

非线性动力系统失效时间的胞参考点映射方法^{*}

吴晓奇¹ 郭空明^{1†} 江俊² 徐亚兰¹

(1. 西安电子科技大学 机电工程学院, 西安 710071)

(2. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室, 西安 710049)

摘要 本文研究在给定状态空间失效状态集的情况下,非线性动力系统状态失效时间的快速计算方法. 首先将非线性动力系统全局分析的一种经典方法胞参考点映射法进行改进,以计算失效时间. 然后用改进的方法对 Duffing 系统、一类受迫双稳态结构和弹簧负载倒立摆模型进行了计算,并分析了方法的收敛阈值对计算误差和计算时间的影响. 结果表明,文中提出的方法可以在满足一定精度的前提下,实现大量状态点失效时间的高效计算.

关键词 非线性动力系统, 全局分析, 胞映射, 点映射, 失效时间

中图分类号:O313

文献标志码:A

A Cell Reference Point Mapping Method for the Failure Time of Nonlinear Dynamical Systems^{*}

Wu Xiaoqi¹ Guo Kongming^{1†} Jiang Jun² Xu Yalan¹

(1. School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(2. State Key Laboratory for Strength and Vibration, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract This article studies a fast calculation method for the state failure time of nonlinear dynamic systems given the failure state set. Firstly, a classic method for global analysis of nonlinear dynamical systems, the point mapping under cell reference method, is improved to calculate the state failure time. Then the improved method is used to calculate Duffing system, a forced bistable structure, and spring loaded inverted pendulum model. The influence of the convergence threshold of the method on the calculation error and time is analyzed. The results show that the proposed method can achieve efficient calculation of failure time of a large number of state points while meeting certain accuracy requirements.

Key words nonlinear dynamical systems, global analysis, cell mapping, point mapping, failure time

引言

非线性动力系统,或称为非线性动态系统,作为一类复杂的系统,广泛存在于力学、物理、电力、

生态等学科领域中,其具有多稳态、分岔等复杂现象. 非线性动力系统的数学模型为非线性微分方程或差分方程. 在实际工程应用中,通常希望系统运行在一个指定的稳态响应上,对于多稳态系统,传

统的局部线性稳定性分析手段已不适用,需要对系统的吸引子及其吸引域进行计算^[1],目前只能通过数值手段来完成这一点,通常采用状态空间离散化或者采样的方法.传统的全局分析手段主要目的是计算吸引子以及吸引域,一般将一个特定吸引子作为希望达到的稳态,而把吸引子认为是不安全的稳态.

对于吸引子和吸引域的计算,特别是对于低维系统,目前已有一系列的方法.除了对采样点直接逐个计算的点映射法外,为节省计算时间还可以采用各种胞映射方法.1980年,美国工程院院士 Hsu^[2]先后提出了简单胞映射法和广义胞映射法,这两种方法实际上具有不同的理论基础,前者是在离散化的状态空间进行轨道演化,通过充分利用之前计算过的轨道的信息来减少计算量.而后者主要从向量场的角度出发,其理论基础为马尔可夫过程和矩阵理论.两者的关系类似于流场的拉格朗日描述和欧拉描述.与简单胞映射相比,广义胞映射有更为坚实的数学基础,加之计算转移概率密度矩阵的特点使得它应用范围更广,因此逐渐成为胞映射法的主流,该方法的进一步发展包括有向图广义胞映射方法^[3]、机器学习广义胞映射^[4]、并行广义胞映射^[5]、广义胞映射优化控制^[6]等.

