equation is taken as a special case of this kind of time-varying nonlinear system, and its exact solution is obtained by using this theory. Finally, the effectiveness and correctness of the proposed method are verified by some numerical simulations.

Key words time-varying systems, transformation theory, exact solutions, integrability conditions

引言

大多数工程系统都是非线性的,它们的精确解一般很难找到.然而,为了准确预测系统的动力学行为,有必要探索非线性系统的精确解^[1-5].因此,研究

者们通常使用许多近似解析方法来求解非线性系统的近似解析解,常用的有摄动法^[6-8]、谐波平衡法^[9,10]、平均法^[11-13]和同伦分析法^[14].此外,求解非线性系统精确解的方法主要有两种,即李对称变换^[15-18],Prelle-Singer 方法^[19-21].最近,Almendral 和

2024-11-28 收到第 1 稿,2025-01-21 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12472001),江苏大学高级人才启动基金(21JDG057),National Natural Science Foundation of China (12472001), Senior Talent Start-up Fund of Jiangsu University (21JDG057).

[†] 通信作者 E-mail:changliu@lnu.edu.cn

Sanjuan^[22]采用 Lie 对称法,指出在一定的参数关系下,亥姆霍兹振子是可积的. Chandrasekar 等^[23]证明了不受外力的 Duffing-van der Pol 振子对于一组适当的参数是可积的. Duartea 和 da Mota^[24]提出了一种半算法来探索有理微分方程的初等第一积分. 从上述内容可以看出,已经有一些方法可以求解常系数非线性系统的精确解. 然而,关于时变非线性系统的精确解却很少有报道.

时变非线性系统的发展已被广泛报道,但目前还没有找到求解精确解的固定方法. 因此,引入了许多近似方法,如有 Walsh 函数方法^[25]、Walsh 级数(STWS)方法^[26-28]、Haar 小波分析法^[29]和数值方法^[30]. 因此,迫切需要找到求解时变系统精确解的有效方法.

本文证明,可以通过时空非线性变换得到时变非线性系统的精确解. 提出了一种新的时空非线性变换,用以约化时变非线性系统,并推导出系统的可积条件,从而得到原系统的精确解,并把 1/2 阶贝塞尔方程作为该类时变非线性系统的特例,求出了其精确解. 最后,通过一些数值仿真验证了精确解的正确性.

1 数学模型

考虑一个时变的非线性动力学系统,其相应的数学模型可以描述为

$$t^2 \ddot{x} + g(n, t, x, \dot{x}) + f(n, t, x, \dot{x}) = 0 \quad (1)$$

其中, x 表示位移, t 使用时间, n 描述一个实数, $g(n, t, x, \dot{x})$ 、 $f(n, t, x, \dot{x})$ 表示非线性时变项.

2 时空非线性变换

非线性系统的解通常不明显,传统的线性变换不能满足解的要求. Nayfeh^[31]指出,可以引入非线性变换来简化非线性问题. 因此,利用非线性空间坐标变换或时空非线性变换来求解非线性系统是一种可行的方法. 为了解决时变非线性系统(1),我们引入了一个时空变换

$$x(t) = t^{-n} y(t) \quad (2)$$

可以得到等式(2)的一阶导数为

$$\dot{x} = -nt^{-n-1}y + t^{-n}\dot{y} \quad (3)$$

二阶导数为

$$\ddot{x} = n(n+1)t^{-n-2}y - 2nt^{-n-1}\dot{y} + t^{-n}\ddot{y} \quad (4)$$

把式(2)~(4)代入等式(1),可以得到

$$t^{-n+2}\ddot{y} + (g - 2nt)t^{-n}\dot{y} + [n(n+1)t^{-2} - ngt^{-3} + ft^{-2}t^{-n+2}]y = 0 \quad (5)$$

进而可得系统的可积条件

$$g - 2nt = pt^2, n(n+1)t^{-2} - ngt^{-3} + ft^{-2} = q \quad (6)$$

其中 p, q 为任意的常数. 因此

$$g(n, t, x, \dot{x}) = pt^2 + 2nt, \\ f(n, t, x, \dot{x}) = qt^2 - n + n^2 \quad (7)$$

然后等式(1)变为

$$t^2 \ddot{x} + (2nt + pt^2)\dot{x} + (qt^2 - n + n^2)x = 0 \quad (8)$$

根据方程(5)和(6),方程(1)可以转化为一个简单的方程

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0 \quad (9)$$

该方程为二阶常系数齐次线性方程. 其通解为

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (10)$$

其中, c_1, c_2 是任意的常数. r_1 和 r_2 为此方程的特征方程的两个实根. 方程(10)代入变换式(2)可得到原方程的精确解

$$x(t) = t^{-n}(c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) \quad (11)$$

当方程(9)的特征方程的两个实根相等,则其通解变为

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{rt} \quad (12)$$

方程(12)代入变换(2)式可得到原方程的精确解

$$x(t) = t^{-n}(c_1 + c_2 t)e^{rt} \quad (13)$$

当方程(9)的特征方程的解为一对共轭复根,则其通解变为

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (14)$$

其中,共轭复根为 $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, 方程(14)代入变换式(2)可得到原方程的精确解

