

索末菲效应对自同步系统的影响分析^{*}

甘子川 丁川 王笑[†] 宋汉文

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

摘要 单自由度二转子系统作为最经典的自同步系统,广泛应用于工程领域. 本文利用 Lagrange 方程建立了单自由度二转子系统动力学模型,并基于动力学模型建立了 MATLAB/Simulink 仿真模型. 首先对参数完全对称的系统进行了数值仿真,并分析了对称情况下的索末菲效应. 然后,通过在仿真模型中选取不同参数对系统施加扰动,研究了不同参数下的自同步现象,考察了系统受到扰动后的稳定性和恢复自同步的能力. 最后,对仿真中出现的自同步现象进行了分类,同时给出了系统恢复自同步的能力与给定的参数之间的关系. 结果表明,选取不同参数的情况下,系统的自同步现象可分为三类:转子工作在系统近谐振区时的同相位同步、转子工作在系统远谐振区时的反相位同步两种稳定自同步,和在转子工作在系统剧烈谐振区受到扰动后响应呈现随机性的不稳定同步;当转子工作在系统近谐振区时,同步恢复能力最强. 仿真结论可为更复杂振动系统的自同步现象研究提供参考.

关键词 索末菲效应, 自同步, 双转子系统, 振动系统, 稳定性

中图分类号: TH113

文献标志码: A

Research on the Influence of Sommerfeld Effect on Self-Synchronous Systems^{*}

Gan Zichuan Ding Chuan Wang Xiao[†] Song Hanwen

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract The single-degree-of-freedom two-rotor system, as the most classical self-synchronous system, is widely used in engineering. In this paper, a dynamics model of the single-degree-of-freedom two-rotor system is established using Lagrange's equation, and a MATLAB/Simulink simulation model is constructed based on the dynamics model. Firstly, a numerical simulation is carried out with completely symmetric system parameters to analyze the Sommerfeld effect of the system. Then, by applying disturbances to the system with different sets of system parameters in the numerical simulation, the self-synchronization phenomenon under different system parameters is studied, system stability after disturbance is investigated, and the ability of the system to recover self-synchronization is evaluated. Finally, the self-synchronization phenomena appearing in the simulation were classified, and how the system parameters will affect the system's synchronization recovery capability is also given. The results of numerical simulation and analysis show that, with different system parameters, the self-synchronization phenomena can be classified into three categories: stable self-synchronization with in-phase synchronization in the near-resonant region and anti-phase synchronization in the far resonant region, as well as unstable self-synchronization with randomness response after being disturbance when working in the violent resonance region of the system. The result also shows the system's self-synchronization capability is strongest when the rotor is operated in the near-resonance region of the system. The results of this study can

provide a reference for the study of self-synchronization phenomena in more complex vibration systems.

Key words Sommerfeld effect, self-synchronization, rotor system, vibration system, stability

引言

在工程技术领域,许多大型机械设备需要通过多个动力源进行驱动,这些动力源包括交流电机、直流电机等^[1].这些动力源的动力特性各不相同,但所提供的动力都是有限的,称为非理想原动机.在实际工程应用中,一些机械装置要求这些动力源协调运作,如大型龙门吊在轨道上的移动或大型船闸的开闭需要由多个电机驱动进行.为保障这些设备的安全运行并延长使用寿命,各个动力源需要保持相同或固定比例的转速协调运行^[2].而当两台甚至多台电动机安装在振动系统上时,电动机会自发地同步旋转,这种现象称为自同步.

从 Huygens 发现^[3]自同步现象开始,之后自同步现象引起了国内外众多研究者的关注. Blekham 等^[4-6]最早将建立的直接运动分离方法运用在自同步的研究中,并对自同步给出一般性定义和自同步的稳定性条件.而国内由闻邦椿院士^[7-9]最早给出自同步的分类和一般性定义,之后对多电机多自由度自同步问题进行了相应的研究.

Lopes 等^[10]研究了耦合系统中的完全同步和延迟同步并进行了分类讨论. Kawamura 等^[11]通过改变湍流强度,研究了 Strouhal 数的改变对于交叉水流中圆柱体同步振动的影响. Czołczynski 等^[12]研究了悬挂在弹性结构上的自激振荡器的自同步现象. Barrón 等^[13]采用有限差分法对自激弹性梁的动力特性和自同步现象进行了数值研究.

在国内,马米花等^[14]研究了 Van der Pol 自激或受迫振动系统同步时间与反馈增益之间的关系,用多尺度法得到了振动系统同步时间关于反馈增益的分析表达式.赵春雨等^[15]探索了振动系统中两个不相同耦合电机的自同步,两台电机的转速工作在振动系统的非共振区域,因此没有讨论靠近共振时的自同步现象.邹敏等^[16]使用传统的小参数方法和庞加莱方法研究了双频双电机驱动振动系统的自同步,尽管两台电机的两个频率不同,但忽略了两台电机功率有限的影响.李凌轩等^[17]通过实验研究了振动系统工作在远离系统共振频率时

两个电机的时间-频率同步.汤红吉等^[18]研究了混沌 Lur'e 系统的滞后同步问题,得到了以线性矩阵不等式形式表达下的混沌 Lur'e 系统滞后同步的判据.而当电机驱动机械系统接近共振区时,系统振动加大,需要电机提供足够的动力才能达到系统的共振点.当电机提供的动力不足以使系统实现共振时,系统激振频率将直接由共振前跳跃至共振后,而不会出现系统共振,出现的这种非线性跳跃现象一般称为索末菲(Sommerfeld)效应^[19,20].

