

# 变分积分分子在刚体动力学仿真中的应用<sup>\*</sup>

牛奔<sup>1,2</sup> 王焕民<sup>1,2</sup> 朱进<sup>1,2</sup> 刘世兴<sup>1,2†</sup> 郭永新<sup>1,2</sup>

(1. 辽宁大学 物理学院, 沈阳 110036)

(2. 辽宁大学 空间科学与技术研究院, 沈阳 110036)

**摘要** 在对数学模型进行离散求解的过程中,传统的数值方法只考虑线性局部的数值稳定性,难以完全真实地长时间描述系统的动力学特性.本文采用李群描述刚体运动的位形,定义两种李群上的变分公式,根据离散 Hamilton 变分原理与离散 Legendre 变换分别推导出刚体系统的 Hamilton 体系下的一般格式的李群变分积分分子和 Hamel 变分积分分子.我们将这两种李群变分积分算法对 3D 车摆模型进行仿真计算,对比研究了算法在保持系统群结构、系统能量等方面的性质.仿真结果表明,Hamilton 变分积分分子较一般格式的李群变分积分分子精度更高,且能更好地保持系统群结构与能量.

**关键词** 离散变分, 李群, 变分积分算法, 刚体动力学, 系统能量

**中图分类号**:O152.5;O151.1;O302

**文献标志码**:A

## Application of Variational Integrators in Rigid Body Dynamics Simulation<sup>\*</sup>

Niu Ben<sup>1,2</sup> Wang Huanmin<sup>1,2</sup> Zhu Jin<sup>1,2</sup> Liu Shixing<sup>1,2†</sup> Guo Yongxin<sup>1,2</sup>

(1. College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

(2. Institute of Space Science and Technology, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

**Abstract** In the process of discretely solving mathematical models, traditional numerical methods primarily focus on linear local numerical stability, making it difficult to accurately describe the system's dynamic characteristics over long periods. This paper uses Lie groups to describe the configuration of rigid body motion and defines two variational formulas on Lie groups. By applying the discrete Hamiltonian variational principle and the discrete Legendre transformation, we derive the general forms of Lie group variational integrators and Hamel variational integrators for the Hamiltonian system of the rigid body. We simulate the 3D car pendulum model using both of these Lie group variational integrator algorithms and compare their performance in preserving the system's group structure and energy. Simulation results show that the Hamel variational integrator achieves higher accuracy than the general form of the Lie group variational integrator and better preserves the system's group structure and energy.

**Key words** discrete variational principle, Lie group, variational integrator, rigid body dynamics, system energy

2024-12-14 收到第 1 稿,2025-02-09 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目(12232009,12372002,12472001),辽宁大学 2024 年度基本科研项目:科研平台建设项目(LNU202404),National Natural Science Foundation of China (12232009,12372002,12472001),Liaoning University's 2024 Basic Scientific Research Project; Scientific Research Platform Construction Project (LNU202404).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:liushixing@lnu.edu.cn

## 引言

随着现代工程问题和科学问题的复杂性和维度不断增加,对基于模型设计和分析的复杂数值方法的需求也随之增长.对于这类问题,数值积分器的定性特性对数值模拟的准确性和长期预测的可靠性至关重要.在工程应用中,传统的数值方法没有考虑底层物理系统的定性特征,比如,第一积分、切丛上的李对称性或余切丛上的辛形式,这最终可能产生不符合物理事实的误差<sup>[1]</sup>.

为了解决刚体系统的运动常微分方程组在长时间仿真中所出现的计算值与物理性质不符的问题,我们需要发展可以保持刚体系统几何结构和物理性质的保结构数值积分方法.保结构数值积分方法能更好地展现力学和物理问题中的不变量,其核心思想是将数值积分方法视为离散动力学系统,该系统的流可以近似连续动力学系统的流,而不仅仅关注轨迹的数值逼近情况<sup>[2]</sup>.

在工程领域大部分系统的位形空间不是欧氏空间而是微分流形,如果使用传统的基于欧氏空间的动力学建模与数值算法难以完全真实地描述系统的动力学特性.使用微分几何的方法来描述和分析这些系统相比于传统欧氏空间中的向量更加自然和简洁,分析结果也更加真实、可信<sup>[3,4]</sup>.自由刚体的位姿矩阵由刚体的质心位置矢量与刚体的旋转矩阵确定,可以用两种经典李群表示,分别是  $SE(3)$  与  $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ . 相比于欧拉角方法直接用三个独立的欧拉角参数表示旋转,李群方法无需在位形空间进行全局参数化过程,避免了由此产生的奇异现象<sup>[5]</sup>;相比于四元数法、自然坐标法,李群方法并不会引入额外的约束方程<sup>[6]</sup>,减小了动力学方程的规模,有助于提高计算效率.

传统的数值积分方法,如 Runge-Kutta 法<sup>[7]</sup>,通常既不保持第一积分,也不保持位形空间的特征.然而,结合微分几何和数值积分方法的几何数值积分方法能够保持系统的几何结构和物理性质.其中由 Marsden 提出的变分积分分子不仅保持了系统的辛结构,并且满足离散的 Noether 定理<sup>[2]</sup>,同时保留了良好的能量性质.变分积分算法与李群建模方法相结合得到李群变分积分分子<sup>[8]</sup>.李群变分积分分子能够自然地保持李群结构的同时保持系统的辛结构.根据李群上变分公式的不同,本文介绍两

种李群变分积分分子:一般格式的李群变分积分分子和 Hamel 变分积分分子<sup>[9]</sup>.