$$x(t) = t^{-n}e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (15)$$

3 一类特殊的情况

令可积条件式(6)中的常数 $p=0$,时变非线性系统(1)在可积条件下可以重新写成如下形式

$$t^2 \ddot{x} + 2nt\dot{x} + (qt^2 - n + n^2)x = 0 \quad (16)$$

则方程(9)变为

$$\ddot{y} + qy = 0 \quad (17)$$

因此,式(17)的解析解为

$$y(t) = c_1 \cos \sqrt{q}t + c_2 \sin \sqrt{q}t \quad (18)$$

由式(18),可以得到式(16)的精确解

$$x(t) = t^{-n}(c_1 \cos \sqrt{q}t + c_2 \sin \sqrt{q}t) \quad (19)$$

这是一种特殊情况. 此外,当 $p=0$ 时,并令 $n=1/2$,

$q=1$,方程(16)可以简化为 $1/2$ 阶贝塞尔方程,即

$$t^2\ddot{x} + t\dot{x} + (t^2 - 1/4)x = 0 \tag{20}$$

其中 c_1, c_2 为积分常数,则 $1/2$ 阶贝塞尔方程的通解为

$$x(t) = t^{-1/2}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \tag{21}$$

这与文献[30]结果一致。显然,与 $1/2$ 阶贝塞尔方程相比,时变非线性系统式(16)是更为一般的情况。

4 数值验证

通过具体的算例进行数值仿真,来验证精确解的正确性以及有效性。

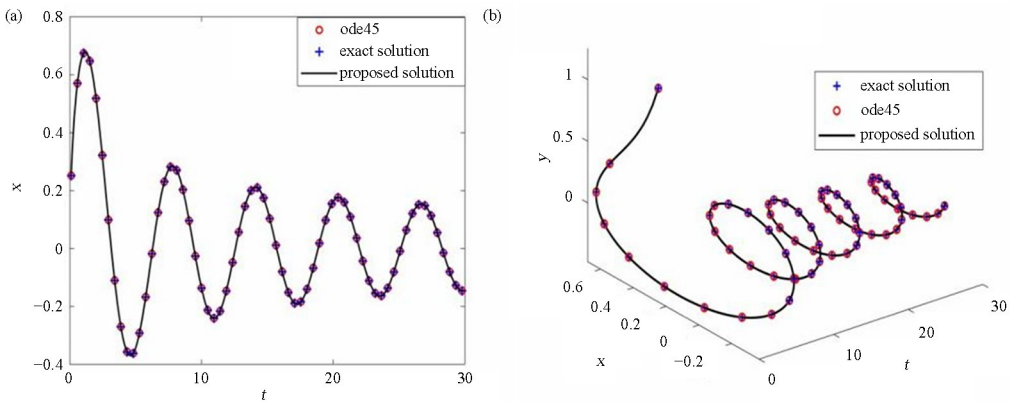


图1 方程(8)的精确解(21)、解析解(22)和数值解(20)
Fig. 1 The exact solution of the equation (21), classical analytical solution (22) and numerical data (20) of Eq. (8)

明不再重复。同时,在三维空间绘制了这些方法得到的 (t, x, y) 结果图,其中, $y = \dot{x}$ 。在图 1(b)中可以看到方程(20)的精确解、经典解析解和数值解是一致的。

4.2 系统参数 $p=0, q=1$ 时的解

考虑 $p=0, q=1$ 的情况,讨论了不同阶 n 的

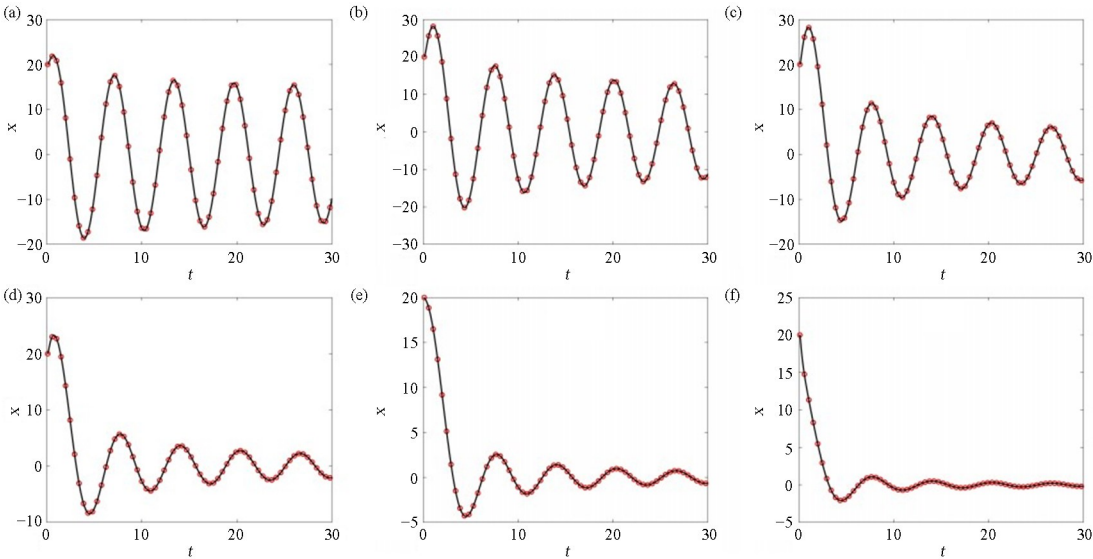
4.1 $1/2$ 阶贝塞尔方程

考虑 $1/2$ 阶贝塞尔方程,其另一种形式的经典解析解是

$$x_{1/2}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t \tag{22}$$

图 1(a)描绘了方程(21)、(22)的精确解和用 MATLAB 中 ode45 函数对方程(20)求得的数值解,其中黑线描述了所提出方法的精确解(21),蓝色加号表示经典的解析解式(22),红色空心圆表示 ode45 方法的数值解。下图中使用了相同的符号,说

方程(16)的解。
图 2 描述了九个不同 n 值情况下,时变非线性系统的精确解(19)和数值解(16)。此外,图 3 绘制了系统在 3D 空间中不同阶次的精确解和数值解。从图 2 和图 3 中可以清楚地看出,方程(19)中的精确解与从龙格-库塔数值积分中获得的不同实数 n 的数值解相匹配。



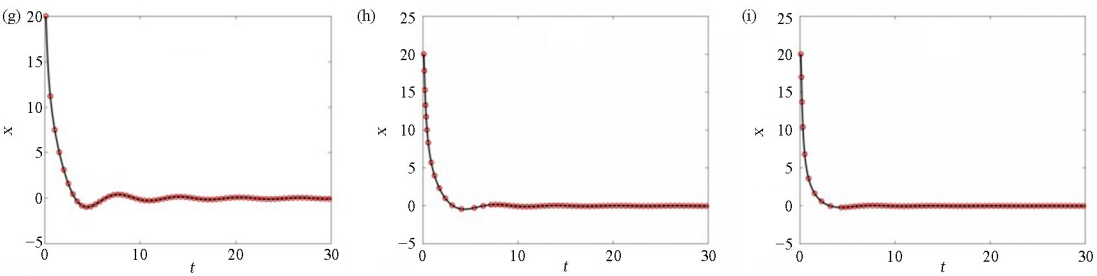


图 2 方程(16)在不同阶数下精确解和数值解: (a) $n=0.1$; (b) $n=0.25$; (c) $n=0.5$; (d) $n=0.75$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.25$; (g) $n=1.5$; (h) $n=1.75$; (i) $n=2.0$
Fig. 2 The exact solutions and numerical data of Eq. (16) at different orders: (a) $n=0.1$; (b) $n=0.25$; (c) $n=0.5$; (d) $n=0.75$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.25$; (g) $n=1.5$; (h) $n=1.75$; (i) $n=2.0$