目前关于自同步的相关研究中在理论分析方面大多使用小参数法或直接运动分离方法求解系统响应,关注电机转子的平均转速等慢变量而忽略了转速波动.在实验方面,由于转速实际测量困难等问题,大多在远离共振区分析自同步现象.因此,本文建立了自同步振动系统动力学模型和 Simulink 仿真模型,通过仿真分析研究了两个有限动力的非理想电机固定在振动系统上的自发同步,讨论了系统工作在固有频率附近时由于索末菲效应发生的非线性现象以及索末菲效应对同步类型和稳定性的影响.研究结果可为自同步设备正常运行提供参考并完善自同步相关理论.

1 电机驱动自同步系统模型

研究考虑将一个质量为 M 的大质量块放置于 XY 水平面上,并与一个刚度为 k ,阻尼为 c 的弹簧相连构成振动系统,在大质量块质心处固定两个永磁直流电机,每个电机通过忽略质量的连杆连接了一个偏心转子,偏心转子质量分别为 m_1 和 m_2 ,连杆的杆长分别为 l_1 和 l_2 ,电机驱动转子旋转的输出力矩分别为 $T_{e1}(t)$ 和 $T_{e2}(t)$,电机机轴旋转的阻尼系数分别为 c_{r1} 和 c_{r2} .建立的动力学模型如图 1 所示.

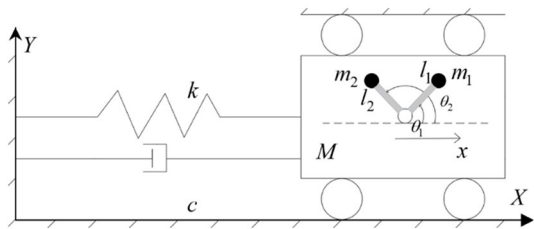


图 1 双非理想电机驱动自同步系统的动力学模型
Fig. 1 Dynamic model of the synchronous system driven by two non-ideal motors

质体振动系统与转子旋转系统耦合后系统的总动能 $E(t)$ 与总势能 $U(t)$ 如下:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2)^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x} - \dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2)^2 + \frac{1}{2}m_1(\dot{x} - \dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1)^2$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (1)$$

其中 $(\dot{*}) = d(*)/dt, (\ddot{*}) = d^2(*)/dt^2, t$ 表示时间.

系统中非保守力做功如下:

$$dW = -c\dot{x}dx + T_{e1}d\theta_1 + T_{e2}d\theta_2 - c_{r1}\dot{\theta}_1 d\theta_1 - c_{r2}\dot{\theta}_2 d\theta_2 = Q_x dx + Q_{\theta_1} d\theta_1 + Q_{\theta_2} d\theta_2 \quad (2)$$

令 $L = E - U$, 将式(1)、式(2)代入拉格朗日方程:

$$d(\partial L / \partial \dot{q}_j) / dt - \partial L / \partial q_j = Q_{q_j}; \quad q_j = x, \theta_1, \theta_2 \quad (3)$$

整理后得到质体—转子系统的平衡方程如下:

$$\begin{cases} (M + m_1 + m_2)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \\ = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1(t) \sin\theta_1(t) + m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2(t) \cos\theta_1(t) + \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2(t) \sin\theta_2(t) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2(t) \cos\theta_2(t) \\ J_1 \ddot{\theta}_1(t) + c_{r1} \dot{\theta}_1(t) = T_{e1}(t) + l_1 m_1 \ddot{x}(t) \sin\theta_1(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) + c_{r2} \dot{\theta}_2(t) = T_{e2}(t) + l_2 m_2 \ddot{x}(t) \sin\theta_2(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $J_1 = m_1 l_1^2, J_2 = m_2 l_2^2, T_{e1}(t), T_{e2}(t)$ 分别为两转子受到的来自电机的电磁转矩. 式(4)中第一式描述了质体在转子偏心激励下受迫振动, 第二、三式描述了两个转子在电机的输出力矩和来自质体的反作用力矩共同作用下旋转, 系统无阻尼固有频率为:

$$\omega_n = k / \sqrt{(M + m_1 + m_2)} \quad (5)$$

对于永磁直流电机, 在输入电压控制下产生电磁转矩驱动电机机轴旋转, 两个电机微分方程表述为:

$$\begin{cases} T_{ei}(t) = c_{ri} \dot{\theta}_i(t) + J_i \ddot{\theta}_i(t) + T_{Li}(t) \\ i_{ai}(t) = T_{ei}(t) / \kappa_{mi} \\ L_{ai} \dot{T}_{ei}(t) + R_{ai} T_{ei}(t) = \kappa_{mi} [u_{ai}(t) - \kappa_{ei} \dot{\theta}_i(t)] \end{cases} \quad (6)$$

其中 $i = 1, 2, u_{ai}(t)$ 为直流电机的输入电压, R_{ai} 为内部电路等效电阻, L_{ai} 为等效电感, κ_{ai} 为电机转矩常数, κ_{ei} 为电机转速常数, $T_{Li}(t)$ 为电机负载转

矩. 式(6)第一式描述了直流电机在输出转矩和负载转矩作用下旋转, 第二式描述了电机电流与输出转矩关系, 第三式描述了电机内部电压平衡.