一般格式的李群变分积分算法是直接对李群元素采取有限差分方法近似得到李代数元素的算法.一般格式的李群变分积分算法已被应用于多体动力学数值仿真<sup>[10-12]</sup>、几何控制<sup>[13,14]</sup>、机器学习<sup>[15]</sup>等领域. Saccon 等<sup>[16]</sup>将基于三维欧氏空间的变分积分算法中点格式引申至李群变分积分算法中,并讨论了该方法保持动量映射需要满足的条件. Lee 等<sup>[17]</sup>提出了多体系统的线性变分积分器,通过离散递归牛顿-欧拉算法求解残差向量,以及铰接体惯性算法计算更新迭代值,提高了计算效率. Sharma 等<sup>[18]</sup>将离散的能量守恒方程作为约束条件构造了自适应步长的一般李群变分积分算法,它能够更好地保持系统的能量.随后,Valentin 等<sup>[19]</sup>将自适应步长的一般李群变分积分格式扩展应用到一般的黎曼流形上,更加具有普适意义. Leitz 等<sup>[20]</sup>基于单位四元数插值 Galerkin 方法与李群变分积分分子结合得到任意阶 Galerkin 李群变分积分分子,它既能保持系统辛结构和动量,又能实现任意阶精度和具有指数收敛性.

Bloch 等<sup>[21]</sup>将活动标架法引入变分原理,推导了有限维力学系统的 Hamel 动力学方程,通过与离散变分方法相结合,得到了 Hamel 变分积分分子.史东华等<sup>[22]</sup>又提出了无穷维力学系统的 Hamel 形式,进而研究了经典场论的 Hamel 形式,并在此基础上构建了 Hamel 场变分积分分子.高山等<sup>[23]</sup>构造一种可以处理非完整约束的低阶 Hamel 变分积分分子. Hamel 场变分积分方法在抓取机械臂<sup>[24]</sup>、几何精确梁<sup>[25,26]</sup>、柔性编队<sup>[27]</sup>等应用中表现出保持系统动量和能量的特点.

本文工作如下:(1)基于 Marsden 提出的变分积分分子理论,分别采用四阶 Runge-Kutta 法、四阶辛 Runge-Kutta 法和四阶 Galerkin 变分积分分子计算一维谐振子的运动,对比研究两种李群算法的能量误差特性,验证变分积分分子相较于传统算法在保结构方面的优越性.(2)基于李群李代数的离散 Hamilton 方程,建立了 Hamilton 体系下刚体系统动力学两种李群变分积分算法.分别采用两种算法(一般格式的李群变分积分算法、Hamel 变分积分算法)计算了 3D 车摆的动力学问题,对比研究了各算法的能量误差等特性.研究表明一般格式的李

群变分积分算法与 Hamel 变分积分算法在长时间保持系统结构、能量等方面存在显著优势,具有潜在在工程应用前景,如小天体长时间演化问题等。

## 1 变分积分分子

考虑一个具有位形流形为  $Q$  的系统,该系统的离散状态空间为  $Q \times Q$ ,对于固定时间步长  $h = (t_f - t_0)/N$ ,离散轨迹  $\{q_k\}_{k=0}^N$  由系统所在时间序列  $\{t_k = t_0 + kh \mid k = 0, \dots, N\}$  上的构型来定义. 利用离散作用积分  $S_d = \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1})$  来近似作用积分  $S = \int_{t_0}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt$  可以得到

$$L_d(q_k, q_{k+1}) \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(q, \dot{q}) dt \quad (1)$$

其中  $L_d(q_k, q_{k+1})$  表示  $[t_k, t_{k+1})$  区间的离散拉格朗日量。

根据离散 Hamilton 变分原理对离散作用积分进行变分

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \frac{\partial L_d(q_k, q_{k+1})}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L_d(q_k, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}} \delta q_{k+1} \right] = 0 \quad (2)$$

得到离散的 Euler-Lagrange 方程

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) = 0, \quad (3)$$

其中  $D_i (i \in 1, 2)$  表示对离散 Lagrange 函数的第  $i$  个变量的求导;  $k$  的取值范围是  $1, \dots, N-1$ . 通过离散的 Legendre 变换得到 Hamilton 体系下的变分积分公式

$$p_k = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \quad (4)$$

$$p_{k+1} = D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) \quad (5)$$

其中  $p_k, p_{k+1}$  代表离散动量,详细推导读者可参考文献[2].