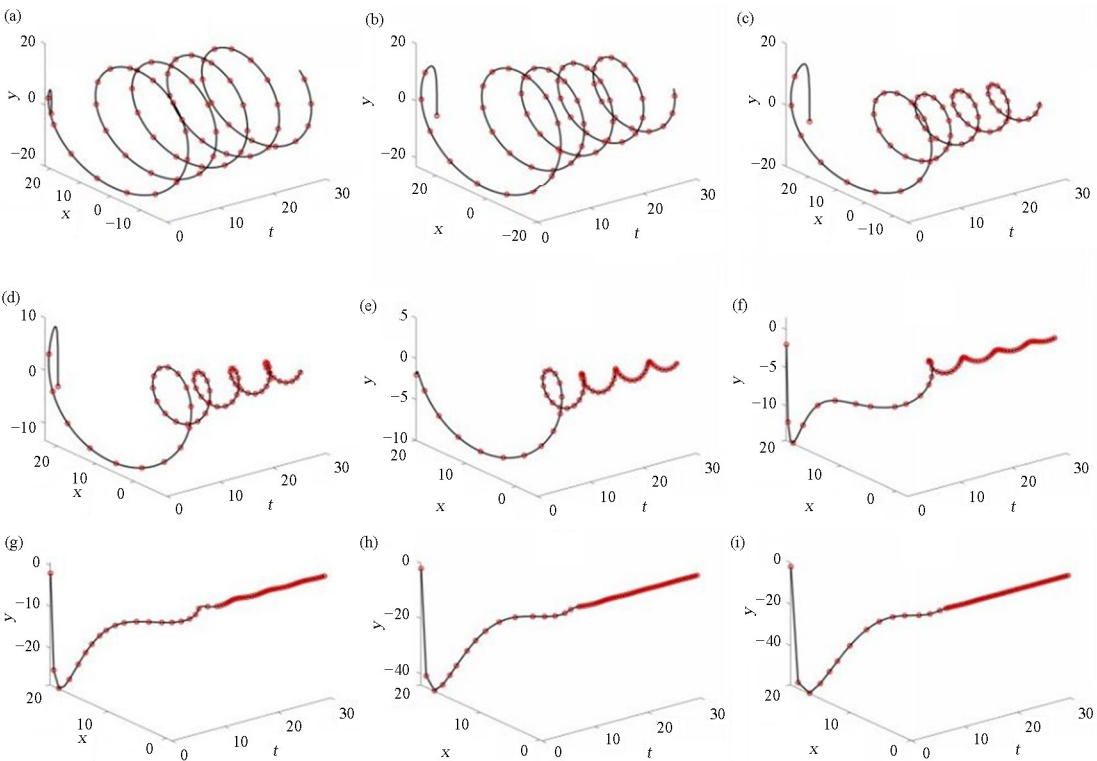


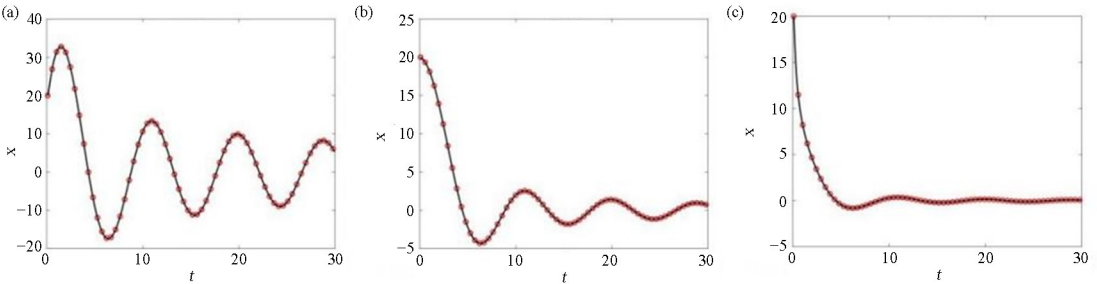
图 3 方程(16)在三维空间中不同阶数下精确解和数值解: (a) $n=0.1$; (b) $n=0.25$; (c) $n=0.5$; (d) $n=0.75$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.25$; (g) $n=1.5$; (h) $n=1.75$; (i) $n=2.0$
Fig. 3 The exact solution and numerical data of Eq. (16) in 3D space: (a) $n=0.1$; (b) $n=0.25$; (c) $n=0.5$; (d) $n=0.75$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.25$; (g) $n=1.5$; (h) $n=1.75$; (i) $n=2.0$

4.3 系统参数 $p=0, q \neq 1$ 时的解

我们考虑 $p=0, q \neq 1$ 的情况, 讨论了不同阶 n 和不同 q 的方程(16)的解.

图 4 给出了三个不同 q 值和三个不同 n 值时,

时变非线性系统的方程(19)的精确解和方程(16)的数值解. 此外, 图 5 显示了系统在三维空间中不同阶次的精确解和数值解. 应当注意, 方程(19)中的精确解与从龙格-库塔数值算法获得的数值解非常一致.



