第 23 卷第 2 期
2025 年 2 月

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 23 No. 2
Feb. 2025

文章编号:1672-6553-2025-23(2)-047-008

DOI:10.6052/1672-6553-2024-071

一种高超声速飞行器上升段燃耗最优控制方法*

林裕杰　韩艳铧†

(南京航空航天大学 航天学院,南京　211106)

摘要　针对高超声速飞行器(hypersonic vehicles,HSV)上升段燃耗最优控制问题,基于间接法,引入了三角正则化方法.该方法弥补了间接法的不足:对复杂最优控制问题的一阶最优必要条件的推导烦琐,奇异最优控制求解难,且控制不平滑.针对间接法转化的两点边值问题中,协态变量初值猜测难以给出而使求解易发散的问题,引入并改进了延拓法.其用简化问题的解作为延拓初值,通过求解一系列两点边值问题,逐步逼近到原复杂问题.计算表明,上述方法能够可靠求解复杂模型下 HSV 上升段燃耗最优控制问题.

关键词　高超声速飞行器,　上升段,　最优控制,　三角正则化法,　延拓法

中图分类号:V249　　**文献标志码**:A

A Fuel-Optimal Control Method for Hypersonic Vehicles in the Ascending Stage*

Lin Yujie　Han Yanhua†

(College of Astronautics, Nanjing University of Astronautic and Aeronautic, Nanjing　211106, China)

Abstract　Aiming at the problem of fuel-optimal control of hypersonic vehicles (HSV) in the ascending stage, a trigonometric regularization method is introduced based on the optimal control indirect method. This method makes up for the shortcoming of the indirect method: The derivation of the first-order optimal necessary condition for complex optimal control problems is cumbersome, singular optimal problem is difficult to solve and the optimal control is unsmooth. Aiming at the problem of divergence due to the improper initial costate variables guess in the two-point boundary value problem (TPBVP) transformed the indirect method, the continuation method is introduced and improved. The method uses the solution of the simplified problem as the initial value of the continuation, and through solving a series of TPBVP, approximates to the solution of the original problems. The simulation results show that through the above methods, the fuel-optimal control problem of HSV in the ascending stage under the complex model can be solved reliably.

Key words　hypersonic vehicles,　ascending stage,　optimal control,　trigonometric regularization method,　continuation method

引言

高超声速飞行器最优控制一直是军事领域研究的热点[1-3],其中上升段的燃耗管理直接影响飞行器航程,因此对燃耗最优问题研究具有重要意义.

直接法[4]和间接法[5]是求解最优控制问题的两大类方法.直接法通过参数化方法将最优控制问题转化为有限维非线性参数寻优问题[6].伪谱法在

2024-04-14 收到第 1 稿,2024-08-05 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(52272369), National Natural Science Foundation of China(52272369).

† 通信作者 E-mail:hanyanhua@nuaa.edu.cn

最优控制中得到了广泛的应用[7]. 梅映雪等[8]提出一种基于 Gauss 伪谱法的分段轨迹优化策略,设计了综合性能指标的 HSV 再入轨迹. 张梦樱[9]研究了高超声速滑翔飞行器多约束、多目标的优化问题,提出并验证了基于伪谱法的多目标轨迹优化问题求解框架. Ngo 等[10]采用直接转录法将飞行轨迹离散化,实现了多约束情况下 HSV 燃耗最优轨迹规划. 直接法中参数寻优的方法多,但是计算量大,且难以保证解的最优性.

间接法基于变分法推导最优控制,然后将问题转化为微分方程两点边值问题. 李惠峰等[11]结合有限差分法和改进牛顿法,求解了 HSV 上升段燃耗最优问题. 乔毅涛等[12]基于 Riccati 方程推导二次型能耗最优的 HSV 控制律,并设计了螺旋俯冲机动轨迹. Morimoto[13]将 HSV 燃耗最优问题分解为上升段控制问题和滑翔段航程最远问题,降低了状态方程的维数,减小了协态变量初值猜测的难度. Murillo[14]应用有限差分法求解了由 HSV 燃耗最优控制问题转化而成的两点边值问题. 间接法计算精度高,具有一阶最优性,但对最优控制一阶必要条件的推导较复杂.

HSV 的燃耗最优控制是飞行器控制的难点. 求解大气飞行器的燃耗最优控制时,容易遇到奇异最优控制. 本文引入了三角正则化法,该方法将有界控制转化为无界控制,用误差控制将最优控制平滑化,能方便推导出关于状态变量和协态变量的最优控制的解析表达式. 为了解决复杂模型两点边值问题迭代初值难以给出的问题,引入并改进延拓法. 本文通过上述两种方法,研究高超声速飞行器上升段燃耗最优控制以获得问题的可靠求解.

