

# 结构动力学基本概念理解与工程实践运用

孙齐<sup>†</sup>

(武汉理工大学 船海能动学院, 武汉 430063)

**摘要** 结构动力特性的相关理论与原理,被越来越广泛地应用于各个工程领域,但对其基本概念与基本原理的理解与掌握仍然需要进一步推进。一些基本概念看似很基础也很完善,但没有准确理解与掌握,便难以科学地运用到工程实践中。基于理论分析与推导证明对结构固有频率与圆频率,结构第 1 阶固有频率与基频,多自由度系统结构阻尼与模态阻尼比,固有频率在桥梁技术状态评估中的运用,Rayleigh 商之注释等结构动力学中的常见问题进行了深入分析与辨析,明晰了一些基本概念,使结构动力学理论体系更为完备。

**关键词** 结构动力学, 固有频率, 模态分析, 多自由度系统, 结构阻尼, 模态阻尼比, Rayleigh 商

中图分类号:U466.1

文献标志码:A

## Understanding of Basic Concepts of Structural Dynamics and Application in Engineering Practice<sup>\*</sup>

Sun Qi<sup>†</sup>

(College of Ship, Sea and Energy, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China)

**Abstract** The relevant theories and principles of structural dynamic characteristics are more and more widely used in various engineering fields, but the understanding and mastery of their basic concepts and principles still need to be further promoted. Some basic concepts seem to be very basic and perfect, but without accurate understanding and mastery, it is difficult to apply them to engineering practice scientifically. Based on theoretical analysis, some common problems in structural dynamics, such as structural natural frequency and circular frequency, structural first natural frequency and fundamental frequency, structural damping and modal damping ratio of multi-degree-of-freedom system, application of natural frequency in bridge technical state evaluation, Rayleigh quotient annotation and so on, are deeply analyzed and analyzed, and some basic concepts are clarified. It makes the theoretical system of structural dynamics more complete.

**Key words** structural dynamics, natural frequency, modal analysis, multi-degree-of-freedom system, structural damping, modal damping ratio, Rayleigh quotient

## 引言

随着科学技术的进步,工程结构正朝着大型化

与轻型化的方向发展。在保证工程结构强度、刚度及稳定性的同时,对结构舒适性与可靠性的要求也越来越高。因此,涉及结构动力特性的相关理论与

2024-01-03 收到第 1 稿, 2024-01-24 收到修改稿。

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail:3511899512@qq.com

原理,被越来越广泛地应用于各个工程领域,特别是在航空航天、机械工程、土木工程、水利工程、船舶海洋工程、交通运输工程等学科。

相对而言,《结构动力学》的理论体系比较完备,其建立在牛顿力学基础上的基本概念与基本原理也比较成熟。由于涉及较多的高等数学知识,技术层面上对其应用者具有较高的要求。特别是随着“结构试验模态分析”理论的发展与工程运用,进一步拓展了《结构动力学》的内涵与应用范畴。然而,对于相当多从事工程结构的科技工作者、以及相关的工程技术人员,乃至高等院校的教师与研究生,尽管曾系统地接受过《结构动力学》课程的训练,但对其基本概念与基本原理的理解与掌握可谓是不深不透,对其运用也只能是生搬硬套;更有甚者只是知晓一些专业名词,从而给自己的工作和学习带来了诸多的不便与困惑。

本文共挑选了六个《结构动力学》中被忽视的有关基本概念、基本原理与工程应用问题给予了说明与辨析,旨在抛砖引玉,唤醒相关科技工作者对基础理论知识的重视,更加完善和充实结构动力学的内容。只有准确理解并掌握结构动力学的基本概念与基本原理,才可能避免在工程应用中犯错误。尽管本文中的有些内容(如结构“基频”概念的辨析)似乎看起来太过基础,但也更容易被忽视。

## 1 结构固有频率与圆频率

### 1.1 问题的提出

在研究工程结构的振动问题中,频率是一个重要的物理量,一般用  $f$  (frequency) 来表示,其表征结构振动(通过平衡位置)快慢的程度,即结构单位时间内振动的次数,单位是次/秒或赫兹(Hz)。与此相对应还有另外一个物理量——圆频率,习惯用  $\omega$  来表示,其单位是弧度/秒(rad/s,或 1/s)。鉴于函数的周期性,频率  $f$  与圆频率  $\omega$  之间满足关系式  $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$ ,其中  $T$  称为周期(period),单位是秒(s),表示完成一次全振动所需的时间。于是,有些教科书上便定义圆频率  $\omega$  表示  $2\pi$  个单位时间内结构振动的次数<sup>[1-3]</sup>。从频率  $f$  与圆频率  $\omega$  之间的相互关系式上乍一看,是这么一回事。然而,对圆频率物理内涵( $2\pi$  个单位时间内结构振动的次数)的如此诠释,其严谨性与科学性不免让人质疑。