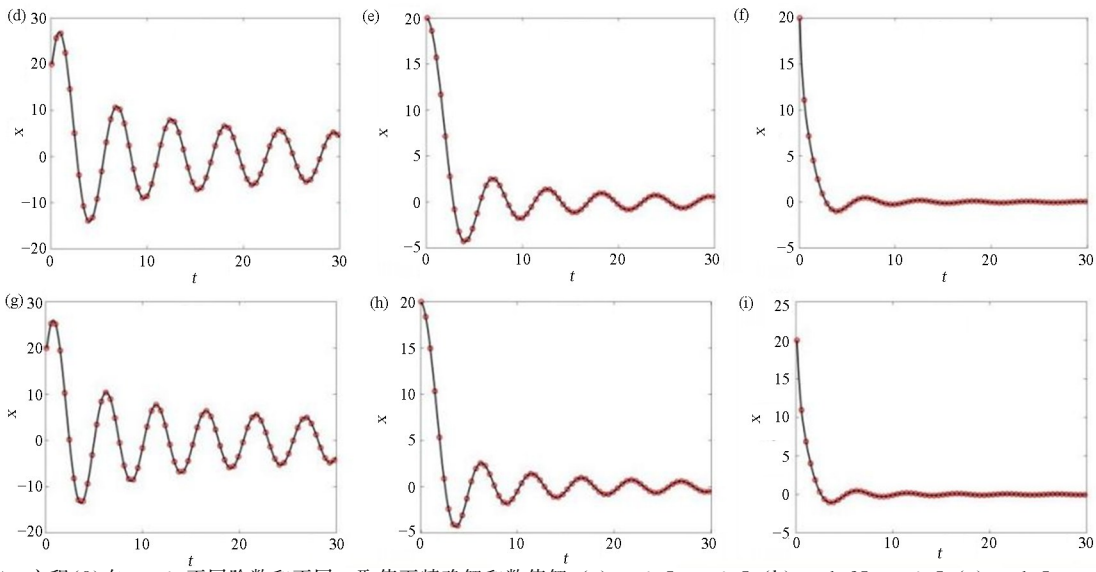


图4 方程(8)在 $p=0$,不同阶数和不同 q 取值下精确解和数值解:(a) $n=0.5,q=0.5$;(b) $n=1.25,q=0.5$;(c) $n=1.5,q=0.5$;
(d) $n=0.5,q=1.25$;(e) $n=1.25,q=1.25$;(f) $n=1.5,q=1.25$;(g) $n=0.5,q=1.5$;(h) $n=1.25,q=1.5$;(i) $n=1.5,q=1.5$
Fig.4 The exact solution and numerical data of Eq. (8) under $p=0$,different orders and q values;(a) $n=0.5,q=0.5$;(b) $n=1.25,q=0.5$;
(c) $n=1.5,q=0.5$;(d) $n=0.5,q=1.25$;(e) $n=1.25,q=1.25$;(f) $n=1.5,q=1.25$;(g) $n=0.5,q=1.5$;(h) $n=1.25,q=1.5$;(i) $n=1.5,q=1.5$

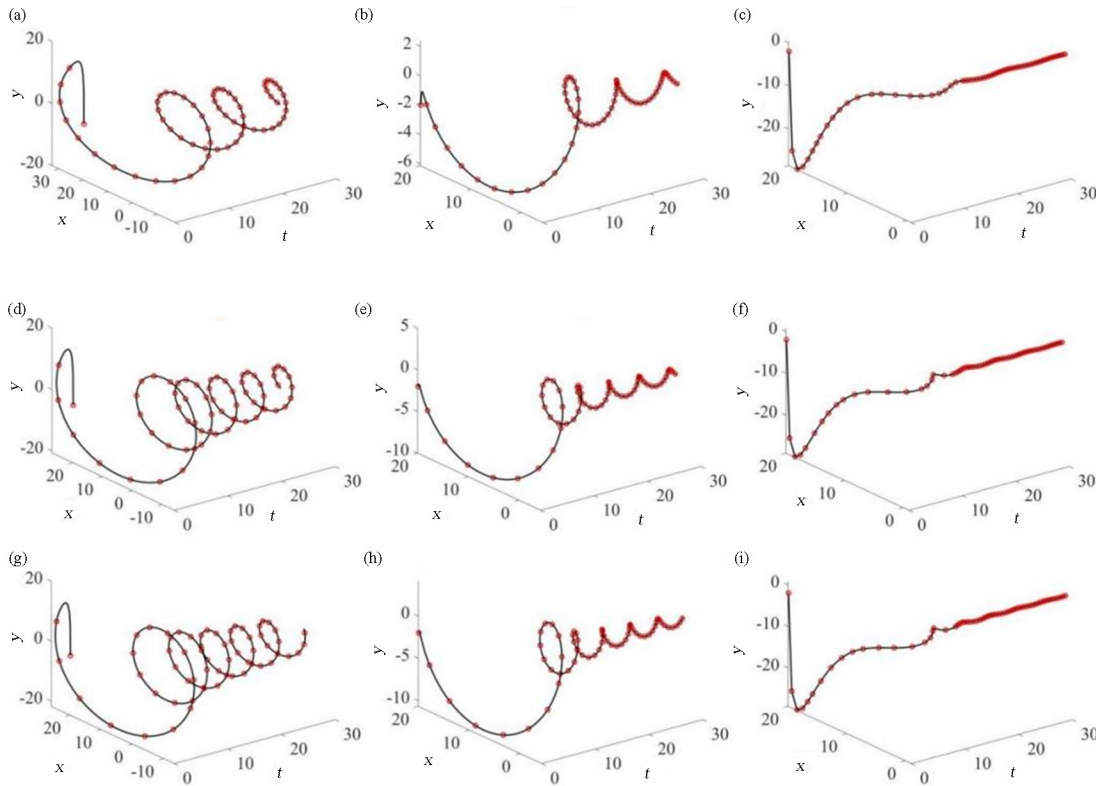


图5 方程(8)在三维空间中 $p=0$,不同阶数和不同 q 取值下精确解和数值数据:(a) $n=0.5,q=0.5$;(b) $n=1.25,q=0.5$;(c) $n=1.5,q=0.5$;
(d) $n=0.5,q=1.25$;(e) $n=1.25,q=1.25$;(f) $n=1.5,q=1.25$;(g) $n=0.5,q=1.5$;(h) $n=1.25,q=1.5$;(i) $n=1.5,q=1.5$
Fig.5 The exact solution and numerical data of Eq. (8) under $p=0$, different orders and q values in 3D space ;(a) $n=0.5,q=0.5$;(b) $n=1.25,q=0.5$;
(c) $n=1.5,q=0.5$;(d) $n=0.5,q=1.25$;(e) $n=1.25,q=1.25$;(f) $n=1.5,q=1.25$;(g) $n=0.5,q=1.5$;(h) $n=1.25,q=1.5$;(i) $n=1.5,q=1.5$

4.4 系统参数 $q=0$ 时的解

考虑 $p=1,q=0$ 和 $p=-1,q=0$ 的情况,讨论了不同阶 n 的方程(8)的解.

图 6(a)~(c)给出了 $p=1,q=0$ 时,时变非线

性系统在不同阶次的精确解(11)和数值解(8),图 6(d)~(f)给出了 $p=-1,q=0$ 时,时变非线性系统的方程(11)的精确解和方程(8)的数值解在不同阶次的精确解和数值解.

图 7(a)~(c)给出了 $p=1,q=0$ 时,时变非线性

系统在三维空间中不同阶次的精确解(11)和数值解(8),图 7(d)~(f)给出了 $p=-1,q=0$ 时,时变非线性系统的方程(11)的精确解和方程(8)的数值解在