1 HSV 燃耗最优控制问题描述

HSV 上升段运动基本发生在纵向平面,且为了简化问题,本文仅在纵向二维平面内研究飞行器的运动. 在当地地理系(如图1)下建立HSV上升段飞行力学方程,该方程如式(1)所示:

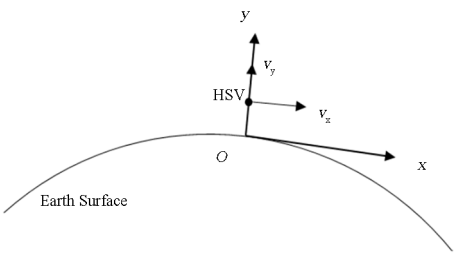

图 1 当地地理系下飞行示意图

Fig. 1 Diagram of flight under the local geodetic coordinate system

$$\begin{cases} \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = -\dfrac{v_x v_y}{R_e + y} + \dfrac{1}{m} u \cos\eta - \dfrac{D\cos\theta}{m} - \dfrac{L\sin\theta}{m} \\ \dot{v}_y = \dfrac{v_x^2}{R_e + y} - \dfrac{\mu}{(R_e + y)^2} + \dfrac{1}{m} u \sin\eta - \dfrac{D\sin\theta}{m} + \dfrac{L\cos\theta}{m} \\ \dot{m} = -\dfrac{u}{I_{sp} g_0} \end{cases} \tag{1}$$

其中 y 为 HSV 飞行高度;v_x、v_y 分别为 HSV 速度矢量在当地水平和竖直方向上的投影分量;m 为 HSV 质量;μ 为地球引力常数;R_e 为地球半径;I_{sp} 为燃料比冲;g_0 为地表重力加速度;u 为发动机推力;η 为推力相对于当地水平方向的夹角;L 和 D 分别为 HSV 所受气动升力、气动阻力;$\theta = \arctan(v_y/v_x)$ 为航迹倾角;$\mu/(R_e + y)^2$ 为重力加速度;$v_x v_y/(R_e + y)$ 为科氏加速度;$v_x^2/(R_e + y)$ 为离心加速度.

气动升、阻力计算公式如下:

$$\begin{cases} L = \dfrac{1}{2} C_L \rho v^2 S_{ref} \\ D = \dfrac{1}{2} C_D \rho v^2 S_{ref} \end{cases} \tag{2}$$

其中 C_L、C_D 分别为升、阻力系数;$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$;S_{ref} 为气动参考面积;ρ 为空气密度,按下式计算:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{y}{H}} \tag{3}$$

其中 ρ_0 为海平面空气密度;H 为标量高度系数[15].

HSV 上升段初末状态为

$$\begin{cases} y(0) = y_0, v_x(0) = v_{x0}, v_y(0) = 0, m(0) = m_0 \\ y(t_f) = y_f, v_x(t_f) = v_f, v_y(t_f) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

发动机推力限幅为

$$0 \leqslant u \leqslant u_{max} \tag{5}$$

用 HSV 上升段燃料消耗表示燃耗最优性能指标:

$$J = m_0 - m(t_f) \tag{6}$$

2 求解 HSV 燃耗最优控制问题

2.1 推导 HSV 最优控制

间接法中,最优控制一般由庞特里亚金极小值原理得出:

$$H(u^*) = \min_u H \tag{7}$$

其中 H 为哈密尔顿函数,u 为控制量;右上角标 *

表示最优值.

对于控制不受限的最优控制问题，控制量可由一阶最优性条件方便得出：

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{8}$$

对于控制幅值受限的 HSV 燃耗最优控制问题，哈密尔顿函数往往可归结为以下形式：

$$H=H_0+S\cdot u \tag{9}$$

其中 H_0 为函数中与控制无关的部分；S 为切换函数. 则由极小值原理，飞行器最优控制为：

$$\begin{cases} u^*=u_{\max} & S<0 \\ 0\leqslant u^*\leqslant u_{\max} & S=0 \\ u^*=0 & S>0 \end{cases} \tag{10}$$

当 S 穿过零点时，控制发生跳变，使状态和协态变量在此处不光滑；当 S 在一时间区间内恒为零时，最优控制为奇异最优控制，一般需要 Legendre-Clebsch 条件来求解，对飞行器而言，其求解过程过于复杂.