近年来,随着计算机性能的提升以及并行计算技术的发展,非线性动力系统全局稳定性问题的相关研究也日益增多,涌现了诸多关于全局稳定性的新概念.例如 Rega 等人提出的局部完整性测度(local integrity measure, LIM)^[7]、Menck 等人提出的吸引域稳定性(basin stability)等^[8].这些概念还是植根于吸引子和吸引域.随着对生态学、社会科学、大气科学、电力网络等更为复杂动态系统的深入研究,非线性动力系统的全局稳定性问题继续得到深化和泛化.根据不同实际问题的要求,对于系统稳定性的研究不再与代表稳态响应的吸引子直接相联系,而是对状态空间区域进行分类,人为划分出安全的区域以及失效区域.这样一方面可以适应实际问题的需要,另一方面可以考虑系统的暂态响应. Hellmann^[9]提出了存活率(survivability)的概念,此概念定义为给定一个随机的初始条件,暂态响应离开安全区域的概率. Schoenmakers^[10]从系统的功能性考虑,提出了系统受干扰后恢复能力的衡量(resilience).该工作指出,可以从系统运

行角度将功能相同的吸引子认为是同一类响应.

稳定性可以刻画状态恢复至期望区域的能力,而生存性等指标研究状态是否会进入失效区域.各类稳定性和生存性指标通常将系统作为一个整体,定量刻画系统随自身参数变化时的指标变化情况.但系统轨道的恢复力和安全与否,实际上取决于轨道的初始条件,在考虑有限时间内轨道是否失效时,这一点尤为明显.本文在状态空间给定失效区域的前提下,研究不同初始状态轨道首次进入失效区域的时间,并以此刻画系统不同状态的安全性.同时,基于江俊和徐健学提出的胞参考点映射法^[11]发展了一种高效计算各状态安全性的算法.本文首先对问题进行定义,然后介绍了利用胞参考点映射法计算各状态点失效时间的方法,并通过几个算例对方法的效率和误差进行讨论,最后给出总结.

1 问题描述

考虑如下的微分动力系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ 是 n 维向量函数,映射 $\mathbf{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是定义在某个子集 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的光滑函数. $\boldsymbol{\varphi}_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为 \mathbf{f} 生成的流.规定 $K \subseteq U$ 为非失效区域.考虑到在实际应用中,系统运行时间有限,因此定义 T 时间内的安全区域 S_T 为以下状态的集合:

$$S_T = \{\mathbf{x} \in K \mid 0 < \forall t \leq T, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}) \in K\} \quad (2)$$

而以下状态集合组成 T 时间内的不安全区域:

$$D_T = \{\mathbf{x} \in K \mid 0 < \exists t < T, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}) \notin K\} \quad (3)$$

定义 T 时间内的不安全状态 \mathbf{x} 的失效时间为:

$$\tau(\mathbf{x}) = \min\{t > 0 \mid \mathbf{x} \in K, \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{x}) \notin K\} \quad (4)$$

对于离散映射系统,亦可作类似的定义.由于微分动力系统经常采用时间离散算法进行求解,因此在实际数值计算相关问题时,也往往作为离散系统处理.考虑离散映射:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n) \quad (5)$$

定义 N 步安全区域 S_N 为以下状态的集合:

$$S_N = \{\mathbf{x} \in K \mid 0 < \forall k \leq N, \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) \in K\} \quad (6)$$

而以下状态集合组成 N 步内的不安全区域:

$$D_N = \{\mathbf{x} \in K \mid 0 < \exists k < N, \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) \notin K\} \quad (7)$$

定义 N 步内的不安全状态 x 的失效步数为:

$$\tau(x) = \min\{k > 0 \mid x \in K, G^k(x) \notin K\} \quad (8)$$

本文研究给定系统方程、失效区域和运行时间上限(时间 T 或步数 N)时,如何计算出:(1)安全区域;(2)不安全区域各状态的失效时间.实际采用的方法多是数值方法,其中最直接的方法是在非失效区域内划定一片感兴趣的区域,然后在该区域内均匀选取一些状态点.将这些状态点作为系统初始条件逐一生成轨道进行计算.以离散时间系统为例,若状态所生成的轨道在 N 步内未失效,则认为其为安全状态.若状态生成的轨道在 τ 步时首次进入失效区域,则认为该状态不安全并将 τ 作为其失效步数.下文将该方法称为传统点映射法,其虽然直观、精确,但计算效率不高,原因是未充分利用之前状态所生成轨道的信息.本文所采用的胞参考点映射法正是基于这一点进行改进.