为了证明变分积分方法相比于传统数值积分方法的优势,我们分别使用四阶 Runge-Kutta 法、四阶辛 Runge-Kutta 法和四阶 Galerkin 变分积分分子对一维谐振子进行仿真计算. 一维谐振子的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} \quad (6)$$

从图 1 和图 2 可知:三种算法在计算位置和动量方面是一致的,证明计算结果的正确性. 从图 3 可知:(1)四阶辛 Runge-Kutta 法和四阶 Galerkin 变分积分分子要比四阶 Runge-Kutta 法能够更好地

保持系统能量不发散;(2)四阶 Galerkin 变分积分分子的能量波动要小于四阶 Runge-Kutta 法;(3)通过三种算法对于一维谐振子的仿真计算可以证明变分积分分子相较于传统的数值算法在保持系统结构(能量)方面是有优势的。

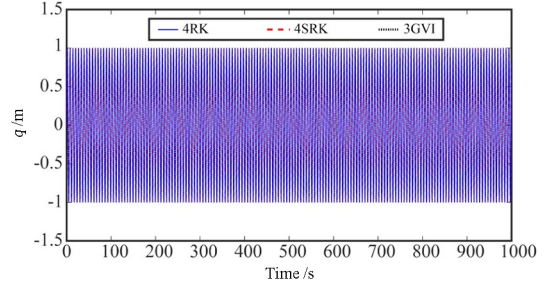


图 1 一维谐振子的位置

Fig. 1 Position of the 1D harmonic oscillator

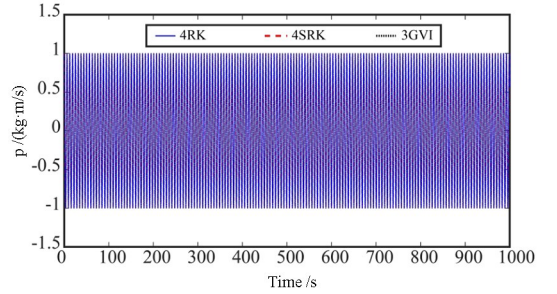


图 2 一维谐振子的动量

Fig. 2 Momentum of the 1D harmonic oscillator

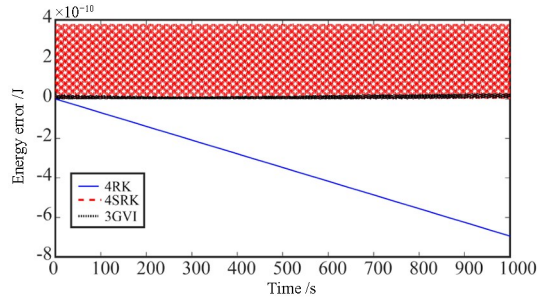


图 3 一维谐振子的能量误差

Fig. 3 Energy error of the 1D harmonic oscillator

## 2 两种李群变分积分分子

### 2.1 李群变分积分公式

考虑一个在李群  $G$  上演化的系统,系统的离散 Lagrange 函数的位形空间是  $G \times G$ ,定义  $g_k, f_k \in G$  满足

$$g_{k+1} = g_k f_k \quad (7)$$

其中  $g_k, g_{k+1}$  分别是  $t_k$  和  $t_{k+1}$  时刻刚体的位形,  $f_k$  是  $t_k$  时刻到  $t_{k+1}$  时刻刚体位形的变化;  $k$  的取值范围是  $1, \dots, N-1$ . 离散的 Lagrange 函数  $L_d(g_k, f_k)$  采用 Störmer-Verlet 格式离散后可以

表示为:

$$L_d(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_k) = T(\mathbf{f}_k) - \frac{1}{2}hU(\mathbf{g}_k) - \frac{1}{2}hU(\mathbf{g}_{k+1}) \quad (8)$$

$T(\mathbf{f}_k)$ 表示系统动能,  $U(\mathbf{g}_k)$ 、 $U(\mathbf{g}_{k+1})$ 分别表示  $t_k$  和  $t_{k+1}$  时刻系统的势能.

根据离散 Hamilton 变分原理可以得到离散的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} & T_e^* L_{f_{k-1}} \cdot D_{f_{k-1}} L_d(\mathbf{g}_{k-1}, \mathbf{f}_{k-1}) - \text{Ad}_{f_k}^* \cdot \\ & [T_e^* L_{f_k} \cdot D_{f_k} L_d(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_k)] + T_e^* L_{g_k} \cdot \\ & D_{g_k} L_d(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_k) = 0 \\ & \mathbf{g}_{k+1} = \mathbf{g}_k \mathbf{f}_k \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $T_e^* L_{g_k}$ 、 $T_e^* L_{f_k}$  表示拉回映射,  $\text{Ad}_{f_k}^*$  表示余伴随映射, 对运算符号的详细推导请读者参考文献 [8].

定义离散的 Legendre 变换  $\mathbb{F}L_d: G \times G \rightarrow G \times g^*$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^+ L_d(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_k) &= (\mathbf{g}_k \mathbf{f}_k, \boldsymbol{\mu}_{k+1}) \\ \mathbb{F}^- L_d(\mathbf{g}_k, \mathbf{f}_k) &= (\mathbf{g}_k, \boldsymbol{\mu}_k) \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_{k+1} \in g^*$ , 表示离散动量.