为了将电机与质体—转子系统耦合起来, 联立式(6)的第一式与式(4)中后两式, 得到电机负载转矩为:

$$T_{Li}(t) = -l_i m_i \ddot{x}(t) \sin\theta_i(t) \quad (7)$$

整理式(4)、式(6)、式(7)得出两个直流电机驱动单质体振动自同步系统微分方程为:

$$\begin{cases} (M + m_1 + m_2)\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) \\ = m_1 l_1 \ddot{\theta}_1(t) \sin\theta_1(t) + m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2(t) \cos\theta_1(t) + \\ m_2 l_2 \ddot{\theta}_2(t) \sin\theta_2(t) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2(t) \cos\theta_2(t) \\ J_1 \ddot{\theta}_1(t) + c_{r1} \dot{\theta}_1(t) = T_{e1}(t) + l_1 m_1 \ddot{x}(t) \sin\theta_1(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2(t) + c_{r2} \dot{\theta}_2(t) = T_{e2}(t) + l_2 m_2 \ddot{x}(t) \sin\theta_2(t) \\ L_{a1} \dot{T}_{e1}(t) + R_{a1} T_{e1}(t) = \kappa_{m1} [u_{a1}(t) - \kappa_{e1} \dot{\theta}_1(t)] \\ L_{a2} \dot{T}_{e2}(t) + R_{a2} T_{e2}(t) = \kappa_{m2} [u_{a2}(t) - \kappa_{e2} \dot{\theta}_2(t)] \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)可以看出耦合后的自同步系统是强非线性系统, 难以直接解耦, 采用 Matlab/Simulink 仿真的方式求解方程是更合理的选择. 由于系统可以分为质体—转子振动系统和转轴—电机系统两部分, 因此分别建立两个系统的仿真模型, 并结合式(7)形成完整的耦合模型.

根据式(4)将质体—转子振动系统写成状态方程样式如下:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{B}\mathbf{f} \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{y} = \{x, \theta_1, \theta_2, \dot{x}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2\}^T,$$

$$\mathbf{f} = \{0, 0, 0, 0, T_{e1}, T_{e2}\}^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M + m_1 + m_2 & -m_1 l_1 \sin\theta_1 & -m_2 l_2 \sin\theta_2 \\ -m_1 l_1 \sin\theta_1 & J_1 & 0 \\ -m_2 l_2 \sin\theta_2 & 0 & J_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -m_1 l_1 \theta_1 \cos\theta_1 & -m_2 l_2 \theta_2 \cos\theta_2 \\ 0 & c_{r1} & 0 \\ 0 & 0 & c_{r2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{I} \text{ 为三阶单位矩阵, } \mathbf{O} \text{ 为三阶零}$$

矩阵.

根据式(6)将两个直流电机系统写成状态方程样式如下:

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{z}_i + \mathbf{Q}_i \mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{z}_i \tag{10}$$

其中, $i = 1, 2, \mathbf{z}_i = \{i_{ai}, \dot{\theta}_i\}^T, \mathbf{u}_i = \{u_{ai}, T_{Li}\}^T,$
$$\mathbf{e}_i = \{T_{ei}, \dot{\theta}_i\}^T, \mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} -L_{ai}^{-1}R_{ai} & -L_{ai}^{-1}\kappa_{ei} \\ J_i^{-1}\kappa_{mi} & -J_i^{-1}c_{ri} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} L_{ai}^{-1} & 0 \\ 0 & -J_i^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} k_{mi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

基于式(7)、式(9)和式(10)在 Matlab/Simulink 中建立非理想电机驱动自同步系统的仿真模型,其中两个永磁直流电机系统和质体—转子振动系统的仿真建模分别如图 2(a)和图 2(b)所示.

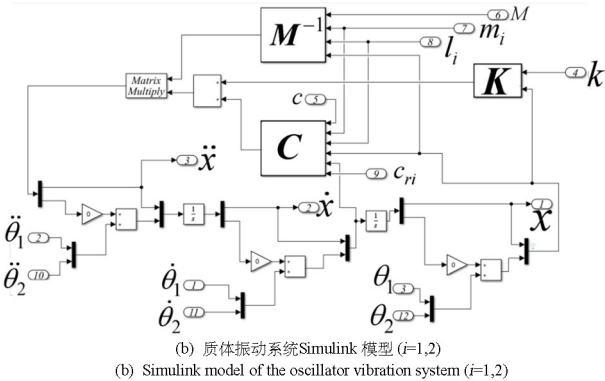
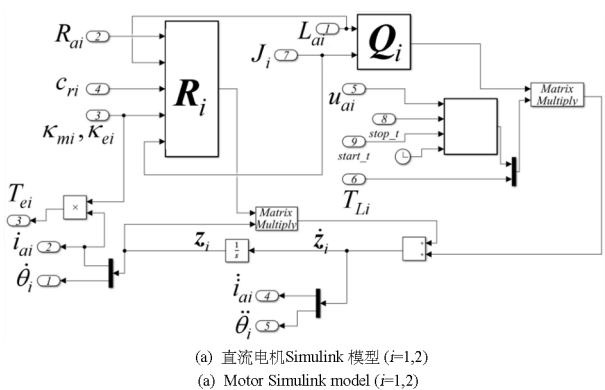


图2 Simulink 数值仿真模型

Fig. 2 Simulink numerical simulation model

在直流电机单独控制转子旋转时,两转子不再受质体运动影响,电机可认为是理想原动机,此时电机负载转矩为零,即 $T_{Li} = 0$,将其代入式(6)得出理想情况下两个转子稳态转速是常数,为

$$\omega_i = \dot{\theta}_i = \kappa_{mi} u_{ai} / (c_{ri} R_{ai} + k_{mi} k_{ei}) \tag{11}$$

其中 $i = 1, 2$,依据式(11)得出理想系统中转子旋转受输入电压线性控制.

将理想转速产生的偏心激励力作用于质体振动系统,即式(11)得出的稳态转速代入式(4)的第一式,然后得出理想激励下质体产生的理想质体稳态位移为

$$x(t) = \sum_{i=1}^2 a_i \cos(\omega_i t - \gamma_i) \tag{12}$$

其中, $a_i = m_i l_i \omega_i^2 / [k \sqrt{(1 - \bar{\omega}_i^2)^2 + (2\zeta \bar{\omega}_i)^2}]$,频率比 $\bar{\omega}_i = \omega_i / \omega_n$,阻尼比 $\zeta = c / [2\sqrt{k(M + m_1 + m_2)}]$,相位差 $\gamma_i = \arctan[2\zeta \bar{\omega}_i / (1 - \bar{\omega}_i^2)]$.