### 1.2 旋转矢量与圆频率

对于图 1(a)所示的单自由度(SDOF)系统,物块 A 质量为  $m$ ,弹性元件线刚度为  $k$ ;相对于静平衡位置,物块 A 沿铅垂方向作直线往复运动

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1)$$

式中: $A$  为振幅,  $\omega$  为圆频率,  $\varphi_0$  为初相位。

同理,对于图 1(b)所示的单自由度系统,相对于静平衡位置,物块 A 沿水平方向作直线往复运动

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

在式(1)和式(2)中,其圆频率为

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (3)$$

由式(3)可知:圆频率  $\omega$  取决于系统质量  $m$  与线刚度  $k$ ,其表征了系统的固有特性。那么,对于做直线往复运动的质点,理应用频率来表示其振动的快慢(单位时间内振动的次数)。为什么式(1)和式(2)中的  $\omega$  被称为圆频率呢?

为此,引入图 2 所示的旋转矢量  $OA$ ,其绕 O 点以匀角速度  $\omega$  逆时针方向转动。则复平面内 A 点的运动方程为

$$\vec{z} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (4)$$

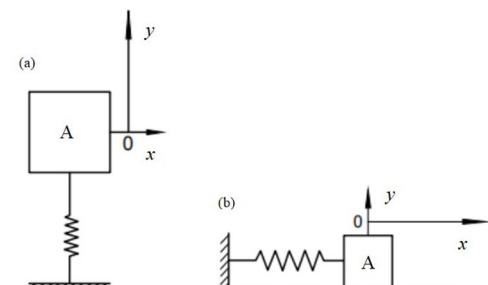


图 1 单自由度系统的运动:(a)竖直运动;(b)水平运动

Fig. 1 The vibration of single-degree-of-freedom system;  
(a) Vertical vibration; (b) Horizontal vibration

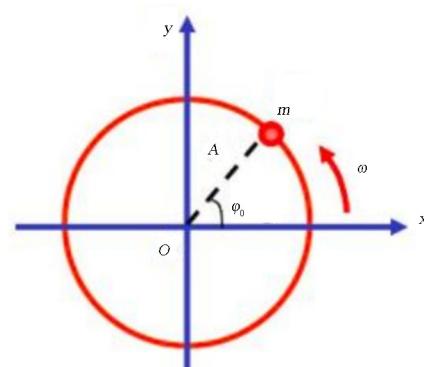


图 2 旋转矢量在复平面内的匀速转动

Fig. 2 The rotation vector rotates at a uniform angular speed in the complex plane

则有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\vec{z}) &= x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \operatorname{Im}(\vec{z}) &= y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (5)$$

将式(5)与式(1)、式(2)比较可知:两者表达式完全相同。所以,以匀角速度  $\omega$  绕  $O$  点旋转的矢量  $OA$ , 可用来描述质点  $A$  沿着直线的往复运动。那么, 表征矢量  $OA$  绕  $O$  点旋转快慢的匀角速度——圆频率, 亦可用来描述质点  $A$  沿着直线往复运动的快慢。

### 1.3 频率与圆频率之比较

比较质点  $A$  沿着直线的往复运动与矢量  $OA$  绕着  $O$  点的匀角速度转动, 根据各自的特点, 从而可正确理解质点  $A$  的振动频率与矢量  $OA$  绕  $O$  点旋转的圆频率的物理内涵。

(1) 质点  $A$  沿着直线的往复运动与旋转矢量  $OA$  的定轴匀速转动, 这是两个完全不同的力学模型。但由式(5)可知, 两者具有相同的数学表达式。特别要指出, 复数表达式的引入, 给其数学处理带来了极大的便利。

(2) 质点  $A$  作直线运动, 其运动的快慢用速度  $\dot{v}$  来表示(瞬时值); 而质点  $A$  单位时间内直线往复运动(振荡)的次数, 用频率  $f$  来表示。