通过离散的 Legendre 变换得到 Hamilton 体系下的李群变分积分公式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_k &= -T_e^* L_{g_k} \cdot D_{g_k} L_{d_k} + \text{Ad}_{f_k}^* \\ & (T_e^* L_{f_k} \cdot D_{f_k} L_{d_k}) \\ \boldsymbol{\mu}_{k+1} &= T_e^* L_{f_k} \cdot D_{f_k} L_{d_k} \end{aligned} \quad (11)$$

## 2.2 一般格式的李群变分积分

自由刚体运动的位形可以用  $\text{SE}(3)$  群描述, 它是  $\mathbb{R}^3$  和特殊正交群  $\text{SO}(3)$  半直积, 可以表示为

$$\text{SE}(3): \left\{ \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}; \mathbf{R} \in \text{SO}(3), \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \right\} \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{R}$  表示刚体的体坐标系相对于惯性坐标系的旋转矩阵,  $\mathbf{x}$  表示刚体质心在惯性坐标系下的位置矢量. 在离散系统中  $\text{SE}(3)$  群的矩阵表示为

$$\mathbf{g}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_k & \mathbf{x}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{f}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k & \mathbf{Y}_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \text{SE}(3) \quad (13)$$

$\mathbf{g}_k$  表示刚体在  $t_k$  时刻位形的李群元素, 其中  $\mathbf{R}_k$  表示  $t_k$  时刻在体坐标系  $o-e_1 e_2 e_3$  相对于惯性坐标系  $O-E_1 E_2 E_3$  的旋转矩阵,  $\mathbf{x}_k$  表示  $t_k$  时刻刚体的质心位置矢量,  $\mathbf{f}_k$  表示从  $t_k$  时刻到  $t_{k+1}$  时刻刚体

位形的李群元素变化量, 其中  $\mathbf{F}_k$  表示从  $t_k$  时刻到  $t_{k+1}$  时刻刚体旋转矩阵  $\mathbf{R}_k$  的变化量,  $\mathbf{Y}_k$  表示从  $t_k$  时刻到  $t_{k+1}$  时刻刚体在体坐标系  $o-e_1 e_2 e_3$  下的质心位置矢量的变化量<sup>[8]</sup>. 根据式(9)可以得到系统刚体位形迭代公式

$$\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{F}_k, \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{R}_k \mathbf{Y}_k \quad (14)$$

计算刚体系统的动能项  $T(\mathbf{f}_k)$ , 系统的总动能等于系统的平动动能和转动动能之和  $T_{K+1/2}$ , 采取中心差分格式可得到近似的  $t_{k+1}$  时刻刚体的角速度<sup>[8]</sup>

$$S(\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}) \approx \frac{1}{h} \mathbf{R}_k^T (\mathbf{R}_{k+1} - \mathbf{R}_k) = \frac{1}{h} (\mathbf{F}_k - \mathbf{I}_{3 \times 3}) \quad (15)$$

其中  $S(\boldsymbol{\omega}_{k+1/2})$  为李代数空间  $\mathfrak{so}(3)$  元素, 该李代数空间与欧氏空间  $\mathbb{R}^3$ , 通过映射  $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ ,  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$   $S(\boldsymbol{\omega}) \in \mathfrak{so}(3)$  来确定<sup>[10]</sup>

$$S(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \forall \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (16)$$

因此得到自由单刚体系统在  $[t_k, t_{k+1})$  区间的总动能为

$$T(\mathbf{f}_k) = \frac{1}{h} \text{tr}[(\mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{F}_k) \mathbf{J}_d] + \frac{m}{2h} \mathbf{Y}_k^T \mathbf{Y}_k \quad (17)$$

其中  $m_i$  表示刚体的质量,  $\mathbf{J}_d$  表示刚体的非标准转动惯量矩阵. 它与标准转动惯量矩阵  $\mathbf{J}$  的关系满足  $\mathbf{J}_d = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{J}) \mathbf{I}_{3 \times 3} - \mathbf{J}$ , “tr”表示矩阵的迹.

根据离散 Hamilton 变分原理与离散 Legendre 变换, 得到自由单刚体系统一般格式李群变分积分公式<sup>[8]</sup>

$$S(h\boldsymbol{\Pi}_k + \frac{h^2}{2} \mathbf{M}_k) = \mathbf{F}_k \mathbf{J}_d - \mathbf{J}_d \mathbf{F}_k^T \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\Pi}_{k+1} = \mathbf{F}_k^T \boldsymbol{\Pi}_k + \frac{h}{2} \mathbf{F}_k^T \mathbf{M}_k + \frac{h}{2} \mathbf{M}_{k+1} \quad (19)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{m} \boldsymbol{\gamma}_k - \frac{h^2}{2m} \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\gamma}_{k+1} = \boldsymbol{\gamma}_k - \frac{h}{2} \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{x}_k} - \frac{h}{2} \frac{\partial U_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \quad (21)$$

其中  $\boldsymbol{\Pi}_k, \boldsymbol{\Pi}_{k+1}$  分别为  $t_k$  和  $t_{k+1}$  时刻刚体的角动量,  $\boldsymbol{\gamma}_k, \boldsymbol{\gamma}_{k+1}$  分别代表  $t_k$  和  $t_{k+1}$  时刻刚体在惯性坐标系中的线动量. 上式中广义力矩  $S(\mathbf{M}_k)$  的定义为<sup>[28]</sup>:

$$S(\mathbf{M}_k) = \left[ \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{R}_k} \right]^T \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_k^T \left[ \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{R}_k} \right] \quad (22)$$



在一般格式的李群变分积分算法中式(18)是隐式方程可以使用指数映射或者 Cayley 映射进行求解<sup>[28]</sup>.