三角正则化法[14]用正弦函数表达受幅值限制的控制，将其转化为不受限的三角控制，并引入误差控制，使最优控制平滑化，同时避免奇异最优情况的出现.

三角正则化法将 HSV 控制量表达为：

$$u=\frac{u_{\max}}{2}\sin u_{\text{trig}}+\frac{u_{\max}}{2} \tag{11}$$

其中，u_{trig} 为三角控制量，其取值不受约束.

故问题由求最优推力 u^* 转化为了求最优三角控制 u^*_{trig}. 由于 u_{trig} 不受取值约束，最优三角控制可由式(8)得出，而实际最优推力根据式(11)由最优三角控制还原. 这样求出最优控制的同时保证了其满足幅值约束.

还原出的原最优控制仍会出现跳变，使状态和协态变量不光滑. 故引入误差控制，使控制在原跳变处平滑过渡. 用余弦函数的形式表达误差控制：

$$u_{\text{error}}=\varepsilon\frac{u_{\max}}{2}\cos u_{\text{trig}} \tag{12}$$

其中 ε 为误差系数. ε 越小，误差控制效果越弱，平滑控制更贴合原非平滑的理想控制；反之效果越强，控制过渡更平缓.

将误差控制添加到积分型性能指标的被积函数中[16]. 由于 u_{trig} 取值自由，u_{error} 可能取到负值，故将误差控制项取绝对值后加入性能指标，则式(6)改写为：

$$J=m_0-m_{\text{f}}+\int_0^{t_{\text{f}}}|u_{\text{error}}|\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

于是，经该方法改造的 HSV 燃耗最优控制问题的哈密尔顿函数为：

$$\begin{aligned} H=&|u_{\text{error}}|+\lambda_y v_y+\\ &\lambda_{vx}\left(\frac{1}{m}u\cos\eta-\frac{v_x v_y}{R_{\text{e}}+y}-\frac{D\cos\theta}{m}-\frac{L\sin\theta}{m}\right)+\\ &\lambda_{vy}\left[\frac{v_x^2}{R_{\text{e}}+y}-\frac{\mu}{(R_{\text{e}}+y)^2}+\frac{1}{m}u\sin\eta-\right.\\ &\left.\frac{D\sin\theta}{m}+\frac{L\cos\theta}{m}\right]-\lambda_m\frac{u}{I_{\text{sp}}} \end{aligned} \tag{14}$$

其中 u 和 u_{error} 的表达式分别为式(11)和式(12)；λ_y、λ_{vx}、λ_{vy}、λ_m 分别为四个状态变量对应的协态变量，其动态方程为：

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_y=-\dfrac{\partial H}{\partial y}=-\dfrac{\lambda_{vx}v_x v_y}{(R_{\text{e}}+y)^2}+\dfrac{\lambda_{vy}v_x^2}{(R_{\text{e}}+y)^2}-\\ \quad\dfrac{2\mu\lambda_{vy}}{(R_{\text{e}}+y)^3}-(\lambda_{vx}\cos\theta+\lambda_{vy}\sin\theta)\dfrac{D}{mH}+\\ \quad(\lambda_{vy}\cos\theta-\lambda_{vx}\sin\theta)\dfrac{L}{mH}\\ \dot{\lambda}_{vx}=-\dfrac{\partial H}{\partial v_x}=\dfrac{\lambda_{vx}v_y}{R_{\text{e}}+y}-\dfrac{2\lambda_{vy}v_x}{R_{\text{e}}+y}+\\ \quad\lambda_{vx}\dfrac{C_{\text{D}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}(2v_x^2+v_y^2)}{2mv_x\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}+\lambda_{vy}\dfrac{C_{\text{D}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}v_y}{2m\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}+\\ \quad\lambda_{vx}\dfrac{C_{\text{L}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}v_y}{2m\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}-\lambda_{vy}\dfrac{C_{\text{L}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}(2v_x^2+v_y^2)}{2mv_x\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}\\ \dot{\lambda}_{vy}=-\dfrac{\partial H}{\partial v_y}=-\lambda_y+\dfrac{\lambda_{vx}v_x}{R_{\text{e}}+y}+\\ \quad\lambda_{vx}\dfrac{C_{\text{D}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}v_y}{2m\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}+\lambda_{vy}\dfrac{C_{\text{D}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}(v_x^2+2v_y^2)}{2mv_x\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}+\\ \quad\lambda_{vx}\dfrac{C_{\text{L}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}(v_x^2+2v_y^2)}{2mv_x\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}-\lambda_{vy}\dfrac{C_{\text{L}}\rho_0\mathrm{e}^{-\frac{y}{H}}S_{\text{ref}}v_y}{2m\sqrt{1+\frac{v_y^2}{v_x^2}}}\\ \dot{\lambda}_m=-\dfrac{\partial H}{\partial m}=\dfrac{u}{m^2}(\lambda_{vx}\cos\eta+\lambda_{vy}\sin\eta)-\\ \quad\dfrac{D}{m^2}(\lambda_{vx}\cos\theta+\lambda_{vy}\sin\theta)+\dfrac{L}{m^2}(\lambda_{vy}\cos\theta-\lambda_{vx}\sin\theta) \end{cases} \tag{15}$$