(3) 旋转矢量  $OA$  作定轴匀速转动, 其转动的快慢用角速度  $\omega$  来表示(瞬时值); 又由于其是一定值, 亦可用来表征旋转矢量  $OA$  单位时间内转动的转数  $r = \omega / 2\pi$ , 单位是转/秒, 故角速度  $\omega$  被称为圆频率。

(4) 由式(3), 利用质量  $m$  与线刚度  $k$  可求得圆频率  $\omega$ , 单位是弧度/秒(rad/s), 进而可获得频率  $f = \omega / 2\pi$ 。

(5) 有些教科书上定义圆频率  $\omega$  表示  $2\pi$  个单位时间内结构振动的次数, 其在物理概念与力学内涵上是不准确的。

## 2 结构第 1 阶固有频率与基频之辨析

### 2.1 问题的提出

任一受激励力作用的线弹性结构, 对其时域响应信号进行频谱分析, 通常可识别出结构的低阶固有频率。目前, 一些教科书上习惯称呼结构的第 1 阶固有频率(First order frequency)为基频、基本频

率或第一频率<sup>[3-5]</sup>。且在结构设计中, 第 1 阶固有频率常常被作为评价结构技术状态的重要参数<sup>[6]</sup>。由振型叠加原理可知, 结构的响应是结构各阶模态加权叠加的结果; 理论上, 结构各阶模态的地位是等同的。因此, 将结构的第 1 阶固有频率另行称呼为基频、基本频率或第一频率等, 客观上应该具有其他目的与意义。事实上, 对于很多结构工程师来说, 这种潜在的强化作用一直顽固地存在着, 并在结构动力分析或结构动态试验中得到了体现。

### 2.2 周期信号的基频

对于周期信号  $f_T(t)$ , 若在区间  $[-T/2, T/2]$  上满足狄利克雷(Dirichlet)条件, 则可展开成傅里叶(Fourier)级数

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\omega t + b_j \sin j\omega t) \quad (6)$$

且有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) dt \\ a_j &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \cos j\omega t dt \quad (j = 1, 2, \dots) \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) \sin j\omega t dt \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

式中:  $a_j$  与  $b_j$  为傅里叶系数;  $\omega_1 = \omega = 2\pi/T$  为基频, 且  $\omega_j = j\omega_1$  为倍频。

在式(6)中,  $\{1, \cos \omega t, \sin \omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots, \cos j\omega t, \sin j\omega t, \dots\}$  称为傅里叶基, 其正交性可表示为

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin i\omega t \cos j\omega t dt &= \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin i\omega t \sin j\omega t dt &= \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

由傅里叶系数  $a_j$  与  $b_j$  构成了周期信号  $f_T(t)$  的频谱图(一系列离散谱); 一旦识别其基频  $\omega_1 = \omega$ , 其他各阶频率  $\omega_j = j\omega$  亦已获得。所以, 在信号分析中周期信号的基频  $\omega$  具有特别重要的理论意义。

若  $T \rightarrow +\infty$ , 则周期信号  $f_T(t)$  拓展为  $f(t)$ , 此时的傅里叶级数转化为傅里叶积分, 非周期信号的离散频谱图便将转化为连续谱。

### 2.3 结构第 1 阶固有频率之辨

了解了信号分析中周期信号基频的概念之后, 再来看看结构的第 1 阶固有频率。在结构动力学教

科书中,将结构第1阶固有频率称呼为基频、基本频率或第1频率等,其客观上夸大或强化了第1阶模态对结构响应的贡献与作用,其是否科学合理,可以从以下三个方面给予理解<sup>[7]</sup>:

(1)式(6)表明: $f_T(t)$ 是在傅里叶基 $\{1, \cos\omega t, \sin\omega t, \cos 2\omega t, \sin 2\omega t, \dots\}$ 上的展开,一旦识别出第1阶频率 $\omega_1(\omega_1 = \omega)$ ,则其他各阶频率 $\omega_j = j\omega(j = 1, 2, \dots)$ 均可获得。所以,周期信号第1阶频率称呼为基频,具有特别的内涵,其合理性无可厚非。

(2)由振型叠加原理, $n$ 自由度结构的响应表示为

$$u(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^n \eta_j(t) \{\varphi(x, y, z)\}_j \quad (9)$$

式中: $\{\varphi(x, y, z)\}_j$ 为结构第 $j$ 阶位移模态(模态基), $\eta_j(t)$ 为第 $j$ 阶模态坐标(或模态参与因子)。