### 2.3 李群上的 Hamel 变分积分

Hamel 离散格式的主要思想是直接对李代数元素进行变分,并非先用李群元素近似表示李代数元素后变分.其势能项、李群元素迭代格式与一般李群变分积分算法一致.在 Hamilton 最小作用量原理中要求变分算子  $\delta$  与时间微分算子  $d$  满足对易关系

$$[\delta, d] = 0 \quad (23)$$

在  $SO(3)$  群上的变分算子和时间微分算子也要满足对易关系

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}_k = \frac{d}{dt} \bigg|_{t=0} \mathbf{R}'_k = \mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\omega}_k) \quad (24)$$

$$\delta \mathbf{R}_k = \frac{d}{d\epsilon} \bigg|_{\epsilon=0} \mathbf{R}_k^\epsilon = \mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\eta}_k) \quad (25)$$

其中  $S(\boldsymbol{\omega}_k), S(\boldsymbol{\eta}_k) \in \mathfrak{so}(3)$ , 将式(24)和式(25)代入式中可得

$$\begin{aligned} \delta \frac{d}{dt} \mathbf{R}_k &= \delta [\mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\omega}_k)] \\ &= \mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\eta}_k) S(\boldsymbol{\omega}_k) + \mathbf{R}_k \delta S(\boldsymbol{\omega}_k), \\ \frac{d}{dt} \delta \mathbf{R}_k &= \frac{d}{dt} [\mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\eta}_k)] \\ &= \mathbf{R}_k S(\boldsymbol{\omega}_k) S(\boldsymbol{\eta}_k) + \mathbf{R}_k \frac{d}{dt} S(\boldsymbol{\eta}_k) \end{aligned} \quad (26)$$

我们得到  $SO(3)$  群上的变分算子与微分算子满足对易关系的充分条件

$$\delta S(\boldsymbol{\omega}_k) - \frac{d}{dt} S(\boldsymbol{\eta}_k) = [S(\boldsymbol{\omega}_k), S(\boldsymbol{\eta}_k)] \quad (27)$$

由于李代数空间与欧氏空间同构,可以在三维欧氏空间中重新表示式(27)

$$\delta \boldsymbol{\omega}_k - \dot{\boldsymbol{\eta}}_k = [\boldsymbol{\omega}_k, \boldsymbol{\eta}_k] \quad (28)$$

即可得到三维欧氏空间上角速度的变分公式.选取中心差分格式可得到近似的  $t_{k+1/2}$  时刻刚体的角速度和线速度的变分形式分别为<sup>[23]</sup>

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\omega}_{k+1/2} &= \dot{\boldsymbol{\eta}}_{k+1/2} + [\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \boldsymbol{\eta}_{k+1/2}] \\ &= \frac{\boldsymbol{\eta}_{k+1} - \boldsymbol{\eta}_k}{h} + \left[ \boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \frac{\boldsymbol{\eta}_k + \boldsymbol{\eta}_{k+1}}{2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} = \frac{\delta \mathbf{x}_{k+1} - \delta \mathbf{x}_k}{h} \quad (30)$$

因此得到自由单刚体系统在  $[t_k, t_{k+1})$  区间的总动能为

$$T(\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2}^\top \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2} +$$

$$\frac{m}{2} \left( \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h} \right)^\top \left( \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h} \right) \quad (31)$$

根据离散 Hamilton 变分原理与离散 Legendre 变换,得到自由单刚体系统 Hamel 变分积分公式<sup>[29]</sup>

$$\mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_k = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2} + \frac{h}{2} [\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2}] - \frac{h}{2} \mathbf{M}_n \quad (32)$$

$$m \dot{\mathbf{x}}_k = m \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} + \frac{h}{2} \frac{\partial U_k}{\partial \mathbf{x}_k} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1} &= \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2} - \\ &\frac{h}{2} [\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}_{k+1/2}] + \frac{h}{2} \mathbf{M}_{k+1} \end{aligned} \quad (34)$$

$$m \dot{\mathbf{x}}_{k+1} = m \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2} - \frac{h}{2} \frac{\partial U_{k+1}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \quad (35)$$

Hamel 变分积分算法在一步时间积分区间  $[t_k, t_{k+1}]$  的迭代过程为:首先根据  $t_k$  时刻的  $\boldsymbol{\omega}_k, \dot{\mathbf{x}}_k$  求解式(32)和式(33)中的  $\boldsymbol{\omega}_{k+1/2}, \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2}$ ; 然后根据李群元素的迭代公式  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{R}_k \exp_{SO(3)}(h \boldsymbol{\omega}_{k+1/2})$ ,  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \dot{\mathbf{x}}_{k+1/2}$  计算得到  $\mathbf{R}_{k+1}, \mathbf{x}_{k+1}$ ; 最后求解式(34)和式(35)中  $t_{k+1}$  时刻的  $\boldsymbol{\omega}_{k+1}, \dot{\mathbf{x}}_{k+1}$ . 其中  $\exp_{so(3)}$  是  $SO(3)$  群上定义的指数映射.

### 3 数值计算与分析

如图4所示,系统由一个3D摆连接到可以在水平面移动的小推车组成.