2 系统响应和索末菲效应分析

质体—转子振动系统和转轴—电机系统的模型参数分别如表 1 和表 2 所示,两个同样物理参数且初始条件相同的永磁直流电机驱动单质体振动时,两个偏心转子容易保持同步旋转.而在两个转子同步旋转下系统可以等效为一个非理想电机驱动单质体振动,系统会出现明显的索末菲效应^[19].因此,为了研究索末菲效应对同步的影响,选择对称的系统模型参数和相同的初始条件.

在表 1 和表 2 中,两转子的偏心质量、杆长及两电机相关系统参数完全一致.两电机同时开机,仿真时间为 100 s,相对误差设置为 0.5×10^{-4} ,时间步长设置为 10^{-4} s,两转子的初始相位角 $\theta_1(0)$ 和 $\theta_2(0)$ 相等且为零,初始转速 $\dot{\theta}_1(0)$ 和 $\dot{\theta}_2(0)$ 相等,质体初始位移 $x(0)$ 和初速度 $\dot{x}(0)$ 都为零,电

表 1 质体—转子系统参数($i = 1, 2$)

Table 1 Rotor-oscillator system parameters($i = 1, 2$)

System	m_i/kg	l_i/m	M/kg	$c/\text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$	$k/\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$
Value	10	0.08	200	235.57	630500

表 2 转轴—电机系统参数($i = 1, 2$)

Table 2 Axis-motor system parameters($i = 1, 2$)

System	L_{ai}/H	R_{ai}/Ω	$c_{ri}/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$	$\kappa_{mi}/\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$	$\kappa_{ei}/\text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$
Value	0.057	0.57	0.03	0.57	0.57

机电电压为 $0 \sim 100$ V 且扫描间隔为 0.1 V, 两电机和转子的初始条件完全一致。

由于该系统是强非线性系统, 在靠近共振时系统稳态响应会出现多稳态的情况, 所以将两电机初转速分为两种情况: 一种情况下模拟电机启动过程, 两电机初始转速选取为零初转速, 即此时 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ rad/s; 另一种情况下模拟电机关机过程, 在将表 1 参数代入式(5)得出此时质体系统的无阻尼固有频率 ω_n 为 53.53 rad/s, 令电机初始转速远大于固有频率, 即 $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 200$ rad/s, 输入电压 $0 \sim 100$ V 且间隔为 0.1 V。

由于系统模型对称, 两个电机初始条件一致, 依据仿真结果此时两个转子转速始终相等, 转角相位差始终为零, 系统处于相位差为 0° 的同步状态。为了简化, 下面描述的转子转速响应代表两个电机的转速响应。

随着输入电压参数的变化, 理想情况下转子稳态转速由式(11)给出, 而该自同步系统稳态后的转子转速算术平均值 $\bar{\omega}_i$ 、全局最小值 $\min\{\omega_i\}$ 、全局最大值 $\max\{\omega_i\}$ 以及系统固有频率 ω_n 结果如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 两种不同初始条件下转子稳态平均转速的结果对比如图 3(c) 所示。其中平均转速 $\bar{\omega}_i$ 为:

$$\bar{\omega}_i = \left[\sum_{N=t_1}^{N=t_2} \dot{\theta}_i(N) \right] / (t_2 - t_1) \quad (13)$$

由图 3(a) 可知, 转子初转速为零时, 随着输入电压增加, 转子稳态平均转速逐渐偏离线性的理想系统转速, 并始终小于对应质体谐振频率 ω_n , 之后在 59.1 V 时突增到理想转速附近。在图 3(b) 中, 当转子初始转速为 200 rad/s 时, 转子平均转速在理想转速附近, 随着输入电压减小, 在 52.2 V 时转子稳定平均转速突降到质体谐振频率附近, 由此在该自同步系统中重现了索末菲效应。

由于转子转速波动经历多个阶段, 图 3(a) 显示转速在平均值上下波动情况, 具体转子稳态转速随时间变化情况如图 4 所示。结合图 3(a) 和图 4 可以看出初转速为零的情况下, 随着输入电压增加, 转子转速受质体振动影响波动量逐渐增大。在输入电压 $0 \sim 47.4$ V 时, 转速在平均转速上下等幅波动, 其中输入电压为 45 V 和 47.4 V 时, 转子转速响应近似为单幅值谐波, 平均转速从 51.611 rad/s 增加到 51.833 rad/s; 在输入电压 $47.4 \sim 60$ V 时,

转子转速非等幅波动, 其中输出电压 47.5 V 时, 转子转速不再是单幅值谐波, 此时转速全局最小值快速下降而全局最大值缓慢增加, 直到输入电压为 51.5 V 时所示, 全局最小转速开始出现负数, 即转子发生倒转。输入电压大于 47.4 V 后转子转速出现了明显的更低频谐波分量, 最后在输入电压大于 59.1 V 后, 稳态转速回到理想转速附近。同理初速度为 200 rad/s 时, 依据图 3(b) 可知, 稳态转子转速同样在大于 47.4 V 后由近似单幅值谐波变为多幅值谐波而最后大于 52.1 V 后回到理想转速附近。