2 计算方法

胞参考点映射方法(point mapping under cell reference,下文简称 PMUCR)由江俊和徐健学在1994年首次提出^[11].该方法实际上并不是胞映射方法,而是借鉴了简单胞映射思想的点映射方法,使得方法同时具备点映射的精确性和胞映射的高效性.其主要思路是将之前计算的轨道及其特性进行存储,在后续积分时,若当前轨道的状态与之前存储的轨道上某点距离足够接近,则认为两轨道具有相同的长期行为,从而可以终止当前轨道的演化.显然,若将当前轨道状态与之前存储的所有轨道上的所有点相比较,则不但不会提升计算效率,反而会因花费大量时间用于计算点与点之间的距离导致效果不如传统点映射. PMUCR 运用胞映射动力系统状态空间离散化的思想,通过将每个胞中放置参考点,使得胞空间仅用于可快速找到与当前状态点距离较近(但可能不是最近)的参考点,而不影响轨道的精确演化. PMUCR 方法如图1所示,其基本思想是每积分计算得到一个新的点,都可以快速定位其位于胞参考框架的哪个胞中,然后根据胞中参考点与当前点的距离判断是否继续演化轨道,若轨道终止则根据该胞的信息对当前轨道的初始点进行定性.传统 PMUCR 方法仅用于计算吸引子及其吸引域,本文对其进行拓展,以便实现状态安全性及失效时间的高效计算.

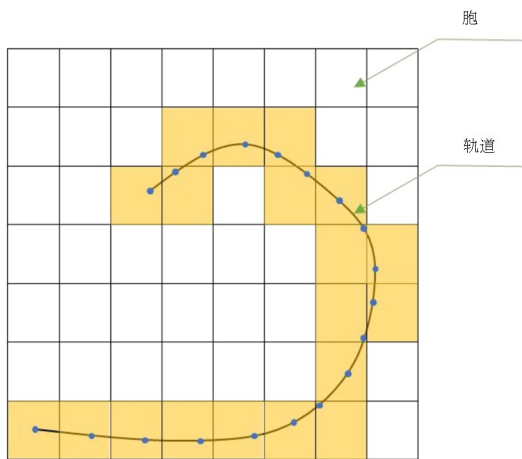


图1 二维系统 PMUCR 示意图

Fig. 1 PMUCR schematic diagram of two-dimensional system

对于选定的状态空间区域,在每一维度均匀布置网格,从而划分出胞参考框架.将每个胞的中心点作为采样点进行计算,判断其是否安全,若不安全则计算其失效时间.与传统 PMUCR 方法类似,用一个取有限状态的变量(下文用 Id 表示)对每个胞的特性进行标识.用 $Id=0$ 代表未处理胞, $Id=-1$ 代表处理中的胞, $Id=1$ 和 2 分别代表安全和失效的胞.若一个胞已被轨道经过,则其内一定有一个参考点.

程序将各采样点作为初始条件逐一进行计算,并用一个数组顺序存储轨道经过的胞的编号,称为胞轨道.对于一个初始状态,首先查看其所在胞的 Id .若该胞 $Id=1$ 或 2 ,则计算初始状态与胞中参考点距离,小于程序给定的阈值则不进行轨道演化,直接将参考点的特性(安全与否,失效时间)赋予初始点.若大于阈值或 $Id=0$ 则将这个初始状态设为胞的参考点(若胞中已有参考点则进行覆盖),胞 Id 设置为 -1 ,将该胞的编号存入胞轨道,继续积分.若轨道暂时离开了选定区域(但未至失效区域),则在胞轨迹中存入 0 (后续不对这些胞进行处理),这样可以保证胞轨道长度与积分步数一致.积分过程中可能有如下情况:

(1)积分步数对应的时间大于时间上限,认为当前轨道安全,把胞轨道中编号非 0 的胞均标记为安全($Id=1$).