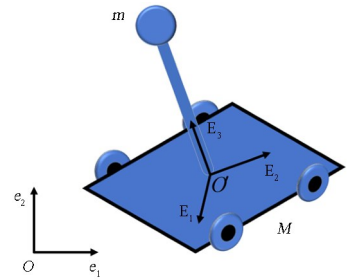


图4 3D车摆模型示意图

Fig. 4 Schematic view of a 3D car-pendulum

为了简化模型,暂不考虑车轮的非完整约束情况.使用  $x \in \mathbb{R}$  表示小车在参考坐标系中沿  $e_1$  方向的位移,  $y \in \mathbb{R}$  表示小车在参考坐标系中沿  $e_2$  方向的位移,  $\mathbf{R} \in SO(3)$  表示从体坐标系  $O'-E_1E_2E_3$  到惯性参考坐标系的旋转矩阵,  $\boldsymbol{\omega}$  表示摆在体坐标系下的角速度,  $\boldsymbol{\rho}$  表示在体坐标系下摆的质心到摆质量元的矢量,  $\boldsymbol{\rho}_c$  表示体坐标系下摆的质心位置矢量,  $m$  表示摆的质量,  $M$  表示车的质量,  $g$  是重力加速度.系统的位形空间是  $SO(3) \times \mathbb{R}^2$ , 摆的动能可以表示为

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \int \|\dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c)\|^2 dm(\boldsymbol{\rho}) \\
&= \frac{1}{2} \int \{ \text{tr}[S(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c)(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c)^T S(\boldsymbol{\omega})^T] + \\
&\quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}e_1^T \mathbf{R}S(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c) + \\
&\quad 2\dot{y}e_2^T \mathbf{R}S(\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c) \} dm(\boldsymbol{\rho}) \quad (36)
\end{aligned}$$

摆的非标准转动惯量  $\mathbf{J}_d = \int (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c)(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}_c)^T dm$ ,

摆的动能可以表示为

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} \text{tr}[S(\boldsymbol{\omega})\mathbf{J}_d S(\boldsymbol{\omega})^T] + \\
&\quad m\dot{x}e_1^T \mathbf{R}S(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}_c + m\dot{y}e_2^T \mathbf{R}S(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\rho}_c \quad (37)
\end{aligned}$$

3D 车摆系统的 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega}, \dot{x}, \dot{y}) &= \frac{1}{2} (m + M) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \\
&\quad \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + m\dot{x}e_1^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_c) + \\
&\quad m\dot{y}e_2^T \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_c) + mge_3^T \mathbf{R}\boldsymbol{\rho}_c \quad (38)
\end{aligned}$$

通过 Legendre 变换可以得到正则动量为<sup>[8]</sup>

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_\omega \\ p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & m\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^T \mathbf{e}_1 & m\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^T \mathbf{e}_2 \\ (m\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^T \mathbf{e}_1)^T & M+m & 0 \\ (m\dot{\boldsymbol{\rho}}_c^T \mathbf{e}_2)^T & 0 & M+m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (39)$$

设小车和摆的质量  $M=m=1$  kg, 体坐标系下质心位置矢量  $\boldsymbol{\rho}_c = [0.25 \ 0.25 \ 1]^T m$ , 转动惯

$$\text{量 } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1.1025 & -0.0625 & -0.2500 \\ -0.0625 & 1.1025 & -0.2500 \\ -0.2500 & -0.2500 & 0.1650 \end{bmatrix} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

D 车摆系统的初始状态, 小车的位置  $x_0 = -0.125$  m,  $y_0 = -0.0125$  m, 小车的速度  $\dot{x}_0 = 0.525$  m/s,  $\dot{y}_0 =$

$$-0.0125 \text{ m/s}, \text{ 摆的姿态 } \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 摆的}$$

角速度  $\boldsymbol{\omega}_0 = [0.1 \ 0.2 \ 5.0]^T \text{ rad/s}$ . 采用上述一般格式的李群变分积分分子和 Hamel 变分积分分子对 3D 车摆系统使用 Matlab 进行仿真计算, 仿真步长为  $5 \times 10^{-3}$  s, 仿真总时间为 50 s.

图 5 和图 6 是使用 Hamel 变分积分算法计算得到的车与摆的质心运动轨迹, 其与文献[6]计算得到的结果是一致的, 可以说明 Hamel 变分积分方法计算 3D 车一摆系统的正确性. 图 7 和图 8 描述了车与摆质心位置的分量随时间变化情况, 可以看出车与摆做周期运动, 与图 5 和图 6 的质心轨迹

图相对应. 从图 9 和图 10 可以明显看出两种李群算法在计算 3D 车一摆系统时, 对系统的物理特性 (能量) 保持得都很好, 但是 Hamel 变分积分分子相较于一般格式的李群变分积分分子更加精准. 从图 11 可知两种李群变分积分方法都能够很好地保持李群结构, 确保每次更新的姿态元素都在  $\text{SO}(3)$  群上.