三维空间中不同阶次的精确解和数值解。
应当注意,方程(11)中的精确解与从龙格-库塔数值积分中获得的不同实数 n 的数值解相匹配。

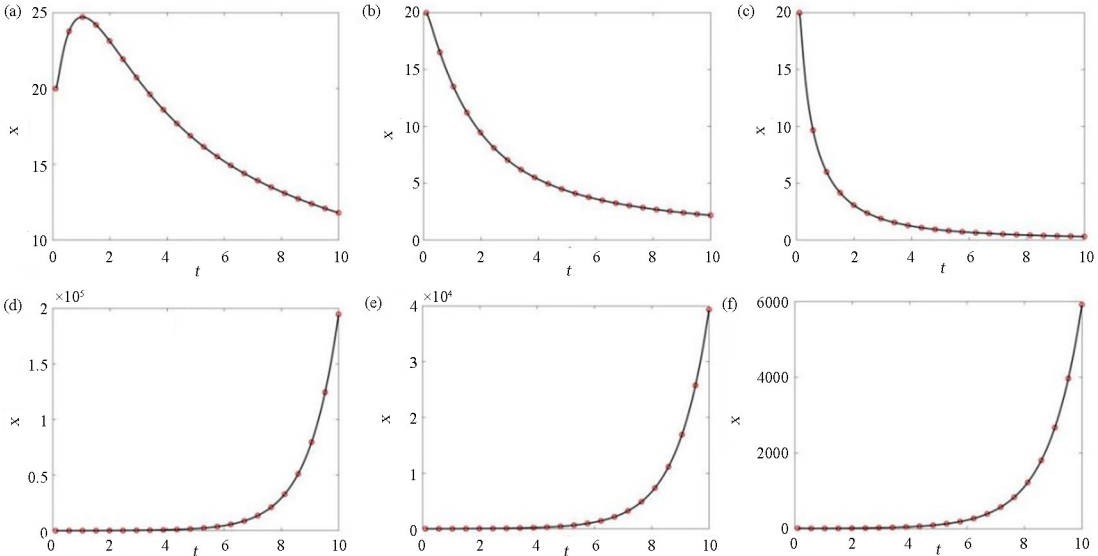


图 6 方程(8)在 $q=0$ 不同阶数和不同 p 取值下精确解和数值解:
(a) $n=0.5, p=1$; (b) $n=1.0, p=1$; (c) $n=1.5, p=1$; (d) $n=0.5, p=-1$; (e) $n=1.0, p=-1$; (f) $n=1.5, p=-1$
Fig. 6 The exact solution and numerical data of Eq. (8) under $q=0$, different orders and p values:
(a) $n=0.5, p=1$; (b) $n=1.0, p=1$; (c) $n=1.5, p=1$; (d) $n=0.5, p=-1$; (e) $n=1.0, p=-1$; (f) $n=1.5, p=-1$

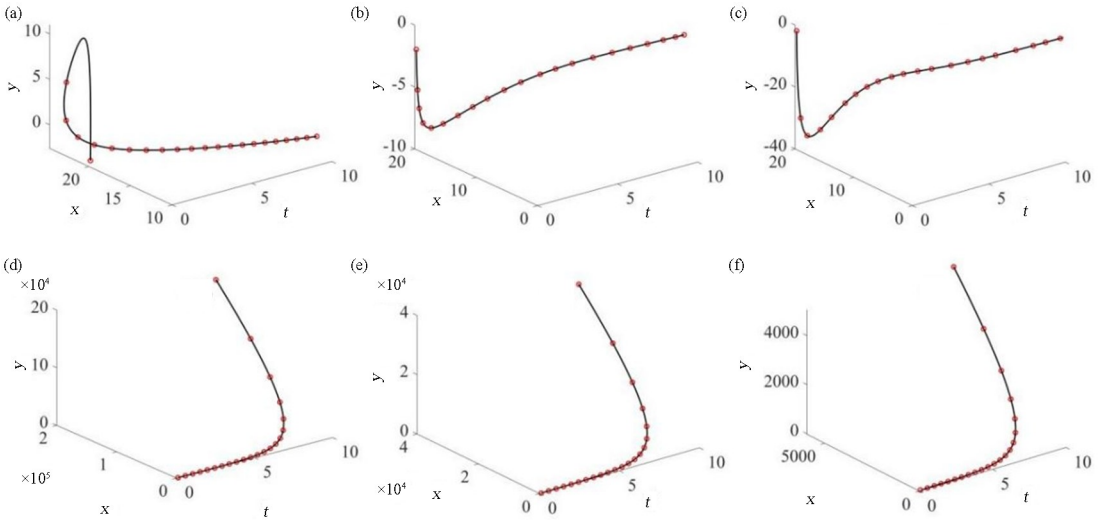


图 7 方程(8)在三维空间中 $q=0$ 不同阶数和不同 p 取值下精确解和数值解:
(a) $n=0.5, p=1$; (b) $n=1.0, p=1$; (c) $n=1.5, p=1$; (d) $n=0.5, p=-1$; (e) $n=1.0, p=-1$; (f) $n=1.5, p=-1$
Fig. 7 The exact solution and numerical data of Eq. (8) under $q=0$, different orders and p values in 3D space:
(a) $n=0.5, p=1$; (b) $n=1.0, p=1$; (c) $n=1.5, p=1$; (d) $n=0.5, p=-1$; (e) $n=1.0, p=-1$; (f) $n=1.5, p=-1$

4.5 系统参数 $q=4, p \neq 0$ 时的解

讨论方程(8)在 $p=5,q=4$ 和 $p=-5,q=4$ 的情况下不同阶 n 的方程的解。
图 8(a)~(c)给出了 $p=5,q=4$ 时,时变非线性系统在不同阶次的精确解(11)和数值解(8),图 8(d)~(f)给出了 $p=-5,q=4$ 时,时变非线性系统在不同阶次的精确解(11)和数值解(8)。

图 9(a)~(c)给出了 $p=-5,q=4$ 时,时变非线性系统在三维空间中不同阶次的精确解(11)和数值解(8),图 9(d)~(f)给出了 $p=-5,q=4$ 时,时变非线性系统在三维空间中不同阶次的精确解(11)和数值解(8)。
应当注意,方程(11)中的精确解与从龙格-库塔数值算法获得的数值结果非常一致。