(2)积分结果进入失效区域,则把胞轨道中编号非 0 的胞均标记为失效($Id=2$),并根据已积分的步数倒推当前轨道中每个胞的失效时间.

(3)以上两条都不满足,则判定积分后所在胞

是否在选定范围外,若在选定范围外,继续积分不做处理,胞轨道中存入 0.

(4)以上三条都不满足,则计算积分后状态所在的胞编号,读取该胞对应的 Id.

若胞 Id=1,且当前状态与参考点距离小于阈值,则认为当前轨道安全,胞轨迹中所有编号非 0 的胞都设置为 Id=1,结束该轨道的积分,若大于阈值则继续积分,胞轨道中存入 0(表示这些胞后续不再重新处理).

若胞 Id=2,且与参考点距离小于阈值,认为当前轨道不安全,暂时将胞轨迹中所有编号非 0 的胞都设置 Id=2,并计算出这些胞的失效时间,结束当前轨道的积分.若其中有胞的失效时间大于时间上限也认为安全,重新将其 Id 设置为 1.若距离大于阈值则继续积分,胞轨道中存入 0.

若胞 Id=0 则将其置为 Id=-1(正在处理的胞),并设置目前的状态为该胞的参考点,把胞存入胞轨道,并继续积分.

若 Id=-1,且与参考点距离小于阈值,说明找到了吸引子(不动点或周期),将胞轨道中所有编号非 0 的胞 Id 设置为 1 并结束当前轨道积分,若大于阈值则将当前的点设置为该胞的参考点,并继续积分.

3 算例

为了验证方法的有效性,本节应用 PMUCR 法对三个典型算例进行计算.计算结果将与传统点映射法进行比较,并定义以下指标对比较进行量化:

(1)状态误差:将所有初始状态的安全与否则所在胞的 Id 来标识,用下标 PMUCR 表示 PMUCR 方法的计算结果, N_p 为总点数,则状态误差定义为:

$$e_{\text{state}} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} |Id_{\text{PMUCR}}(i) - Id(i)| \tag{9}$$

(2)平均步数相对误差:假设两种方法所得状态均为失效的点的数目为 N_f ,平均步数相对误差定义为两种方法中求出的失效步数绝对值相对误差的平均值:

$$e_{\text{step}} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} \frac{|\tau_{\text{PMUCR}}(i) - \tau(i)|}{\tau(i)} \tag{10}$$

(3)计算时间比:指 PMUCR 方法与传统点映射方法执行计算所花费时间的比值.

算例 1: Duffing 方程

Duffing 系统是一类典型的非线性振动系统模型^[12].本文研究的 Duffing 系统方程为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -0.1y + x - x^3 \end{aligned} \tag{11}$$

Duffing 方程的状态空间为二维, x 取值范围为 $[-2, 0]$, y 取值范围为 $[-2, 2]$,规定失效区域为 $x > 0$.将状态空间划分为 100×200 个胞.采用定步长四阶龙格-库塔法求解式(11),积分步长为 0.01,积分步数上限为 5000.不同阈值时 PMUCR 和传统点映射方法的比较列入表 1.图 2 给出了阈值 0.0002 的 PMUCR 方法的失效时间云图与传统方法的比较.

表 1 Duffing 系统 PMUCR 和传统点映射方法的比较			
Table 1 Comparison of PMUCR and traditional point mapping method of Duffing system			
阈值	计算时间比	状态误差	平均步数相对误差
1.0×10^{-3}	0.170 69	2.7×10^{-3}	$1.472\ 5 \times 10^{-3}$
5.0×10^{-4}	0.376 18	3.5×10^{-4}	$3.835\ 3 \times 10^{-5}$
3.0×10^{-4}	0.597 13	2.0×10^{-4}	$1.421\ 0 \times 10^{-4}$
2.0×10^{-4}	0.764 31	5.0×10^{-5}	$8.016\ 5 \times 10^{-5}$
1.9×10^{-4}	0.780 93	0	$7.641\ 2 \times 10^{-5}$
1.0×10^{-4}	0.957 37	0	$2.880\ 9 \times 10^{-5}$