故由一阶最优性条件得最优三角控制为

$$u^*_{\mathrm{TRIG}}=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{\dfrac{\lambda_{vx}\cos\eta+\lambda_{vy}\sin\eta}{m}-\dfrac{\lambda_m}{I_{\mathrm{sp}}}}{\varepsilon}\right)\\ \arctan\left(\dfrac{\dfrac{\lambda_{vx}\cos\eta+\lambda_{vy}\sin\eta}{m}-\dfrac{\lambda_m}{I_{\mathrm{sp}}}}{\varepsilon}\right)+\pi\end{cases}\tag{16}$$

式(14)中绝对值项的存在使得式(16)中 u^*_{TRIG} 取值分为两种情况,而最优三角控制应根据极小值原理从这两项中选取. 当且仅当 $\varepsilon=0$ 时,为奇异最优控制,然而恒有误差系数 $\varepsilon>0$,故经过三角正则化法的处理,求解 u^*_{TRIG} 时奇异最优的情况不会出现. 然后可由式(11)还原得到实际的最优推力 u^*. 值得注意的是,由此还原的最优推力曲线仍可能出现奇异弧,呈现为奇异最优控制.

由极小值原理,最优推力角满足:

$$\begin{cases}\cos\eta=\dfrac{-\lambda_{vx}}{\sqrt{\lambda_{vx}^2+\lambda_{vy}^2}}\\ \sin\eta=\dfrac{-\lambda_{vy}}{\sqrt{\lambda_{vx}^2+\lambda_{vy}^2}}\end{cases}\tag{17}$$

同时,由间接法相关原理,补充两个边界条件:

$$H(t_{\mathrm{f}})=0,\qquad \lambda_m(t_{\mathrm{f}})=-1\tag{18}$$

经过以上处理后,最优控制问题就可以转化为由式(1)~(4)、(15)~(18)构成的光滑非线性微分方程两点边界值问题,其中式(1)和(15)分别为关于状态和协态变量的非线性微分方程,其余为方程中相关变量的计算及边界条件.

2.2 求解 HSV 两点边值问题

求解两点边值问题最常用的方法是有限差分法和数值打靶法,这些方法属于迭代法,求解时需要先给定一个合适的迭代初值. 设置不合理的迭代初值将使求解发散. 延拓法通过引入延拓参数,从已知解的问题,逐步延拓求解至待求的复杂问题[17,18].

HSV 动力学模型中科氏加速度、离心加速度、气动升力、气动阻力四个强非线性项使得状态和协态方程很复杂,显然需要一个合理的初值猜测来求解该两点边值问题. 于是通过忽略这四个非线性项,构成简化 HSV 模型,解析求解得到简化模型问题的解,将该解作为延拓初值,应用延拓法,经过序贯求解一系列关于状态和协态变量的两点边值问题,逼近并求出原复杂飞行器模型的最优控制.

简化 HSV 动力学模型为:

$$\begin{cases}\dot{y}=v_y,\dot{v}_x=\dfrac{u}{m}\cos\eta\\ \dot{v}_y=\dfrac{u}{m}\sin\eta-g,\dot{m}=-\dfrac{u}{I_{\mathrm{sp}}}\end{cases}\tag{19}$$

其协态变量动态方程为:

$$\begin{cases}\dot{\lambda}_y=0\\ \dot{\lambda}_{vx}=0,\dot{\lambda}_{vy}=-\lambda_y\\ \dot{\lambda}_m=\dfrac{u}{m^2}(\lambda_{vx}\cos\eta+\lambda_{vy}\sin\eta)\end{cases}\tag{20}$$

其边界条件满足式(4)、式(18). 最优推力角仍满足式(17).

通过对式(20)进行积分运算,并分析切换函数单调性,可知切换函数单调递增,发动机先以最大推力工作,然后关机,飞行器进行无动力滑行. 于是问题变为对关机时间点和积分常数的求解问题. 具体求解过程由于篇幅限制在此省略. 最后通过求解出的积分常数可解出协态变量曲线,并求得最优推力角,通过积分运算可求得状态变量曲线. 其中协态变量曲线如图 2、图 3 所示.