结构的第 $j$ 阶固有频率 $\omega_j$ ,对应相应的特征向量 $\{\varphi\}_j$ ,其关于质量矩阵和刚度矩阵加权正交(由基的性质所决定)。式(9)表明:结构的响应 $u(x, y, z, t)$ 是在模态基 $\{\varphi\}_j(j=1, 2, \dots, n)$ 上的展开,各阶模态的贡献取决于模态参与因子 $\eta_j(t)$ 。若将结构各阶固有频率按照从小到大的顺序依次排列在一起,就构成了结构各阶固有频率的阶(Order),理论上各阶模态的地位彼此是等同的。与周期信号 $f_T(t)$ 的频谱分析不同,即使识别了结构的第1阶固有频率 $\omega_1$ ,仍然无法获取结构的第 $j$ 阶固有频率 $\omega_j(j=1, 2, \dots, n)$ ,因为 $\omega_j \neq j\omega_1$ 。所以,这种类似于周期信号的做法,将结构第1阶固有频率冠以基频、基本频率或第1频率等称呼,没有任何的理论和工程意义。

(3)按照中文用语的习惯去理解,如果将结构的第1阶固有频率称之为第1频率,那么在结构动力分析中第1阶模态(对应第1频率)一定会比第2阶模态(对应第2频率)更加重要,其客观上夸大或强化了结构第1阶模态对响应的贡献与作用。事实上,很多结构工程师在结构动力分析、结构设计或结构动态试验中,特别关注结构的第1阶模态,或者仅关注结构的第1阶模态,这是一种错误的导向。

由本论题辨析可知:将结构第1阶固有频率冠以基频、基本频率或第1频率等称呼,没有任何的理论和工程意义;恰恰相反,制造了结构动力学概念上的混乱,客观上夸大或强化了结构第1阶模态对响应的贡献与作用,是一种错误的导向。其根本原因是缺乏对结构固有频率物理内涵的真正理解。

### 3 多自由度系统结构阻尼与模态阻尼比

#### 3.1 问题的提出

结构阻尼的作用机理十分复杂,常用的阻尼模型有:结构粘性阻尼模型、结构位移阻尼模型和结构干摩擦阻尼模型等。尽管黏滞阻尼模型与实际工程结构之间还存在着一些差异,但基本能反映结构动力响应的变化规律,且给结构的动力响应分析带来了极大的便利,因而得到了广泛的应用<sup>[8,9]</sup>。为此,特别定义了结构阻尼比来定量地表征结构阻尼的强弱程度。相关规范对常用工程材料的结构阻尼比给定了一个取值范围,如钢结构为(0.01~0.03)、木材结构为(0.04)、混凝土结构为(0.03~0.08)等<sup>[10,11]</sup>。乍一看来,其似乎特别科学严谨。那么,如何理解相关规范中常用工程材料结构阻尼比的取值呢?

#### 3.2 结构模态阻尼比的识别

目前,识别结构模态阻尼比的试验方法有两类:一类是利用系统频响函数识别结构模态阻尼比的频率域方法:如半功率带宽法、放大因子法、SFD法等;另外一类是利用时程响应信号识别结构模态阻尼比的时间域方法:如对数衰减法、阶跃响应法和ITD法等<sup>[12-15]</sup>。由结构动力学理论可知:结构在振动过程中其响应表现为多阶模态的叠加;各阶模态的阻尼是不相同的,各阶模态的阻尼比自然也是不相同。当前试验模态分析技术均识别的是结构的模态阻尼比。

#### 3.3 小结

所以,对于单自由度系统,可以说识别的是系统的阻尼比;而对于多自由度系统,只能说识别的是系统的模态阻尼比。严格意义上,当前相关规范对常用工程材料的结构阻尼比给定了一个取值范围,是具有针对性的,但也有其局限性,其提法概念上是不严谨的。

### 4 固有频率在桥梁技术状态评估中的运用与质疑

#### 4.1 桥梁结构技术状态评估

在桥梁结构的动载试验中,结构固有频率被用来评价其技术状态<sup>[6]</sup>。一般情况下,结构的阻尼均

比较小,因此在结构动力特性的计算模态分析中往往不计结构阻尼以获取结构的振型和无阻尼固有频率  $\omega_{nj}$  ( $j=1,2,\dots$ );而在结构的动态特性的试验中,获取的却是结构有阻尼固有频率  $\omega_{dj}$  ( $j=1,2,\dots$ ). 理论上有<sup>[3,9,11]</sup>