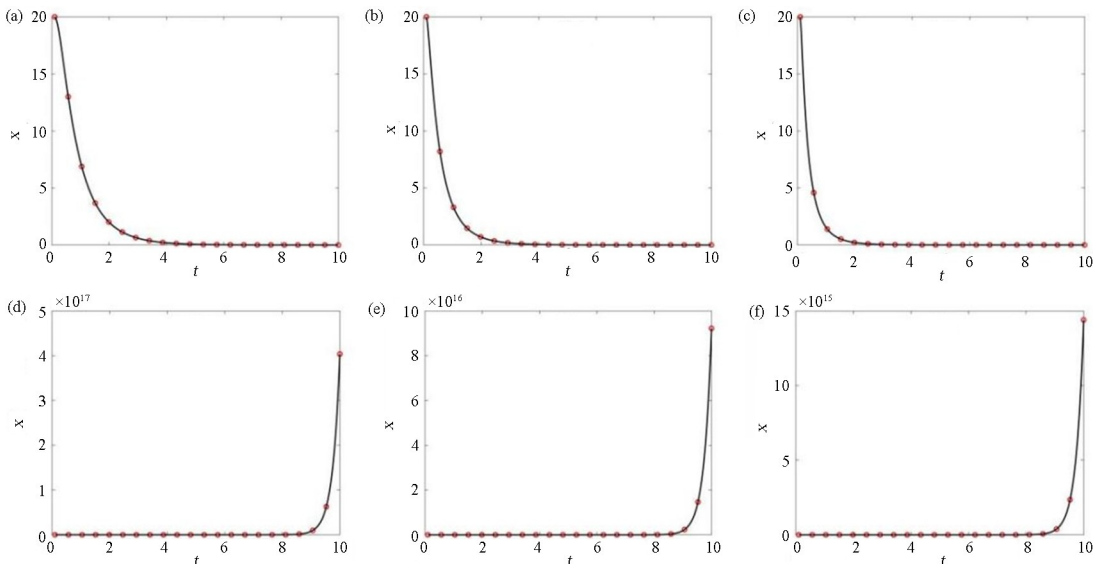


图8 方程(8)在 $p=5, q=4$ 和 $p=-5, q=4$ 取值下不同阶数的精确解和数值解,
 $p=5, q=4$: (a) $n=0.5$, (b) $n=1.0$, (c) $n=1.5$; $p=-5, q=4$: (d) $n=0.5$, (e) $n=1.0$, (f) $n=1.5$
Fig. 8 The exact solutions and numerical data of different orders of Eq. (8) at $p=5, q=4$ and $p=-5, q=4$,
 $p=5, q=4$: (a) $n=0.5$, (b) $n=1.0$, (c) $n=1.5$; $p=-5, q=4$: (d) $n=0.5$, (e) $n=1.0$, (f) $n=1.5$

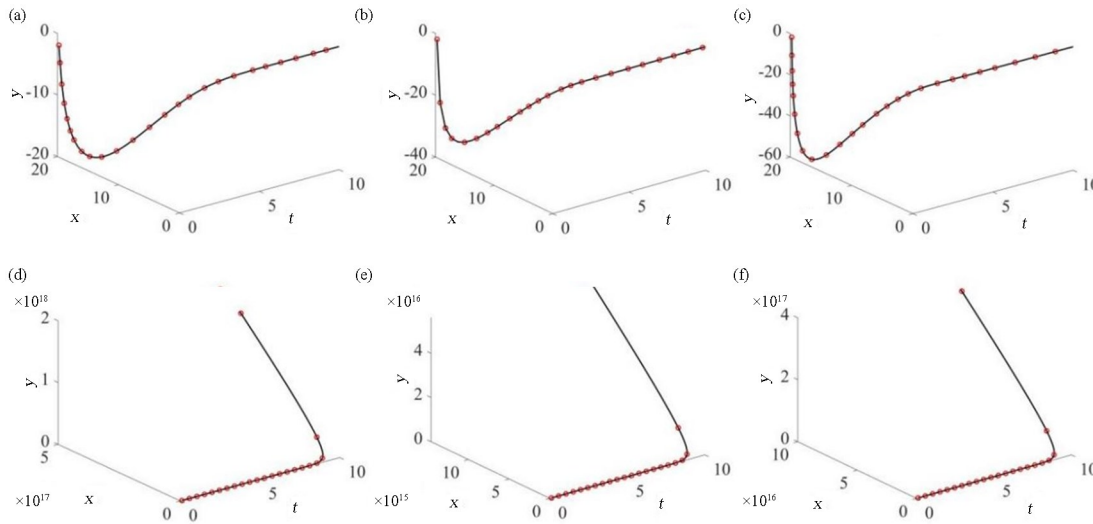


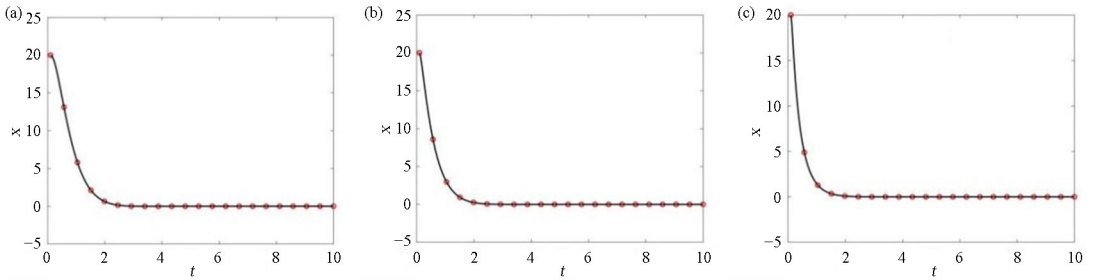
图9 方程(8)在 $p=5, q=4$ 和 $p=-5, q=4$ 取值下 3D 空间中不同阶数的精确解和数值解,
 $p=5, q=4$: (a) $n=0.5$, (b) $n=1.0$, (c) $n=1.5$; $p=-5, q=4$: (d) $n=0.5$, (e) $n=1.0$, (f) $n=1.5$
Fig. 9 The exact solutions and numerical data of different orders of Eq. (8) in 3D space at $p=5, q=4$ and $p=-5, q=4$,
 $p=5, q=4$: (a) $n=0.5$, (b) $n=1.0$, (c) $n=1.5$; $p=-5, q=4$: (d) $n=0.5$, (e) $n=1.0$, (f) $n=1.5$

4.6 系统参数 $p=4, q=5$ 时的解

讨论方程(8)在 $p=4, q=5$ 的情况下不同阶 n 的方程的解. 此取值会出现共轭复根情况.

图 10 给出了三个不同 n 值时, 时变非线性系

统的精确解(15)和数值解(8)在二维和三维对比, 其中图 10(a)~(c)和图 10(d)~(f)分别是二维空间和三维空间中不同阶次的精确解和数值数据. 结果显示方程(15)中的精确解与从龙格-库塔数值算法获得的数值解非常一致.



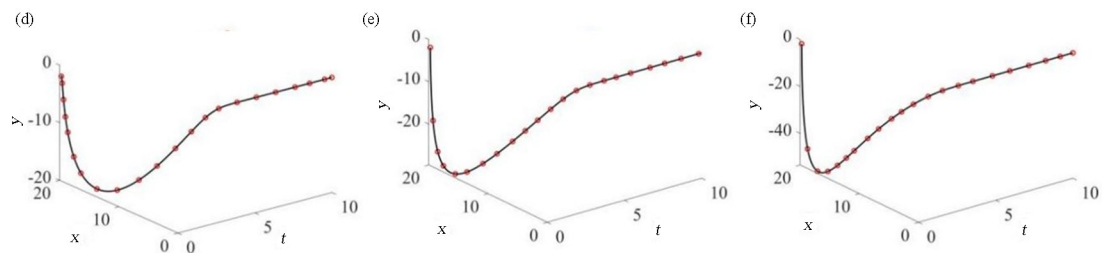


图 10 方程(8)在 $p=4, q=5$ 取值下不同阶数的精确解和数值解: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$
Fig. 10 The exact solutions and numerical data of Eq. (8) with different orders at $p=4$ and $q=5$: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$

4.7 系统参数 $p=2, q=1$ 时的解

讨论方程(8)在 $p=2, q=1$ 的情况下不同阶 n 的方程的解. 在此取值下, 方程的特征方程会出现两个实根相等的情况. 方程(8)的精确解变为方程(13).