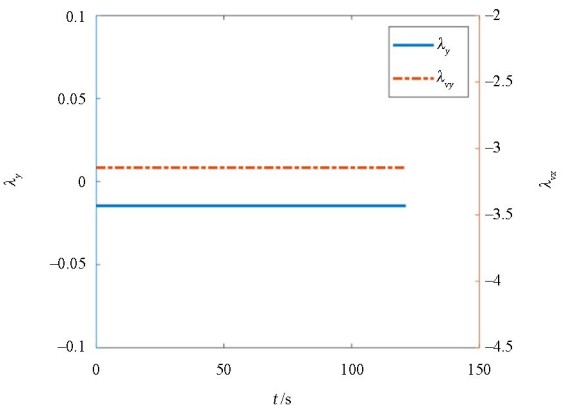

图 2 简化问题的 λ_y、λ_{vx} 曲线

Fig. 2 λ_y、λ_{vx} curves of the simplified problem

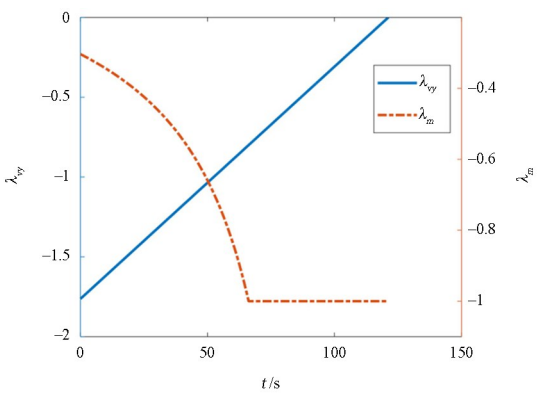

图 3 简化问题的 λ_{vy}、λ_m 曲线

Fig. 3 λ_{vy}、λ_m curves of the simplified problem

传统的延拓法将延拓参数直接乘在非线性项上,延拓时该项被线性地还原,为线性延拓.已有的延拓法或需要对残差函数求偏导[17],或可能遇到解枝折叠点的问题[19],这些方法对强耦合的飞行器模型而言是难以直接运用的.在传统方法基础上,本文提出先将多个参数以函数的形式组合,再乘在非线性项前,进行非线性延拓.它们可构成时延系数 k_{delay},以迟滞某个非线性项的作用时间.延拓结束时,需使 k_{delay} 在整个时间区间内趋近于 1,从而还原非线性项对系统运动方程的影响.

引入延拓参数 k_1、k_2、k_3 和 k_4,分别乘到科氏加速度、离心加速度、气动阻力和气动升力项上,构成线性延拓.本文考虑 HSV 最常见的空射场景,飞行器具有一定的初始水平速度,在初始时刻所受气动升、阻力较大,故用延拓参数 k_5、k_6 组成时延系数 k_{delay},延迟两力的作用时刻,构成非线性延拓,有利于两点边值问题的求解.时延系数表达式如式(21).重力加速度在整个上升段变化较小,无需单独对其进行延拓.因此将原状态变量的微分方程改为式(22).

$$k_{\mathrm{delay}}=1-\mathrm{e}^{-k_5 t-k_6} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\dot{y}=v_y\\ \dot{v}_x=-k_1\dfrac{v_x v_y}{R_{\mathrm{e}}+y}+\dfrac{1}{m}u\cos\eta-\\ \quad k_{\mathrm{delay}}k_3\dfrac{D\cos\theta}{m}-k_{\mathrm{delay}}k_4\dfrac{L\sin\theta}{m}\\ \dot{v}_y=k_2\dfrac{v_x^2}{R_{\mathrm{e}}+y}-\dfrac{\mu}{(R_{\mathrm{e}}+y)^2}+\dfrac{1}{m}u\sin\eta-\\ \quad k_{\mathrm{delay}}k_3\dfrac{D\sin\theta}{m}+k_{\mathrm{delay}}k_4\dfrac{L\cos\theta}{m}\\ \dot{m}=-\dfrac{u}{I_{\mathrm{sp}}}\end{cases} \tag{22}$$

于是以简化模型问题的解作为延拓初值,进行线性和非线性延拓.线性延拓步骤如表 1.