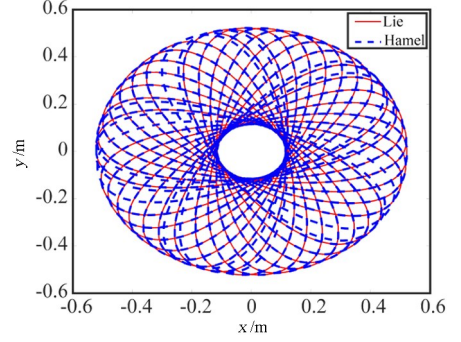


图 5 车的质心轨迹  
Fig. 5 Trajectory of the car's mass center

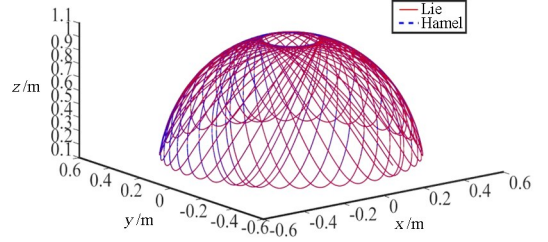


图 6 摆的质心轨迹  
Fig. 6 Trajectory of the pendulum's mass center

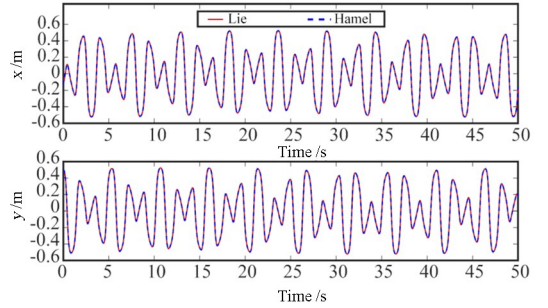


图 7 车的质心位移  
Fig. 7 Displacement of the car's center of mass

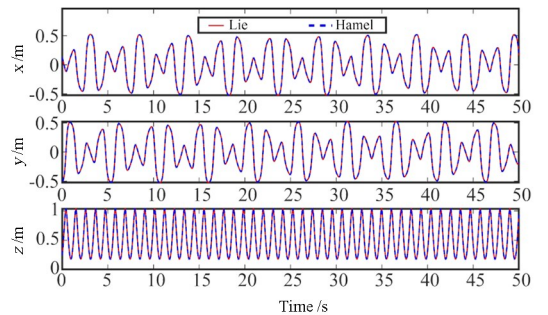


图 8 摆的质心位移  
Fig. 8 Displacement of the pendulum's center of mass

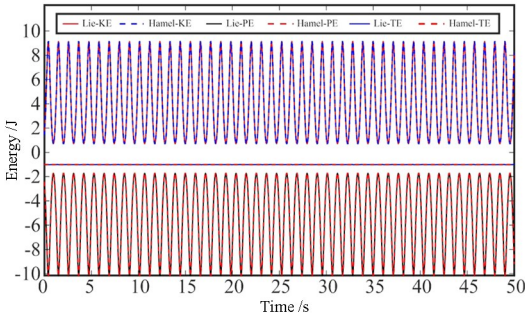


图 9 3D 车摆的能量变化曲线对比图  
Fig. 9 Comparison of the 3D car-pendulum system's energy variations

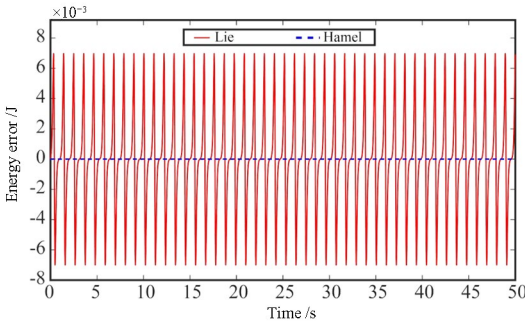


图 10 3D 车摆的能量误差曲线对比图  
Fig. 10 Comparison of the 3D car-pendulum system's energy error curves

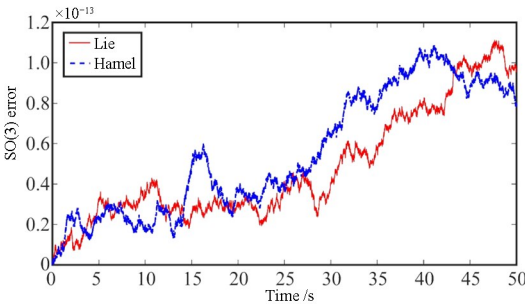


图 11 3D 车摆正交性误差曲线对比图  
Fig. 11 Comparison of the 3D car-pendulum system's orthogonality error curves

4 结论

本文使用李群建模描述刚体的位形,由离散变分原理得到了李群变分积分分子和 Hamel 变分积分分子.通过算例对比分析发现:一般格式的李群变分积分分子和 Hamel 变分积分分子具有保能量、保结构的性质,但是 Hamel 变分积分分子的系统能量保持特性优于一般格式的李群变分积分分子.由于李群变分积分分子具有优越的性能,后续可进一步在模拟小行星长时间运动演化问题中应用该算法.

