

一个具有共存吸引子的混沌系统分析及电路设计^{*}

吕恩胜[†]

(河南应用技术职业学院 机电工程学院, 郑州 450042)

摘要 为了产生共存吸引子, 通过在 Chen 系统的第一个方程加入 1 个乘积项, 使得每个方程都有 1 个非线性项, 构建了一个新的 Chen 系统。Matlab 仿真表明, 新的 Chen 系统不仅存在多种类型的共存吸引子现象, 还有逆倍周期分岔现象, 含有丰富的混沌动力学行为。为了让新的 Chen 系统更好地应用, 设计了模拟器件电路和 STM32 数字电路, 电路数值仿真和物理实验一致。

关键词 混沌系统, 共存吸引子, 混沌电路, 电路仿真

中图分类号:N93

文献标志码:A

Analysis and Circuit Design of a Chaotic System with Coexisting Attractors^{*}

Lv Ensheng[†]

(School of Mechanical & Electrical Engineering, Henan Vocational College of Applied Technology,
Zhengzhou 450042, China)

Abstract In order to generate the coexisting attractor, a new Chen system is constructed by adding a product term to the first equation of Chen system, and each equation has a nonlinear term. Matlab simulation shows that the new Chen system is not only the coexistence attractor phenomenon of various types, but also the inverse periodic bifurcation phenomenon and abundant chaotic characteristics. For the application of the new Chen system, the simulator circuit and STM32 digital circuit are designed, and the numerical simulation is consistent with the physical experiment.

Key words chaotic system, coexisting attractor, chaotic circuit, circuit simulation

引言

1963 年发现 Lorenz 系统有混沌运动^[1], 拉开了混沌学的研究序幕, 之后, 一些学者又提出了 Chen 系统、Jerk 系统等混沌系统^[2-3], 并在通信、机械、电力多个领域有着广泛的应用^[4-6], 混沌科学成为近代研究的热点问题。近些年来, 研究发现, 通过对经典混沌系统的改进, 可使系统的运行轨迹收敛于不同的吸引子上, 产生共存吸引子现象, 即有多

种稳定模态。文献[7]~文献[11]通过对一些混沌系统增、减线性与非线性项, 得到新的混沌系统, 在特定的参数下, 可以产生共存混沌吸引子、共存周期吸引子等现象, 反映了系统稳定状态的多样性, 相较原混沌系统具有更为复杂的动力学行为。通过控制初值即可得到不同的稳定模态, 方便应用于多模式工作场景, 此外, 共存吸引子良好的随机性, 在保密通信方面也有着良好的应用前景^[12,13]。共存吸引子的研究具有理论意义和工程应用价值, 因

2023-12-08 收到第 1 稿, 2024-07-15 收到修改稿。

* 河南省高等学校重点科研项目计划(23B510010), Key Research Project Plan for Henan Province Universities and Colleges(23B510010).

† 通信作者 E-mail: Lvensheng@126.com

此,日益受到人们的关注。

本研究基于著名的 Chen 系统^[2]构建了一个三维自治混沌系统,该系统每个方程均包含 1 个非线性项,是另外 2 个状态变量的交叉乘积,其相图为 4 翼蝶型拓扑结构。该系统不仅具有混沌的一般特性,重要的是还具有多种类型的共存吸引子现象和逆倍周期分岔特性。为了使该系统在实际工程中得以更好地应用,设计了其模拟电路和 STM32 数字电路,电路实验结果和数值仿真一致。

1 新系统的模型和动力学行为分析

1.1 新 Chen 系统模型

参照 Chen 系统^[2],在其第一方程增加 1 个交叉乘积项,使得每个方程都有一个非线性项,且为其他 2 个状态变量的交叉乘积,重新标度参数,建立一个新的混沌系统,数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + yz \\ \dot{y} = ax + b(y - xz) \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (1)$$

参数 $a=0.6$ 、 $b=2$ 、 $c=3$,初值 $[x_0, y_0, z_0]=[2, 1, 1]$ 时,Runge-Kutta 算法,Matlab 软件数值仿真,得到如图 1(a)~(c)所示的系统相图,是拉伸和扭曲结构的 4 翼蝶型吸引子,图 1(d)为其三维结构相图,新混沌系统的拓扑结构与 Chen 系统不同。