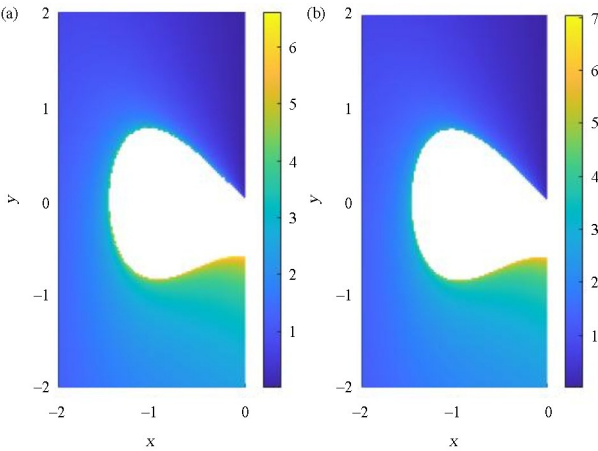


图 2 Duffing 系统失效时间云图:PMUCR 方法(左),阈值 0.0002;传统点映射方法(右).白色表示安全状态
Fig. 2 Failure time contour of Duffing system: PMUCR method (left), with threshold 0.0002; traditional point mapping method (right). The white area indicates the security status

由表 1 可以看到,当阈值设置为 0.0001 时, PUMCR 计算时间只有点映射的 17.069%,状态误差只有 2.7%,平均步数相对误差只有 1.47%.随着参考点判定阈值的逐步缩小,PMUCR 方法计算耗时逐渐增加,精度逐渐升高,在阈值取 $1.9 \times$

10^{-4} 时,两种算法在定性方面已没有误差.

算例 2: 简谐激励的双稳态结构

近年来,双稳态结构在能量收集领域等取得了广泛应用^[13],因此成为一类研究热点.本算例为一类受简谐激励的双稳态结构系统的方程如下^[14]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -cy - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3 + F\sin\theta \\ \dot{\theta} &= \Omega\end{aligned}\tag{12}$$

式中, $a_1=0.8152, a_2=-1.404\ 6, a_3=0.5, c=0.02, F=0.05, \Omega=0.902\ 88$.

系统的状态空间为三维, x 取值范围为 $[-1, 0.819\ 4], y$ 取值范围为 $[-0.6, 0.6], \theta$ 取值范围为 $[0, 2\pi]$, 此系统在不受激励时有两个稳定平衡点 $[(0, 0) \text{ 和 } (1.98, 0)]$ 以及一个鞍点 $(0.8194, 0)$, 鞍点可以认为是两个稳态之间的分界点, 因此取鞍点右侧为失效区域, 则失效范围为 $x > 0.8194$. 将状态空间划分为 $100 \times 100 \times 180$ 个胞, 积分步长为 0.01 个激励周期, 积分步数上限为 5000. 不同阈值时 PMUCR 和传统点映射方法的比较如表 2 所示. 由于系统是三维, 结果用指定相位的二维切片来展示. 图 3 给出了阈值 0.0006 时, 相位 $\theta=0.0349$ 的 PMUCR 方法计算简谐激励的双稳态结构模型的失效时间云图与传统方法的比较.

表 2 简谐激励的双稳态结构 PMUCR 和传统点映射方法的比较
Table 2 Comparison of PMUCR and traditional point mapping method of bistable structure under harmonic excitation

阈值	计算时间比	状态误差	平均步数相对误差
0.001 000	0.375 27	0.004 492 80	0.002 826 10
0.000 900	0.492 78	0.003 782 80	0.002 323 60
0.000 600	0.663 50	0.001 790 60	0.001 058 60
0.000 500	0.755 36	0.001 261 10	0.000 736 69
0.000 442	0.775 95	0.000 999 44	0.000 575 69
0.000 400	0.783 69	0.000 808 33	0.000 448 81