参考文献

[1] 李益群. 谱变分积分分子与刚体几何控制[D]. 哈尔

滨: 哈尔滨工业大学, 2017.  
LI Y Q. Spectral variational integrators and geometric control of rigid bodies[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017. (in Chinese)  
[2] MARSDEN J E, WEST M. Discrete mechanics and variational integrators [J]. Acta Numerica, 2001, 10: 357—514.  
[3] TERZE Z, MÜLLER A, ZLATAR D. Singularity-free time integration of rotational quaternions using non-redundant ordinary differential equations [J]. Multibody System Dynamics, 2016, 38(3): 201—225.  
[4] HALL J, LEOK M. Lie group spectral variational integrators [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2017, 17(1): 199—257.  
[5] HEMINGWAY E G, O'REILLY O M. Perspectives on Euler angle singularities, gimbal lock, and the orthogonality of applied forces and applied moments [J]. Multibody System Dynamics, 2018, 44(1): 31—56.  
[6] BHAT S P, BERNSTEIN D S. A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon [J]. Systems & Control Letters, 2000, 39(1): 63—70.  
[7] BUTCHER J C. A history of Runge-Kutta methods [J]. Applied Numerical Mathematics, 1996, 20(3): 247—260.  
[8] LEE T. Computational geometric mechanics and control of rigid bodies [D]. Ann Arbor, MI, USA: University of Michigan, 2008.  
[9] BALL K R, ZENKOV D. Hamel's formalism and variational integrators [M]. CHANG D H, HOLM D D, PATRICK G, et al. Geometry, Mechanics, and Dynamics. New York: Springer, 2023.  
[10] 李亚男. 基于李群的多体系统动力学仿真[D]. 青岛: 青岛大学, 2019.  
LI Y N. Dynamic simulation of multibody system based on Lie group [D]. Qingdao: Qingdao University, 2019. (in Chinese)  
[11] LEE T, LEOK M, MCCLAMROCH N H. Geometric numerical integration for complex dynamics of tethered spacecraft [C]//Proceedings of the 2011 American Control Conference. New York: IEEE, 2011: 1885—1891.  
[12] TRAN K, LEOK M. Lie group variational collision integrators for a class of hybrid systems [EB/OL]. (2023-10-23)[2024-12-14]. <https://arxiv.org/abs/>

- 2310.15356v2.
- [13] LEE T, LEOK M, MCCLAMROCH N H. Nonlinear robust tracking control of a quadrotor UAV on  $SE(3)$  [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(2): 391–408.
- [14] SCHUBERT M, SATO MARTÍN DE ALMAGRO R T, NACHBAGAUER K, et al. Discrete adjoint method for variational integration of constrained ODEs and its application to optimal control of geometrically exact beam dynamics [J]. *Multibody System Dynamics*, 2024, 60(3): 447–474.
- [15] DURUISSEAU V, DUONG T, LEOK M, et al. Lie group forced variational integrator networks for learning and control of robot systems [C]//5th Annual Conference on Learning for Dynamics & Control. San Diego, CA, USA: Journal Machine Learning Research, 2023.
- [16] SACCON A. Midpoint rule for variational integrators on Lie groups [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 78(11): 1345–1364.
- [17] LEE J, LIU C K, PARK F C, et al. A linear-time variational integrator for multibody systems [C]//Algorithmic Foundations of Robotics XII: Proceedings of the Twelfth Workshop on the Algorithmic Foundations of Robotics. Cham: Springer, 2020: 352–367.
- [18] SHARMA H, PATIL M, WOOLSEY C. Energy-preserving, adaptive time-step lie group variational integrators for rigid body motion in  $SE(3)$  [C]//2019 IEEE 58th Conference on Decision and Control (CDC). New York: IEEE, 2019: 8079–8084.
- [19] DURUISSEAU V, LEOK M. Time-adaptive Lagrangian variational integrators for accelerated optimization on manifolds [EB/OL]. (2022-1-11) [2024-12-14]. <https://arxiv.org/abs/2201.03774v3>.
- [20] LEITZ T, LEYENDECKER S. Galerkin Lie-group variational integrators based on unit quaternion interpolation [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 338: 333–361.
- [21] BLOCH A M, MARSDEN J E, ZENKOV D V. Quasivelocities and symmetries in non-holonomic systems [J]. *Dynamical Systems*, 2009, 24(2): 187–222.
- [22] SHI D H, BERCHENKO-KOGAN Y, ZENKOV D V, et al. Hamel's formalism for infinite-dimensional mechanical systems [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2017, 27(1): 241–283.
- [23] GAO S, SHI D H, ZENKOV D V. Discrete Hamiltonian variational mechanics and Hamel's integrators [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2023, 33(2): 26.
- [24] 沈伟清, 王本亮, 史东华. 开链机械臂的反馈 Hamel 变分积分分子 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(3): 8–14.
- SHEN W Q, WANG B L, SHI D H. Feedback Hamel's variational integrators of open-chain manipulators [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(3): 8–14. (in Chinese)
- [25] 安志朋. Hamel 场变分积分分子及其应用 [D]. 北京: 北京理工大学, 2020.
- AN Z P. The field theoretic Hamel's variational integrator and its application [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2020. (in Chinese)
- [26] 王亮. 几何精确梁的 Hamel 场变分积分分子 [D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- WANG L. Hamel's field variational integrator of geometrically exact beam [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2016. (in Chinese)
- [27] 张祺, 黄彬, 史东华. 基于 Hamel 形式的柔性集群编队围捕 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(3): 89–98.
- ZHANG Q, HUANG B, SHI D H. Target-capturing of swarm using flexible formation based on Hamel's formalism [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(3): 89–98. (in Chinese)
- [28] 黄子恒, 陈菊, 张志娟, 等. 多刚体动力学仿真的李群变分积分算法 [J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(1): 8–17.
- HUANG Z H, CHEN J, ZHANG Z J, et al. Lie group variational integration for multirigid body system dynamic simulation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(1): 8–17. (in Chinese)
- [29] 黄子恒. 基于李群的多体系统动力学建模与计算 [D]. 北京: 北京理工大学, 2021.
- HUANG Z H. Dynamic modeling and computation of multibody systems based on Lie group [D]. Beijing: Beijing Institute of Technology, 2021. (in Chinese)