在自同步系统中两转子转速始终相等的情况下, 由于索末菲效应的影响, 稳态平均转速出现了一个不稳定区域: 随着电机的输入电压变增长, 稳

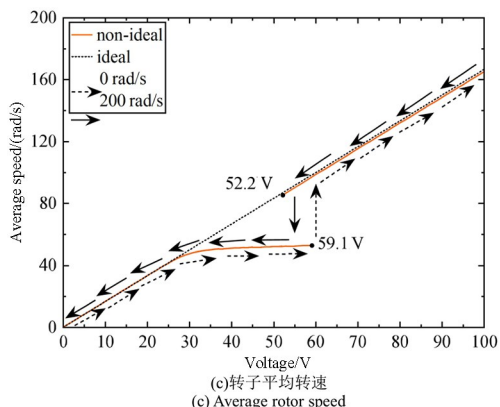
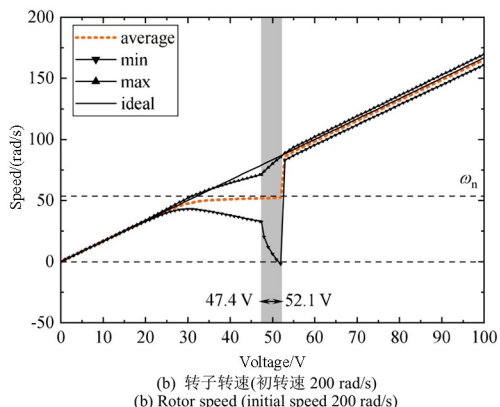
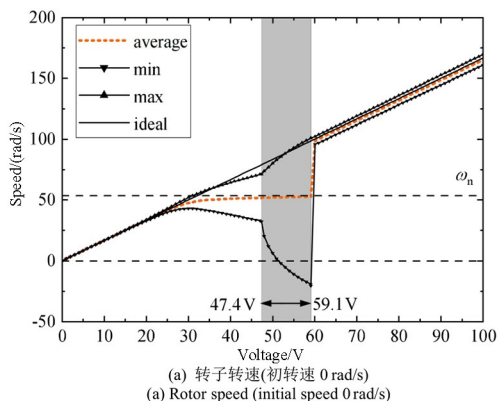


图3 转子转速情况

Fig. 3 The results of rotor speed

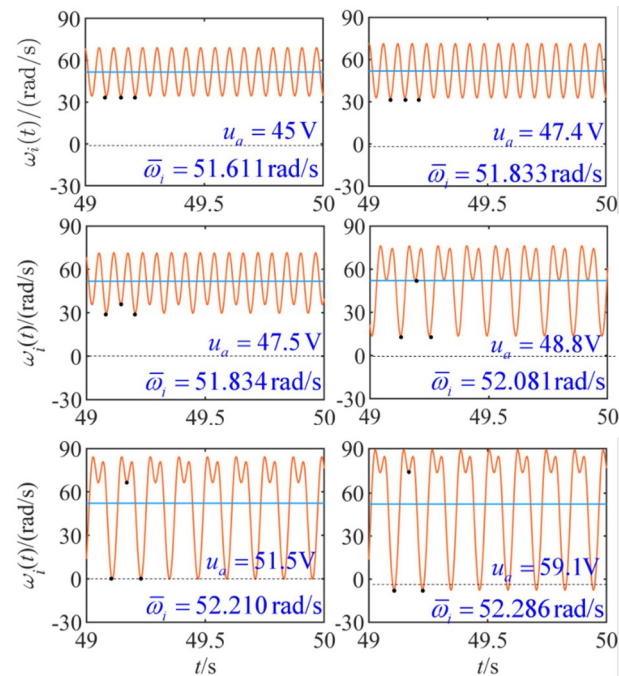


图4 转子稳态转速响应
Fig. 4 Steady-state rotor speed response

态转速会先由单幅值变为多幅值谐波,然后经过这一不稳定区域后稳态平均转速会突增或突降. 下面分析这一过程中质体稳态位移的变化. 首先随着输入电压变化,仿真得出 0 rad/s 和 200 rad/s 初转速下质体稳态位移幅值,结果如图 5(a)所示. 之后采用自功率密度函数对稳态位移响应进行频谱分析. 在初转速为零时,忽略高频分量,稳态位移响应的频率结果如图 5(b)所示,不同电压和初转速下质体稳态加速度响应频谱分析结果如图 6 所示.

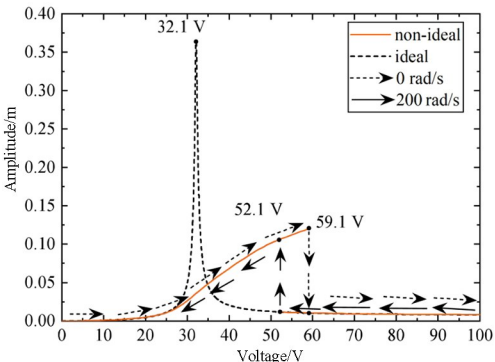
由图 5(a)可以得出:转子初转速为零时,随着输入电压增加,质体稳态位移幅值在大于 60V 后伴随转子平均转速突增而突降;在转子初转速为 200 rad/s 时,随着输入电压降低,质体稳态位移幅值在小于 52.1 V 时伴随转子平均转速突降而突增. 相比理想系统来说,该自同步非线性系统表现出一种硬式非线性特征,即理想系统在输入电压 32.1 V 时达成理想谐振,而该系统在远离理想共振点后才达成最大幅值.