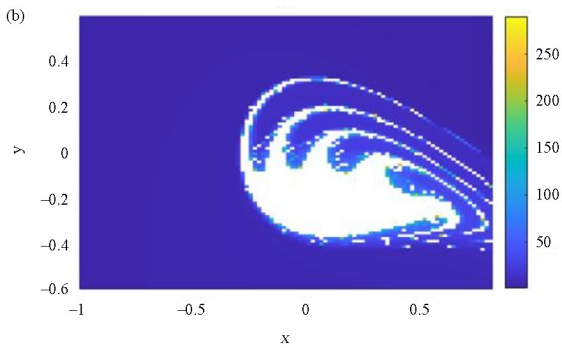
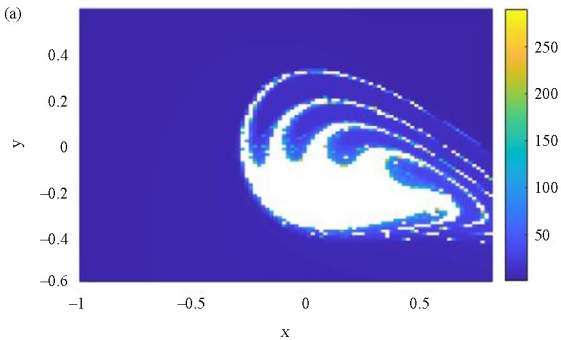


图 3 简谐激励的双稳态结构模型失效时间云图(相位 $\theta=0.0349$): PMUCR 方法(上), 阈值 0.0006; 传统点映射方法(下)
Fig. 3 Failure time contour of bistable structure model under harmonic excitation (phase $\theta=0.0349$): PMUCR method (upper), with threshold 0.0006; traditional point mapping method (below)

由表 2 所示, 在阈值为 0.001 时, PMUCR 方法计算时间仅为点映射的 23.512%, 精度只有 0.449 28% 的偏差, 平均步数误差也不到 0.3%. 当参考点判断阈值缩小到 0.000 442, 误差已不到 0.1%, 时间只有 77.6%, 提速效果非常明显.

算例 3: 弹簧负载倒立摆(SLIP)模型

此模型是一类典型的混杂(hybrid)动力系统, 为了模拟足式运动而提出. 该系统的模型如图 4 所示, 由弹簧和质点组成, 仅对质点的速度和高度两个维度分析.

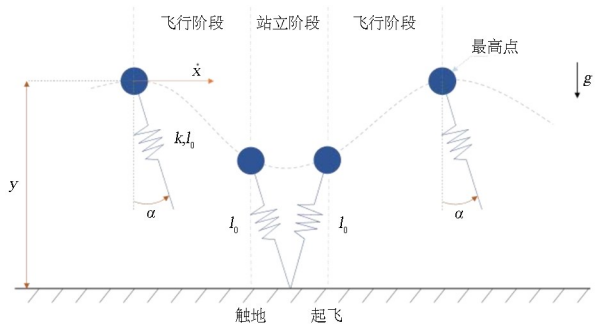


图 4 SLIP 模型的示意图
Fig. 4 A schematic diagram of SLIP model

模型整个运动分为两个阶段: 飞行阶段和站立阶段.

飞行阶段的方程为自由落体:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -g\end{aligned}\tag{13}$$

站立阶段的方程为:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{k}{m} \frac{(l_0 - l)}{l} (x - x_f) \\ \ddot{y} &= \frac{k}{m} \frac{(l_0 - l)}{l} y - g\end{aligned}\tag{14}$$

两阶段过渡条件分别是:

触地(飞行阶段到站立阶段):

$$y = l_0 \cos \alpha \tag{15a}$$

起飞(站立阶段到飞行阶段):

$$\sqrt{(x - x_f)^2 + y^2} = l_0 \tag{15b}$$

SLIP 模型失效有多种形式:在飞行阶段有坠落失效($y < 0$),站立阶段有逆向($\dot{x} < 0$)和坠落失效($y < 0$),起飞时有下落($\dot{y} < 0$)和坠落失效($y < 0$). 方程(13)~(15)中各参数的含义及取值可参见文献[15]. 本文将触地角度 α 固定为 0.36 .