表 1 实测固有频率评定桥梁结构技术状态标准  
Table 1 Standard for evaluating the technical status of bridge structures by measured natural frequencies

桥梁部件		桥梁上部结构		桥梁下部结构	
评定标度	$\omega_{dj}/\omega_{nj}$	技术状况	$\omega_{dj}/\omega_{nj}$	技术状况	
1	$\geq 1.10$	良好	$\geq 1.20$	良好	
2	$1.00 \sim 1.10$	较好	$1.00 \sim 1.20$	较好	
3	$0.90 \sim 1.00$	较差	$0.95 \sim 1.00$	较差	
4	$0.75 \sim 0.90$	差	$0.80 \sim 0.95$	差	
5	0.75 以下	危险	0.80 以下	危险	

备注:1. 对缺少资料的中小跨径钢筋混凝土或预应力混凝土桥梁,可按公式  $\omega_{d1}=2\pi\times 90.6l^{-0.923}$  计算上构第 1 阶竖弯自振频率;  
2. 未做检测的构件其评定标度值取 1.

表 1 给定的桥梁结构技术状态标准理解为:  
 $\omega_{dj}=\omega_{nj}$  表明实际构造物的刚度大于设计值,因而桥梁结构的质量是可靠的.

## 4.2 质疑

显然,表 1 有关结论有悖于结构动力学理论,其潜在掩盖了另外一种事实:在桥梁结构实测固有频率正确的前提下,所建桥梁结构的有限元模型有误(边界条件给定的不合理或材料物理参数取值不合理等).而更重要的是:以此桥梁结构有限元模型而进行的结构静/动力计算结果的正确性与可靠性值得质疑<sup>[16,17]</sup>.但工程中由于阻尼较小,总体计算误差在工程容许的范围内是可以接受的.

## 5 Rayleigh 商之注释

### 5.1 Rayleigh 商

对于长为  $l$ 、抗弯刚度为  $EI$ 、单位长度质量为  $\bar{m}$  的匀质等截面梁,其横向自由振动方程为<sup>[9,11]</sup>

$$y(x,t)=Y(x)\sin(\omega t+\alpha) \quad (11)$$

式中:  $Y(x)$  为位移幅值,  $\omega$  为固有频率,  $\alpha$  为初相位.

梁结构第  $j$  阶固有频率  $\omega_j$  可表示为

$$\omega_j^2=\frac{\int_0^l EI[Y_j''(x)]^2 dx}{\int_0^l \bar{m}[Y_j(x)]^2 dx} \quad (12)$$

式中:  $Y_j(x)$  为第  $j$  阶位移模态,  $Y_j''(x)$  为第  $j$  阶曲率模态.

$\omega_{dj}=\omega_{nj}\sqrt{1-\zeta_j^2}<\omega_{nj}$  ( $j=1,2,\dots$ ) (10)  
式中:  $\zeta_j$  为结构第  $j$  阶模态阻尼比.

文献[6]中规定,通过桥梁结构的计算固有频率与实测固有频率之比,可用来评价桥梁结构整体性能和技术状况,见表 1.

备注:1. 对缺少资料的中小跨径钢筋混凝土或预应力混凝土桥梁,可按公式  $\omega_{d1}=2\pi\times 90.6l^{-0.923}$  计算上构第 1 阶竖弯自振频率;  
2. 未做检测的构件其评定标度值取 1.

那么,对于任一满足位移边界条件(DBC)的位移函数  $Y(x)$ , Rayleigh 商定义为

$$\omega^2=R(Y)=\frac{\int_0^l EI[Y''(x)]^2 dx}{\int_0^l \bar{m}[Y(x)]^2 dx} \quad (13)$$

由式(13)可知, Rayleigh 商为  $Y(x)$  的函数.

### 5.2 几点注释

从结构模态能量的观点考虑, Rayleigh 商给出了结构某阶固有频率的近似求解方法. 鉴于式(13)说明如下:

(1) Rayleigh 商  $R(Y)$  应视为一整体,有些教材上称之为 Rayleigh 比<sup>[3]</sup>,是欠考虑的;

(2) Rayleigh 商  $R(Y)$  为一泛函,是一系列满足边界条件的  $Y(x)$  函数;  $\delta[R(Y)]=0$  取驻立值,为式(13)的最优解;

(3) Rayleigh 商之值  $\omega^2$  大于或等于结构固有频率的真实值.