质体和电机耦合后,在电机输入电压增加过程中,质体稳态响应相比于理想系统单一频率的情况呈现多倍频. 先考虑初转速为 0 rad/s 的情况:整体上,从图 5(b)频率结果可知,在输入电压增加到 59.1 V 过程中质体稳态位移基频逐渐靠近质体系统谐振频率. 首先在输入电压 47.5~59.1 V 时,转速响应从单幅值谐波变为多幅值谐波,如图 4 所

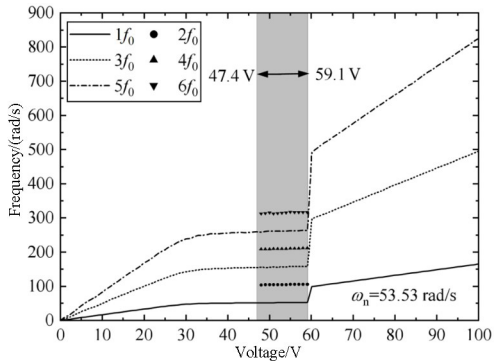
示;加速度响应从奇数倍频突变为偶数倍频,如图 6 中 0 rad/s 结果所示. 然后在输入电压大于 59.1 V 后,加速度响应恢复为奇数倍频.

而对于初转速为 200 rad/s 的情况,在输入电压大于 47.4 V 之后加速度响应出现偶数倍频,与初转速为零的情况一致. 而输入电压大于 52.1 V 后加速度响应就恢复为奇数倍频,加速度响应频谱结果如图 6 中 200 rad/s 结果所示.

对于该系统来说,由于索末菲效应,随着输入



(a) 稳态位移幅值
(a) displacement amplitude



(b) 稳态位移频率
(b) Frequency of displacement
图5 质体稳态响应

Fig. 5 The steady-state oscillator response

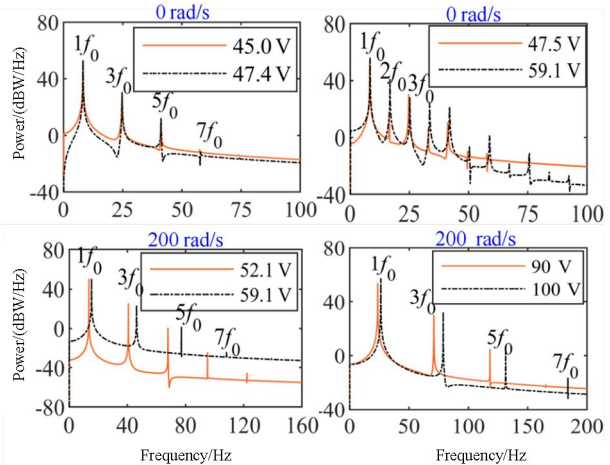


图6 稳态加速度响应频率变化

Fig. 6 The steady-state acceleration response frequency variation

电压增加或减少,转子稳态转速和质体稳态位移会出现多稳态区间,系统自同步状态在多稳态之间也会有切换,而在稳态转速变为多幅值和位移出现偶数倍频后,同步的稳定性会明显变差。下面通过对系统参数施加扰动来分析此时索末菲效应对同步的影响。

3 索末菲效应对同步的影响

为了研究系统在不同电压下同步状态的稳定性和同步能力,需要对系统参数施加小扰动。其他参数不变,对两个直流机电压 $u_{a1}(t)$, $u_{a2}(t)$ 施加扰动,具体为:

$$\begin{cases} u_{a1}(t) = u_{a2}(t) = U_0, 0 \leq t < T_1 \\ u_{a1}(t) = U_1, T_1 \leq t < T_2 \\ u_{a1}(t) = u_{a2}(t) = U_0, t \geq T_2 \end{cases} \quad (14)$$

其中 U_0 为两个电机初始电压, U_1 为对电机 1 施加的扰动电压, T_1 为扰动施加时刻, T_2 为扰动结束时刻。

施加扰动后,该自同步系统在未出现多稳态 ($0 \sim 52.1$ V)、出现多稳态 ($52.1 \sim 59.1$ V) 和结束多稳态 ($59.1 \sim 100$ V) 时表现出不同的同步结果。

在输入电压 $0 \sim 52.1$ V 时,施加电压扰动后该自同步系统仍然稳定在零相位同步,即两个电机转子转速始终相等,转角相位差始终为 0° ,令 $T_1 = 49.95$ s, $T_2 = 50.00$ s, $U_0 = 35$ V, $U_1 = -35$ V 得到此时两转子转角相位差随时间变化的曲线如图 7 中 $U_0 = 35$ V 结果所示。从图中可以看出此时转子转角相位差扰动后从一个最大值处波动衰减到零附近,此时系统达成的是稳定的零同步。

在输入电压 $59.2 \sim 100$ V,施加电压扰动后该自同步系统会稳定在反相位同步,即两个电机转子转速始终反相相等,转角相位差为 180° ,令 $T_1 = 49.95$ s, $T_2 = 50.00$ s, $U_0 = 75$ V, $U_1 = 0.99U_0$,对系统施加第一次轻微扰动,转子相位差结果如图 7 中 $U_0 = 75$ V 结果所示,图中两转子相位差从 0° 变为 -180° 。在相位差稳定在 -180° 后再次施加扰动,即 $T_1 = 99.95$ s, $T_2 = 100.00$ s, $U_0 = 75$ V, $U_1 = 0$ V 时施加第二次扰动,转子相位差如图 7 所示,转子相位差稳定在 -180° 附近,此时系统达成的是稳定的反相位同步。

在输入电压 $52.1 \sim 59.1$ V 时,系统响应存在两个稳态轨道,由于系统非线性,两个稳态轨道相互

干扰,系统在这一阶段很难达成稳定的零同步或 180° 同步。令 $T_1 = 49.95$ s, $T_2 = 50.00$ s, $U_0 = 52.2$ V 且 $U_1 = -52.2$ V 时扰动后两转子转速和相位差随时间变化的结果如图 8 所示,可以看出,由于系统处于索末菲效应作用区间,系统受扰后无法达成同步。