线性延拓完成后,依次对 k_5、k_6 进行延拓,使 k_{delay} 在整个时间区间内保持趋近于 1.值得注意的是,线性延拓的延拓参数应从 0 延拓至 1;而非线性延拓的相关参数在延拓时无统一的方向和区间,但应在延拓完成时,所有非线性项完全得到复原.

延拓开始前,引入的延拓参数使这些非线性项将不对运动方程产生作用,此时方程为简化 HSV 运动方程;所有延拓完成后,所有非线性项均被还原,最后的控制曲线即为 HSV 上升段燃耗最优的解.

表 1　线性延拓步骤

Table 1　Steps of linear continuation method

步骤	操作
1	将延拓参数 $k_i(i=1,2,3,4)$ 分别乘至需要忽略的 4 个非线性项上,如式(22),并令 $i=1$,延拓第一个参数 k_1.
2	求解忽略非线性项后简化模型的最优控制问题.
3	将上一个所求解作为迭代初值,求解 $k_i=k_i+\mathrm{d}k$ 下关于状态和协态变量两点边值问题,$\mathrm{d}k$ 可根据实际问题选取.
4	若 $k_i=1$,则 k_i 所对应项延拓完毕,转到第 5 步;若 $k_i<1$,则返回第 3 步.
5	若 $i=4$,则所有非线性项延拓完成,线性延拓计算结束;若 $i<4$,则 $i=i+1$,延拓下一个非线性项,返回第 3 步.

3　仿真验证

为了验证上述方法的有效性,本节应用 MATLAB 仿真软件,对 HSV 的上升段燃耗最优控制问题进行仿真验证.仿真实验硬件配置为 AMD CPU:Ryzen 7-5 800H、内存 32 GB、主频 3.2 GHz 的笔记本电脑.

仿真入口参数如表 2 所示.

表 2　仿真入口参数

Table 2　Parameters of the simulation

Parameters	Value
$u_{\max}$/N	9.2×10^5
I_{sp}/s	3×10^2
m_0/kg	3×10^4
y_0/m	1×10^4
v_{x0}/(m·s^{-1})	250
y_{f}/m	4×10^4
v_{xf}/m	3.4×10^3

本次飞行器最优控制研究中延拓参数的相关设置如表 3.

表 3　延拓参数的设置

Table 3　Settings of the continuation parameters

Parameters	Interval	Step size	Duration of each step
k_1	0—>1	0.2	Nearly 5.6 s
k_2	0—>1	0.2	Nearly 5.9 s
k_3	0—>1	0.2	Nearly 7.2 s
k_4	0—>1	0.2	Nearly 6.9 s
k_5	1—>10	1	Nearly 5.5 s
k_6	1—>10	1	Nearly 4.2 s

延拓气动升力和气动阻力时,若只采用线性延

拓(即 $k_{\mathrm{delay}}\equiv 1$),则无论 d$k$ 取得如何小(dk 取得越小,延拓循环次数就越多),延拓到一定程度后,总会遇到发散问题,而结合线性和非线性延拓则可以顺利进行.

推力、开关函数、推力角及哈密尔顿函数曲线如图 4～7 所示,其中开关函数和哈密尔顿函数是未经三角正则化法修改的原函数.