### 致谢

衷心感谢我的导师张开银教授对文章的指导和支持!

### 参考文献

- [1] 王光远. 建筑结构的振动[M]. 北京: 科学出版社,

- 1978.
- WANG G Y. Vibration of building structure [M]. Beijing: Science Press, 1978. (in Chinese)
- [2] 张子明, 杜成斌, 周星德. 结构动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- ZHANG Z M, DU C B, ZHOU X D. Dynamics of structures [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2008. (in Chinese)
- [3] 包世华. 结构动力学[M]. 武汉: 武汉理工大学出版社, 2017.
- BAO S H. Structural dynamics [M]. Wuhan: Wuhan University of Technology Press, 2017. (in Chinese)
- [4] 王肇民. 高耸结构振动控制[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997.
- WANG Z M. Vibration control of high-rise structures [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997. (in Chinese)
- [5] 谢官模. 振动力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007.
- XIE G M. Vibration mechanics [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007. (in Chinese)
- [6] 中华人民共和国交通运输部. 公路桥梁承载能力检测评定规程: JT/T J21—2011[S]. 北京: 人民交通出版社, 2011.
- Specification for inspection and evaluation of load-bearing capacity of highway bridges: JT/T J21—2011 [S]. Beijing: China Communications Press, 2011. (in Chinese)
- [7] 张开银, 刘亚军, 赵桂林, 等. 结构动力学应用中若干基本概念的探讨[J]. 武汉理工大学学报: 交通科学与工程版, 2010, 34(6): 1124—1128.
- ZHANG K Y, LIU Y J, ZHAO G L, et al. Discussion on some basic concepts about structural dynamics in application [J]. Journal of Wuhan University of Technology: Transportation Science & Engineering, 2010, 34(6): 1124—1128. (in Chinese)
- [8] 刘晶波, 杜修力. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2005.
- LIU J B, DU X L. Structural dynamics [M]. Beijing: China Machine Press, 2005. (in Chinese)
- [9] (美)R. 克拉夫, (美)J. 彭津. 结构动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 176181.
- CLOUGH R, PENZIEN J. Dynamics of structures [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006: 176181. (in Chinese)
- [10] 中华人民共和国建设部、国家质量监督检验检疫总局. 建筑抗震设计规范: GB 50011—2001[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2004.
- General Administration of Quality Supervision, Inspection and Quarantine of the People's Republic of China. Code for seismic design of buildings: GB 50011—2001 [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2004. (in Chinese)
- [11] 邹经湘. 结构动力学 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996.
- ZOU J X. Structural dynamics [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1996. (in Chinese)
- [12] 俞云书. 结构模态试验分析 [M]. 北京: 宇航出版社, 2000.
- YU Y S. Experimental structural modal analysis [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2000. (in Chinese)
- [13] 傅志方. 振动模态分析与参数辨识 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1990.
- FU Z F. Vibration modal analysis and parameter identification [M]. Beijing: Machine Industry Press, 1990. (in Chinese)
- [14] 周传荣, 赵淳生. 机械振动参数识别及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1989.
- ZHOU C R, ZHAO C S. [M] Mechanical vibration parameter identification and its application. Beijing: Science Press, 1989. (in Chinese)
- [15] 黄方林, 何旭辉, 陈政清, 等. 识别结构模态阻尼比的一种新方法[J]. 土木工程学报, 2002, 35(6): 20—23+31.
- HUANG F L, HE X H, CHEN Z Q, et al. A new approach for identification of modal damping ratios for a structure [J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(6): 20—23+31. (in Chinese)
- [16] 张开银, 黎晨, 赵桂林, 等. 结构动力学在桥梁工程应用中若干问题研究[J]. 固体力学学报, 2010 (增刊1): 249—254.
- ZHANG K Y, L C, ZHAO G L, et al. Discussion on some problems about the application of structural dynamics in bridge engineering [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010(S1): 249—254.
- [17] 张开银, 向木生. 成桥动态检测技术分析 [M]//严新平, 曹钟勇. 中国交通研究与探索. 北京: 人民交通出版社, 1999: 365—368.
- ZHANG K Y, XIANG M S. Analysis of dynamic detection technology of completed bridge [M]// YAN X P, CAO Z Y. Traffic Research and Exploration in China. Beijing: China Communications Press 1999, 365—368. (in Chinese)