图 11(a)~(c)给出了 $p=2, q=1$ 时, 时变非

线性系统在不同阶次的精确解(13)和数值解(8), 图 11(d)~(f)给出了 $p=2, q=1$ 时, 时变非线性系统在三维空间中不同阶次的精确解(13)和数值解(8). 结果显示方程(13)中的精确解与从龙格—库塔数值积分中获得的不同实数 n 的数值解相匹配.

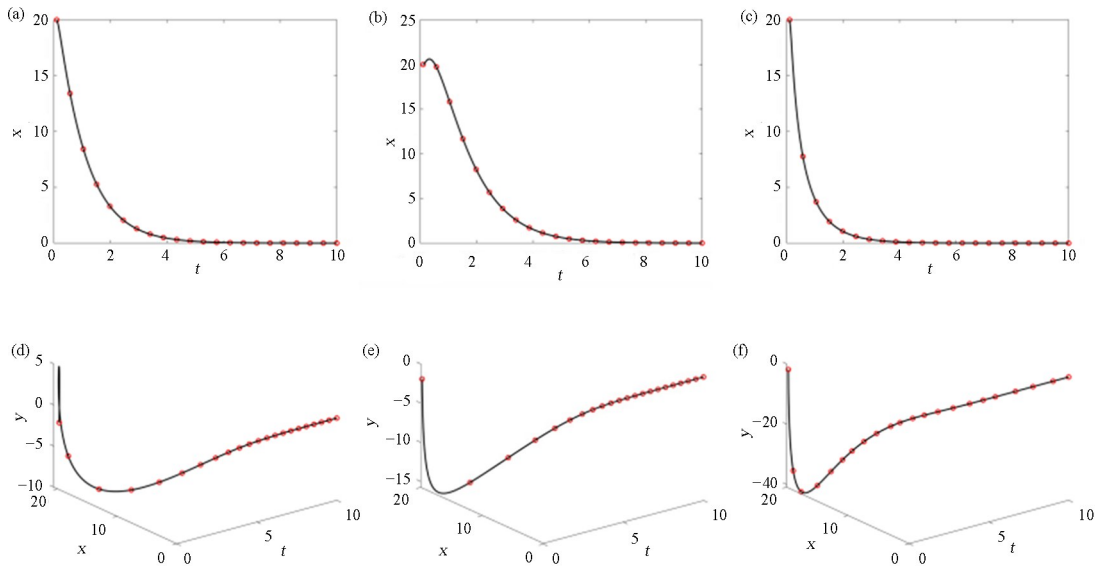
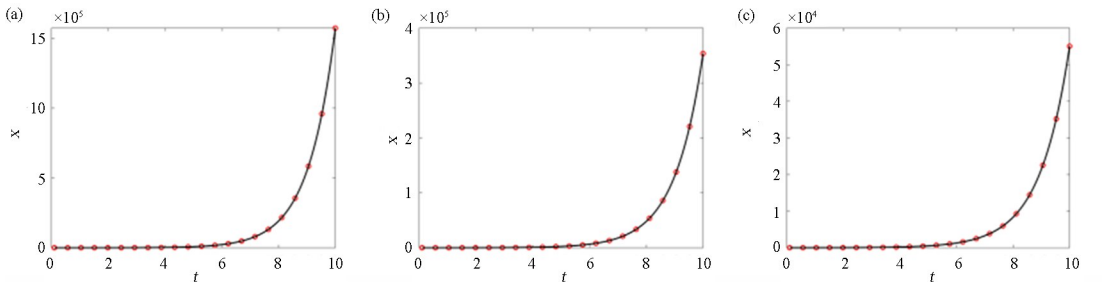


图 11 方程(8)在 $p=2, q=1$ 取值下不同阶数的精确解和数值解: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$
Fig. 11 The exact solutions and numerical data of Eq. (8) with different orders at $p=2$ and $q=1$ values: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$

4.8 系统参数 $p=-2, q=1$ 时的解

讨论方程(8)在 $p=-2, q=1$ 的情况下不同阶 n 的方程的解. 在此取值下, 方程的特征方程会

出现两个实根相等的情况. 方程(8)的精确解变为方程(13). 图 12(a)~(c)给出了 $p=-2, q=1$ 时, 时变非线性系统的方程在不同阶次的精确解(13)和数值解(8), 图 12(d)~(f)给出了 $p=-2$,



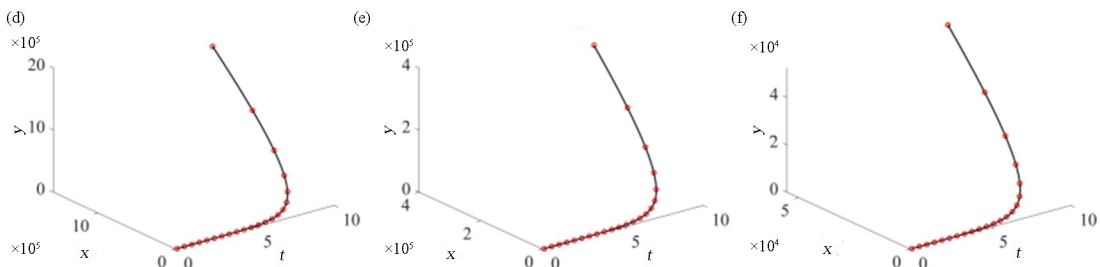


图 12 方程(8)在 $p=-2, q=1$ 取值下不同阶数的精确解和数值解: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$
Fig. 12 The exact solutions and numerical data of Eq. (8) with different orders at $p=-2$ and $q=1$: (a) $n=0.5$; (b) $n=1.0$; (c) $n=1.5$; (d) $n=0.5$; (e) $n=1.0$; (f) $n=1.5$

$q=1$ 时变非线性系统在三维空间中不同阶次的精确解(13)和数值解(8). 结果显示方程(13)中的精确解与从龙格—库塔数值积分中获得的不同实数 n 的数值解相匹配.