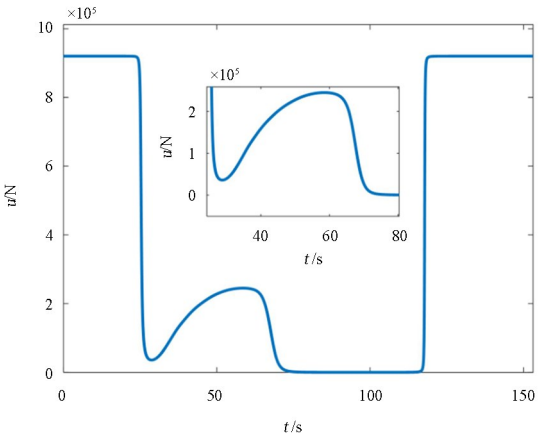

图 4 推力曲线

Fig. 4 The thrust curve

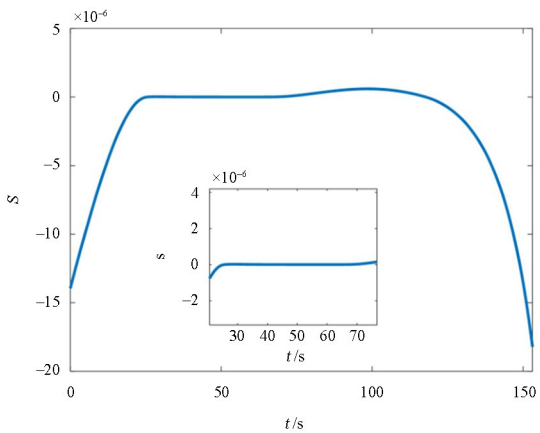

图 5 开关函数曲线

Fig. 5 The switching function

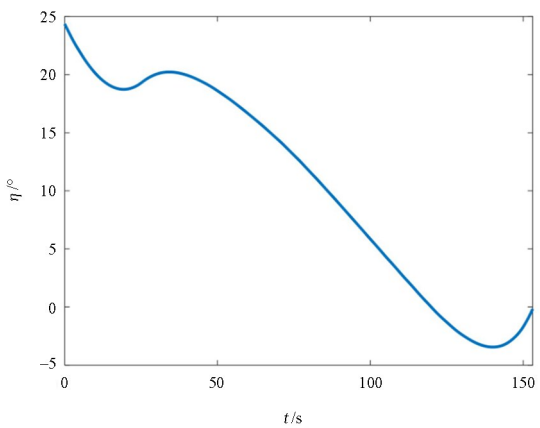

图 6 推力角曲线

Fig. 6 The thrust angle curve

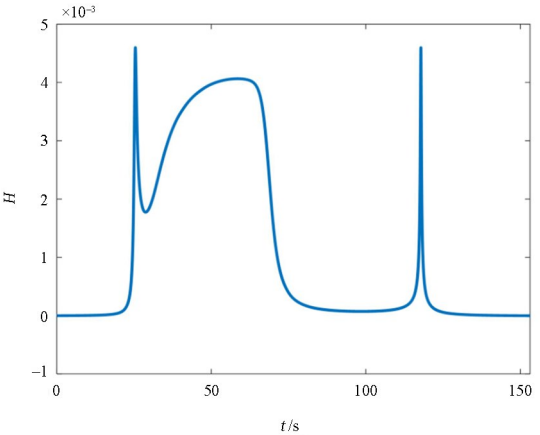

图 7 哈密尔顿函数曲线

Fig. 7 Hamiltonian function

图 4 显示,发动机总体呈现为“开－关－开”的工作方式,且在 29～71 s 区间推力的大小不在其限幅边界上,而是时间的连续函数,为奇异最优弧. 图 5 开关曲线总体呈现为“负－正－负”的趋势,与图 4 推力曲线对比,符合式(5)给出的最优控制逻辑,并且发现在 29～71 s 区间,开关曲线趋近于 0,为奇异最优控制区间,证实了图 4 中该区间的控制为奇异最优. 图 6 中推力角逐渐变小,发动机主要提供水平方向的速度,升力对飞行器提升高度起主要作用,符合对燃耗最省的控制. 图 7 中哈密尔顿函数几乎为 0,符合燃耗最优时该函数的性质,而存在量级的波动是由于误差控制的引入和数值计算误差.

4 结论

本文基于最优控制的间接法,引入三角正则化方法,使最优控制容易推导,且控制实现平滑化. 对于求解最优控制转化的两点边值问题中,协态变量无合理初值猜测而使求解易发散的问题,引入延拓法,并对其进行改进,增加了求解成功的概率. 其通过以简化模型问题的解作为初值,逐步延拓求解至原模型下的最优控制问题. 最后通过对高超声速飞行器上升段燃耗最优问题的分析和仿真计算,验证了上述方法的有效性. 但本文暂未考虑 HSV 在上升段动压、热流密度和过载等过程约束条件. 包含这些过程约束的燃耗最优控制问题将是需要进一步深入研究的问题.

参考文献

[1] 郝雅楠, 祝彬, 关晓红, 等. 世界航天产业发展态

势研究[J]. 国防科技工业，2020(1)：42－45.
HAO Y N，ZHU B，GUAN X H，et al. Research on the development trend of world aerospace industry [J]. Defence Science & Technology Industry，2020(1)：42－45.（in Chinese）

[2] 张远，黄旭，路坤锋，等. 高超声速飞行器控制技术研究进展与展望[J]. 宇航学报，2022，43(7)：866－879.
ZHANG Y，HUANG X，LU K F，et al. Research progress and prospect of the hypersonic flight vehicle control technology [J]. Journal of Astronautics，2022，43(7)：866－879.（in Chinese）

[3] 张军，王玫，赵德安. 高超飞行器的再入非线性鲁棒控制[J]. 动力学与控制学报，2011，9(1)：91－96.
ZHANG J，WANG M，ZHAO D A. Re-entry nonlinear robust control law for hypersonic vehicles [J]. Journal of Dynamics and Control，2011，9(1)：91－96.（in Chinese）

[4] 宝音贺西，印明威. 敏捷卫星时间最优姿态机动研究综述[J]. 动力学与控制学报，2020，18(4)：1－11.
BAO Y，YIN M W. Review on time-optimal reorientation of agile satellites [J]. Journal of Dynamics and Control，2020，18(4)：1－11.（in Chinese）

[5] SHIRAZI A，CEBERIO J，LOZANO J A. Spacecraft trajectory optimization：a review of models，objectives，approaches and solutions [J]. Progress in Aerospace Sciences，2018，102：76－98.