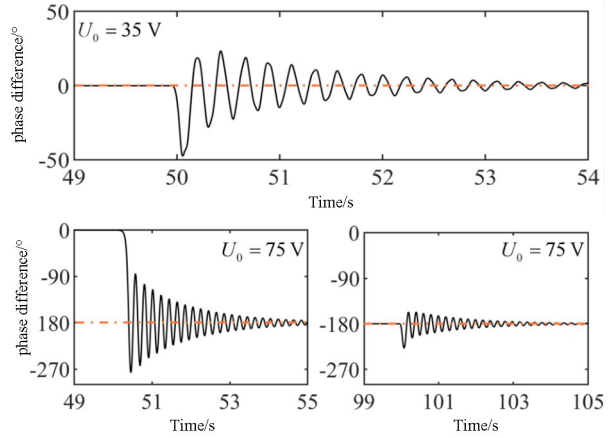


图 7 扰动后相位差

Fig. 7 The phase difference after disturbance

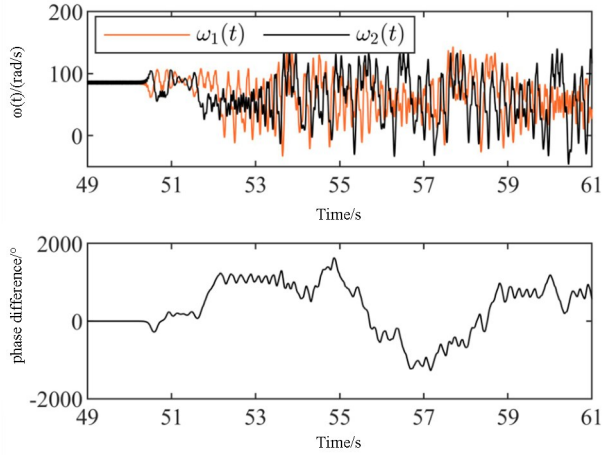


图 8 扰动后转速和相位差

Fig. 8 The rotor speed and phase difference after disturbance

在输入电压 $0 \sim 52.1$ V 和 $59.2 \sim 100$ V 时,系统是稳定的。对转子 1 施加不同程度的扰动,使两转子在已达成稳定的 0° 相位差同相位同步或 180° 相位差反相位同步的基础上,相位差大于 90° 或 270° ,然后计算转子相位差从初值 90° 衰减到 0.09° 或初值 270° 衰减到 180.09° 所需时间 T_s 。考虑转子平均转速不同,将该同步恢复时间乘以转子扰动前稳态平均转速后倒数,即 $Q = 1/(\bar{\omega}_i \cdot T_s)$ 作为系统同步能力的指标。

在 $T_1 = 49.95$ s, $T_2 = 50.00$ s, $U_0 = 35$ V, $U_1 = -120$ V、 -110 V、 -100 V 时,得到两转子相位差结果如图 9 所示。其中 $T_s = 8.36$ s,在输入电

压固定不变时系统受到不同扰动后相位差收敛的速度基本相同. 因此在系统受扰动后仍稳定时, 分析同步指标随输入电压变化的结果, 结果如图 10 所示. 在初始输入电压 0~10 V 时, 系统到达 90° 相位差后无法恢复 0° 同步状态, 认为此时系统同步恢复能力过于弱. 初始输入电压 10~100 V 时, 由图 10 可知: 在初始输入电压为 21 V 左右时系统同步恢复指标最高, 恢复同步能力最强; 在输入电压 21~52.1 V 时, 电压越大, 系统恢复同步能力越弱.

整体上来说, 在可以达成稳定的零相位同步且输入电压 0~52.1 V 这一阶段, 在理想系统共振点前存在一个系统同步能力最强的极值. 而在系统已经越过索末菲效应区间, 即输入电压 59.2~100 V 时, 系统的同步恢复能力随着输入电压增加逐渐降低. 系统在 52.1~59.1 V 的索末菲效应作用区间受到扰动后完全无法同步, 同步恢复能力极差.

立了对称的质体—电机耦合系统仿真模型, 并分析了同步系统稳态响应和同步受扰动后恢复同步状态的能力, 得出以下结论:

(1) 对于系统参数对称、初始条件一致的对称同步系统, 两转子稳态平均转速随初始电压增大而增大直至接近系统谐振频率, 随后发生跳跃并越过系统谐振频率. 在这一过程中系统均保持相位差为 0° 同相位同步.

(2) 系统未进入谐振区、两转子的转速小于系统谐振频率时, 系统可以达成稳定的相位差为 0° 的同相位同步, 同步能力先增强后减弱, 输入电压 21 V 时系统同步能力最强; 在系统脱离谐振区后两转子的转速远大于系统谐振频率时, 系统可以达成稳定的相位差为 180° 的反相位同步, 同步能力缓慢减弱.

(3) 在系统处于强烈谐振时, 两转子转速接近系统谐振频率、质体稳态位移响应会出现偶数倍频, 系统很难达成稳定同步, 这一阶段系统同步能力最弱.

参考文献

[1] CHEN X W, ZHOU Y, ZHANG J G, et al. A synergetic strategy of automobile intelligent cruise system based on fuzzy control adopting hierarchical structure [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2019, 16(5): 1–13.

[2] 孔祥希. 多机驱动振动系统的控制同步与复合同步理论研究[D]. 沈阳: 东北大学, 2016.

KONG X X. Controlled and composite synchronizations in the vibrating system driven by multi-motors [D]. Shenyang: Northeastern University, 2016. (in Chinese)

[3] KAPITANIAK T, KURTHS J. Synchronized pendula: from Huygens' clocks to chimera states [J]. The European Physical Journal Special Topics, 2014, 223(4): 609–612.

[4] BLEKHMANN I I, YAROSHEVICH N P. Extension of the domain of applicability of the integral stability criterion (extremum property) in synchronization problems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2004, 68(6): 839–846.