5 结论

本文采用坐标变换方法,约化一类时变非线性系统,提出了一种新的时空非线性变换来构造系统的精确解. 通过引入坐标变换,得到了系统的可积条件以及约化的常系数线性微分方程,然后利用约化后的方程的解析解,推导出了原系统的精确解. 此外,给出了作为该类时变非线性系统的特例—— $1/2$ 阶贝塞尔方程等一些具体算例进行验证. 结果表明,本文所提出的非线性变换方法求解一类时变非线性系统的精确解是正确的并且是有效的.

参考文献

[1] 孙中奎, 金晨. 时滞系统非线性动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(8): 6—18.
SUN Z K, JIN C. Advances in nonlinear dynamics for delayed systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(8): 6—18. (in Chinese)

[2] 王卓, 毛晓晔, 丁虎, 等. 大展弦比板弯扭耦合受迫振动分析[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(1): 27—36.
WANG Z, MAO X Y, DING H, et al. Analysis of flexural coupled forced vibration of high-aspect ratio plate [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(1): 27—36. (in Chinese)

[3] 陈星宇, 张舒. 机械臂负载移动性能与运动调控研究[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(2): 100—110.
CHEN X Y, ZHANG S. Research on movement performance and motion control of manipulator with load [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024,

22(2): 100—110. (in Chinese)

[4] 管永乐, 王鹏, 刘百强. 基于超细长弹性杆模型的斜拉索参数振动分析[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(9): 37—44.
GUAN Y L, WANG P, LIU B Q. Parametric vibration analysis of stay cables using a super-thin elastic rod model [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(9): 37—44. (in Chinese)

[5] 王锦涛, 谢勇. 保守系统中非线性耦合振子间的能量传递[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(1): 18—27.
WANG J T, XIE Y. Energy transfer between nonlinear coupled oscillators in conservative systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(1): 18—27. (in Chinese)

[6] PRZYBYLSKI J, GASIORSKI G. Nonlinear vibrations of elastic beam with piezoelectric actuators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 437: 150—165.

[7] MEI X T, ZHOU S X, YANG Z C, et al. A tri-stable energy harvester in rotational motion: Modeling, theoretical analyses and experiments [J]. Journal of Sound and Vibration, 2020, 469: 115142.

[8] NIEDERGESÄß B, PAPANGELO A, GROLET A, et al. Experimental observations of nonlinear vibration localization in a cyclic chain of weakly coupled nonlinear oscillators [J]. Journal of Sound and Vibration, 2021, 497: 115952.

[9] WANG Q S, YAN Z P, DAI H H. An efficient multiple harmonic balance method for computing quasi-periodic responses of nonlinear systems [J]. Journal of Sound and Vibration, 2023, 554: 117700.

[10] LEADENHAM S, ERTURK A. M-shaped asymmetric nonlinear oscillator for broadband vibration energy harvesting: Harmonic balance analysis and experimental validation [J]. Journal of Sound and

- Vibration, 2014, 333(23): 6209—6223.
- [11] KUMAR G, MALAS A. Controlling mode-coupling instability in friction-induced vibration by acceleration feedback [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 539: 117273.
- [12] ZHANG X X, XU J, JI J C. Modelling and tuning for a time-delayed vibration absorber with friction [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 424: 137—157.
- [13] LIU Y L, LIU L Q, DOSTAL L, et al. The applicability of stochastic averaging method to solve the ship rolling response excited by narrow-band waves [J]. Ocean Engineering, 2022, 251: 111109.
- [14] MARINCA V, HERISANU N. Determination of periodic solutions for the motion of a particle on a rotating parabola by means of the optimal Homotopy asymptotic method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(9): 1450—1459.
- [15] 梅凤翔, 吴惠彬. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- MEI F X, WU H B. Analytical mechanics methods of differential equations [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese)
- [16] HYDON P E. Symmetry methods for differential equations [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [17] CHEB-TERRAB E S, DUARTE L G S, DA MOTA L A C P. Computer algebra solving of second order ODEs using symmetry methods [J]. Computer Physics Communications, 1998, 108(1): 90—114.
- [18] TIWARI A K, PANDEY S N, SENTHILVELAN M, et al. Lie point symmetries classification of the mixed Liénard-type equation [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 82(4): 1953—1968.
- [19] PRELLE M J, SINGER M F, PRELLE M J, et al. Elementary first integrals of differential equations [C]//Transactions of the American Mathematical Society, 1983, 279(1): 215—229.
- [20] MAN Y K. First integrals of autonomous systems of differential equations and the Prolle-Singer procedure [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1994, 27(10): 329—332.
- [21] MAN Y K, MACCALLUM M A H. A rational approach to the Prolle-Singer algorithm [J]. Journal of Symbolic Computation, 1997, 24(1): 31—43.
- [22] ALMENDRAL J A, SANJU N M A F. Integrability and symmetries for the Helmholtz oscillator with friction [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2003, 36(3): 695—710.
- [23] CHANDRASEKAR V K, SENTHILVELAN M, LAKSHMANAN M. New aspects of integrability of force-free Duffing-van der Pol oscillator and related nonlinear systems [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 2004, 37(16): 4527—4534.
- [24] DUARTE L G S, DA MOTA L A C P. Finding elementary first integrals for rational second order ordinary differential equations [J]. Journal of Mathematical Physics, 2009, 50(1): 013514.
- [25] LEWIS F L, MERTZIOS B G, MARSZALEK W. Analysis of singular bilinear systems using Walsh functions [J]. IEEE Proceedings D Control Theory and Applications, 1991, 138(2): 89.
- [26] BALACHANDRAN K, MURUGESAN K. Analysis of different systems via single-term Walsh series method [J]. International Journal of Computer Mathematics, 1990, 33(3/4): 171—179.
- [27] BALACHANDRAN K, MURUGESAN K. Analysis of nonlinear singular systems via STWS method [J]. International Journal of Computer Mathematics, 1990, 36(1/2): 9—12.
- [28] SEPEHRIAN B, RAZZAGHI M. Solution of time-varying singular nonlinear systems by single-term Walsh series [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2003, 2003(3): 129—136.
- [29] HSIAO C H, WANG W J. State analysis of time-varying singular nonlinear systems via Haar wavelets [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 1999, 51(1/2): 91—100.
- [30] BALACHANDRAN K, MURUGESAN K. Numerical solution of a singular nonlinear system from fluid dynamics [J]. International Journal of Computer Mathematics, 1991, 38(3/4): 211—218.
- [31] NAYFEH A H. The method of normal forms [M]. Weinheim, Germany: Wiley-VCH, 2011.