[6] 崔乃刚，郭冬子，李坤原，等. 飞行器轨迹优化数值解法综述[J]. 战术导弹技术，2020(5)：37－51.
CUI N G，GUO D Z，LI K Y，et al. A survey of numerical methods for aircraft trajectory optimization [J]. Tactical Missile Technology，2020(5)：37－51.（in Chinese）

[7] 石青鑫，戈新生. CG 伪谱法在欠驱动航天器姿态机动最优控制中的应用[J]. 动力学与控制学报，2018，16(2)：171－179.
SHI Q X，GE X S. Applications of CG pseudospectral method to attitude optimal control of underactuated spacecraft [J]. Journal of Dynamics and Control，2018，16(2)：171－179.（in Chinese）

[8] 梅映雪，冯玥，王容顺，等. 高超声速飞行器多约束再入轨迹快速优化[J]. 宇航学报，2019，40(7)：758－767.
MEI Y X，FENG Y，WANG R S，et al. Fast optimization of reentry trajectory for hypersonic vehicles with multiple constraints [J]. Journal of Astronautics，2019，40(7)：758－767.（in Chinese）

[9] 张梦樱. 复杂约束条件下高超声速飞行器轨迹优化方法研究[D]. 长沙：国防科学技术大学，2014.
ZHANG M Y. Study on trajectory optimization for hypersonic vehicle with complex constraints [D]. Changsha：National University of Defense Technology，2014.（in Chinese）

[10] NGO A D. A fuel-optimal trajectory for a constrained hypersonic vehicle using a direct transcription method [C]//2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings. New York：IEEE，2004：2704－2709.

[11] 李惠峰，李昭莹. 高超声速飞行器上升段最优制导间接法研究[J]. 宇航学报，2011，32(2)：297－302.
LI H F，LI Z Y. Indirect method of optimal ascent guidance for hypersonic vehicle [J]. Journal of Astronautics，2011，32(2)：297－302.（in Chinese）

[12] 乔毅涛，耿飞龙，张新，等. 基于最优控制的高超螺旋俯冲轨迹设计[J]. 飞控与探测，2021，4(4)：49－58.
QIAO Y T，GENG F L，ZHANG X，et al. Supersonic vehicle spiral dive trajectory design based on optimal control [J]. Flight Control & Detection，2021，4(4)：49－58.（in Chinese）

[13] MORIMOTO H，CHUANG J. Minimum-fuel trajectory along entire flight profile for a hypersonic vehicle with constraint [C]//Guidance，Navigation，and Control Conference and Exhibit. Reston，Virginia：AIAA，1998.

[14] MURILLO O，LU P. Fast ascent trajectory optimization for hypersonic air-breathing vehicles [C]//AIAA Guidance，Navigation，and Control Conference. Reston，Virginia：AIAA，2010.

[15] MALL K，TAHERI E. Unified trigonometrization method for solving optimal control problems in atmospheric flight mechanics [C]//AIAA Scitech 2020 Forum. Reston，Virginia：AIAA，2020：0022.

[16] MALL K. Advancing optimal control theory using trigonometry for solving complex aerospace problems [D]. West Lafayette，IN，USA：Purdue University，2018.

[17] ALLGOWER E L，GEORG K. Introduction to numerical continuation methods [M]. Philadelphia，PA，USA：Society for Industrial and Applied Mathematics，2003.

[18] MANSELL J R，GRANT M J. Adaptive continuation strategy for indirect hypersonic trajectory optimization [J]. Journal of Spacecraft and Rockets，2018，55(4)：818－828.

[19] 杨忠华，朱海龙，沈建. 结合多重打靶法的拟弧长延拓方法[J]. 上海师范大学学报(自然科学版)，2007，36(5)：5－9.

YANG Z H，ZHU H L，SHEN J. Pseudo arclength continuation method for multiple shooting [J]. Journal of Shanghai Normal University (Natural Sciences)，2007，36(5)：5－9. (in Chinese)