[5] BLEKHMANN I I, SOROKIN V S. On the separation of fast and slow motions in mechanical systems with high-frequency modulation of the dissipation

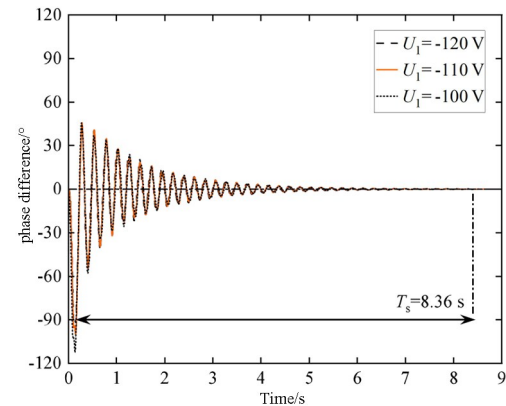


图 9 固定电压下不同扰动

Fig. 9 Different disturbances at fixed voltage

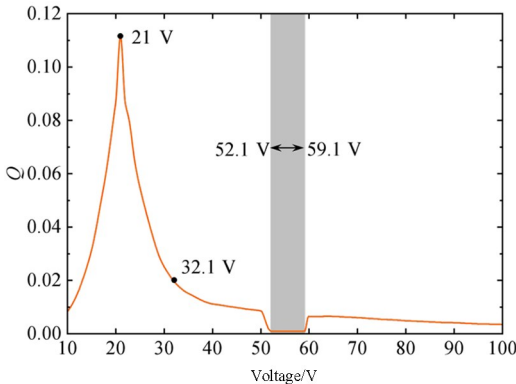


图 10 同步恢复能力

Fig. 10 Synchronization recovery capability

4 结论

本文通过 Lagrange 方程建立了耦合自同步系统动力学模型. 随后, 利用 MATLAB/Simulink 建

- coefficient [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, 329(23): 4936—4949.
- [6] BLEKHMANN I I. Frequency synchronization and its possible role in microworld phenomena [J]. *Automation and Remote Control*, 2020, 81(8): 1405—1412.
- [7] 陈晓哲, 窦景欣, 孔祥希, 等. 两激振器同一旋转轴线振动系统的自同步理论[J]. *振动与冲击*, 2017, 36(14): 19—25, 44.
CHEN X Z, DOU J X, KONG X X, et al. Self-synchronization theory about two exciters on the same rotational axis in a vibration system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, 36(14): 19—25, 44. (in Chinese)
- [8] 刘云山, 顾大卫, 闻邦椿, 等. 双机驱动双质体振动机械系统的同步及其稳定性[J]. *矿山机械*, 2019, 39(2): 249—254, 439.
LIU Y, GU D, WENG B C, et al. Vibratory synchronization transmission in the vibrating system of three exciters [J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2019, 39(2): 249—254, 439. (in Chinese)
- [9] 李振明, 张学良, 闻邦椿, 等. 双机驱动双质体振动机械系统的同步及其稳定性[J]. *振动与冲击*. 2022, 41(4): 29—35.
LI Z M, ZHANG X L, WENG B C, et al. Synchronization and stability of a vibrating mechanical system with double rigid frames driven by two vibrators [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(4): 29—35. (in Chinese)
- [10] LOPES L M, FERNANDES S, GRÁCIO C. Complete synchronization and delayed synchronization in couplings [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2015, 79(2): 1615—1624.
- [11] KAWAMURA T, NAKAO T, TAKAHASHI M, et al. Synchronized vibrations of a circular cylinder in cross flow at supercritical Reynolds numbers [J]. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 2003, 125(1): 97—108.
- [12] CZOŁCZYŃSKI K, PERLIKOWSKI P, STEFANOWSKI A, et al. Synchronization of self-excited oscillators suspended on elastic structure [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, 32(3): 937—943.
- [13] BARRÓN M A, SEN M. Synchronization of coupled self-excited elastic beams [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, 324(1/2): 209—220.
- [14] 马米花, 蔡建平. Van der Pol 振动系统同步时间与反馈增益的关系[J]. *动力学与控制学报*, 2007, 5(2): 125—131.
MA M H, CAI J P. Relation between synchronization time and feedback gain of Van der Pol oscillator [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 125—131. (in Chinese)
- [15] ZHAO C Y, ZHAO Q H, ZHANG Y M, et al. Synchronization of two non-identical coupled exciters in a non-resonant vibrating system of plane motion [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2011, 25(1): 49—60.
- [16] ZOU M, FANG P, PENG H, et al. Study on synchronization characteristics for self-synchronous vibration system with dual-frequency and dual-motor excitation [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, 33(3): 1065—1078.
- [17] LI L X, CHEN X Z. Times-frequency synchronization of two exciters with the opposite rotating directions in a vibration system [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 443: 591—604.
- [18] 汤红吉, 余跃, 张正娣. 一类改进混沌 Lur'e 系统的滞后同步判据[J]. *动力学与控制学报*, 2022, 20(2): 45—49.
TANG H J, YU Y, ZHANG Z D. Delay synchronization criterion for a class of improved chaotic Lur'e systems [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2022, 20(2): 45—49. (in Chinese)
- [19] KOVRIGUINE D A. Synchronization and sommerfeld effect as typical resonant patterns [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2012, 82(5): 591—604.
- [20] 丁川, 甘子川, 王笑, 宋汉文. 电机驱动非理想振动系统的索末菲效应[J]. *力学学报*, 2024, 56(9): 2731—2740.
DING C, GAN Z C, WANG X, SONG H W. Sommerfeld effect in non-ideal vibration systems driven by motors [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2024, 56(9): 2731—2740. (in Chinese)