从方程(13)和(14)可以看出系统是两自由度四维系统,但方程右端与 x 无关. 若取每一次飞行状态最高点处($\dot{y} = 0$)的水平速度 \dot{x} 和高度 y ,则系统可以看成是一个二维映射:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \dot{x}_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{16}$$

因此本节 SLIP 模型的初始条件在二维空间中选择,设 \dot{x} 取值范围为 $[1.2, 1.6]$, y 范围为 $[0.9359, 1.35]$. 将状态空间划分为 200×200 个胞. 求解站立阶段方程(14)的积分步长为 0.001 . 该算例中的步数指方程(16)中的 n ,上限为 100 . 不同阈值时 PMUCR 和传统点映射方法的比较列入表 3. 图 5 给出了阈值 0.0005 的 PMUCR 方法计算 SLIP 失效时间云图与传统方法的比较.

表 3 SLIP 模型 PMUCR 和传统点映射方法的比较

Table 3 Comparison of PMUCR and traditional point mapping methods of SLIP model

阈值	计算时间比	状态误差	平均步数相对误差
0.000 50	0.137 76	0.007 475	0.006 304 8
0.000 40	0.192 36	0.005 500	0.005 304 7
0.000 30	0.272 19	0.004 500	0.004 132 1
0.000 20	0.360 25	0.002 975	0.003 157 0
0.000 10	0.438 25	0.001 575	0.002 737 3
0.000 01	0.465 71	0.000 900	0.002 404 5

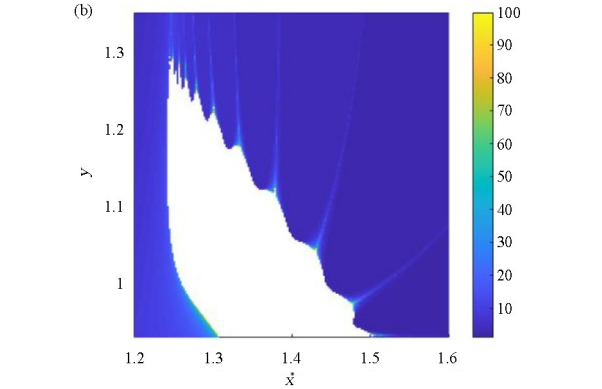
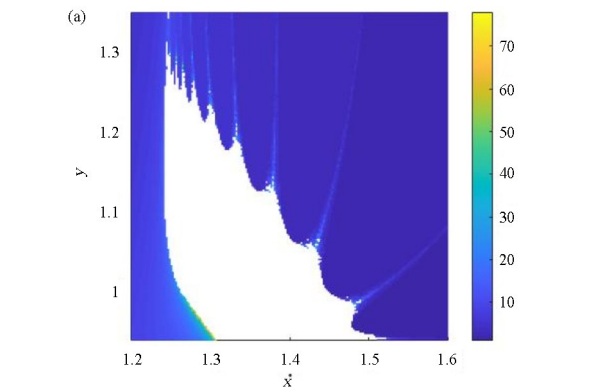


图 5 SLIP 模型失效时间云图:
PMUCR 方法(上),阈值 0.0005;传统点映射方法(下)
Fig. 5 Failure time contour of SLIP model:PMUCR method (upper), with threshold 0.0005; traditional point mapping method (below)

由表 3 所示,在阈值为 0.0005 时,PMUCR 方法计算时间占点映射时间的 13.776% ,状态误差只有 0.7475% ,平均步数相对误差只有 0.63% . 随着阈值缩小到 0.00001 ,PMUCR 方法花费时间仍不到点映射的一半,状态误差已缩小到 0.09% .

4 结论

本文提出了一种改进的 PMUCR 方法,可对非线性动力系统状态空间失效区域实现定量计算,并实现了给定状态空间失效区域和系统运行时间时,非线性动力系统状态的失效与否及失效时间的高效计算. 通过对三个典型案例的结果可以看出,Duffing 系统、受迫双稳态系统和 SLIP 模型的计算效率均有不同程度的提升,误差也均可令人满意. 因此改进后的 PMUCR 方法能够显著提高判断失效状态和计算失效时间的效率. 总体来看,随着参考点阈值的减小,误差随之减小,但计算时间会随之增加.

本文的方法虽然在满足较好的精度前提下,实现了计算效率的提升,但仍存在一些不足. 例如对于 SLIP 模型算例,其失效区域边界较为复杂,通过对比失效时间云图可以看到,状态误差主要发生在蓝色与白色区域的交界处以及“尾迹”处,其原因和改善方法需要进一步分析. 未来将改善该方法在复杂形状乃至分形失效区域问题中的计算精度.

参考文献

[1] 陈丽霞, 石建飞. 路面激励与电磁激励下电动轮车辆系统非线性全局动态特性研究[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(6): 88—98.

- CHEN L X, SHI J F. Nonlinear global dynamic characteristics of electric wheeled vehicle systems with pavement and magnetic excitations [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 88—98. (in Chinese)
- [2] HSU C S. Cell-to-cell mapping: A method of global analysis for nonlinear systems [M]. New York: Springer New York, 2013.
- [3] 徐健学, 洪灵. 全局分析的广义胞映射图论方法[J]. *力学学报*, 1999, 31(6): 724—730.
- XU J X, HONG L. Generalized cell mapping digraph method for global analysis [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1999, 31(6): 724—730. (in Chinese)
- [4] YUE X L, CUI S P, ZHANG H, et al. Generalized cell mapping method with deep learning for global analysis and response prediction of dynamical systems [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2021, 31(15): 2150229.
- [5] XIONG F R, QIN Z C, DING Q, et al. Parallel cell mapping method for global analysis of high-dimensional nonlinear dynamical systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2015, 82(11): 111010.
- [6] QIN Z C, XIONG F R, DING Q, et al. Multi-objective optimal design of sliding mode control with parallel simple cell mapping method [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2017, 23(1): 46—54.
- [7] REGA G, LENCI S. Dynamical integrity and control of nonlinear mechanical oscillators [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2008, 14(1/2): 159—179.
- [8] MENCK P J, HEITZIG J, MARWAN N, et al. How basin stability complements the linear-stability paradigm [J]. *Nature Physics*, 2013, 9: 89—92.
- [9] HELLMANN F, SCHULTZ P, GRABOW C, et al. Survivability of deterministic dynamical systems [J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 29654.
- [10] SCHOENMAKERS S, FEUDEL U. A resilience concept based on system functioning: a dynamical systems perspective [J]. *Chaos*, 2021, 31(5): 053126.
- [11] JIANG J, XU J X. A method of point mapping under cell reference for global analysis of nonlinear dynamical systems [J]. *Physics Letters A*, 1994, 188(2): 137—145.
- [12] 冷萌萌, 钱有华. 周期激励下广义离散 Duffing 系统的多稳态分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(10): 18—25.
- LENG M M, QIAN Y H. Multi-stability analysis of generalized discrete duffing systems under periodic excitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(10): 18—25. (in Chinese)
- [13] 张莹, 高艺玲, 段霞霞, 等. 双不确定参数作用下双稳态能量采集系统的随机响应分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(10): 72—84.
- ZHANG Y, GAO Y L, DUAN X X, et al. Stochastic response analysis of bistable energy harvesting system with double uncertain parametters [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(10): 72—84. (in Chinese)
- [14] ORLANDO D, GONÇALVES P B, REGA G, et al. Influence of transient escape and added load noise on the dynamic integrity of multistable systems [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2019, 109: 140—154.
- [15] ZAYTSEV P, CNOPS T, DAVID REMY C. A detailed look at the SLIP model dynamics: bifurcations, chaotic behavior, and fractal basins of attraction [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2019, 14(8): 081002.