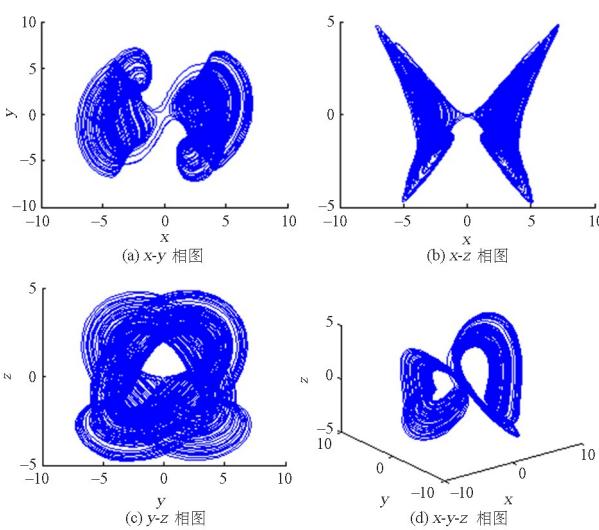


图 1 新 Chen 系统相图

Fig. 1 Phase diagrams of new Chen's system

1.2 对称性、耗散性及平衡点的稳定性

1.2.1 对称性

新 Chen 系统(1)关于 z 轴对称,即通过坐标

变换 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$,系统的模型并不发生变化。

1.2.2 耗散性

对于系统式(1),其耗散性,满足如下等式

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -1 + b - c = -(1 - b + c) \quad (2)$$

其中 V 表示体积,当 $(1 - b + c) > 0$ 时, $\nabla V = -(1 - b + c) < 0$,系统的状态变化是有界的,系统的指数衰减率为 $dV/dt = e^{-(1-b+c)t}$,当系统的初始状态为 V_0 ,经过时间 t ,系统的状态衰减为 $V_0 e^{-(1-b+c)t}$ 。

1.2.3 平衡点及其稳定性

根据平衡状态的性质,令系统式(1)的左边等于零,得到平衡状态方程为

$$\begin{cases} y - x + yz = 0 \\ ax + b(y - xz) = 0 \\ xy - cz = 0 \end{cases} \quad (3)$$

解得 5 个平衡点: $S_0(0, 0, 0)$ 、 $S_1(-1.584, 2.920, -1.55)$ 、 $S_2(1.584, -2.920, -1.55)$ 、 $S_3(2.157, 1.171, 0.85)$ 和 $S_4(-2.157, -1.171, 0.85)$ 。

在平衡点 (x_0, y_0, z_0) 处线性化,得其 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1+z_0 & y_0 \\ a-bz_0 & b & -bx_0 \\ y_0 & x_0 & -c \end{bmatrix} \quad (4)$$

令 $\det(J - \lambda E) = 0$,其中, E 为单位矩阵,分别将 5 个平衡点代入 $\det(J - \lambda E) = 0$,得到特征值 λ 具体见表 1, S_0 为指标 1 的鞍点, S_1, S_2, S_3, S_4 为指标 2 的鞍焦点^[12]。

表 1 系统平衡点的特性
Table 1 Characteristics of system equilibrium point

	λ_1	λ_2	λ_3	性质
S_0	-1.1882	2.1882	-3.000	指标 1 的鞍点
S_1	-5.0356	$1.5178 + 2.5513i$	$1.5178 - 2.5513i$	指标 2 的鞍焦点
S_2	-5.0356	$1.5178 + 2.5513i$	$1.5178 - 2.5513i$	指标 2 的鞍焦点
S_3	-3.0184	$0.5092 + 2.7899i$	$0.5092 - 2.7899i$	指标 2 的鞍焦点
S_4	-3.0184	$0.5092 + 2.7899i$	$0.5092 - 2.7899i$	指标 2 的鞍焦点

从表 1 可以看出,5 个平衡点均为不稳定平衡点。系统式(1)混沌的机理是:4 个指标 2 的鞍焦点螺旋运动形成涡卷,1 个指标 1 的鞍点形成键带,

将4个涡卷连接起来,构成图1(d)所示的复杂混沌吸引子。

1.2.4 Lyapunov指数、维数和Poincare截面

设系统式(1)以 x_0 为初值,其运动轨道为 $x(t, x_0)$,若其初值扰动 $\delta x(x_0, 0)$,在 t 时刻轨道的偏差为 $\delta x(x_0, t) = x[t, x_0 + \delta x(x_0, 0)] - x(t, x_0)$,则定义

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta x(x_0, t)\|}{\|\delta x(x_0, 0)\|} \quad (5)$$

称式(5)的 σ 为系统式(1)的Lyapunov指数^[14],它表示相邻轨道发散或收敛率的测度。

通过数值仿真,得系统式(1)的Lyapunov指数(LE)为: $LE_1 = 0.325, LE_2 = -0.001, LE_3 = -2.323$,则Lyapunov维数^[13]为

$$D_L = j + \frac{1}{|LE_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j LE_i \\ = 2 + \frac{LE_1 + LE_2}{|LE_3|} = 2.139 \quad (6)$$

Lyapunov维数不为整数,吸引子是分形的。选取 $z=0$ 得到 $x-y$ 平面上的Poincare截面图,如图2所示,它是连续的曲线或密集点,因而系统是混沌的^[12,13]。

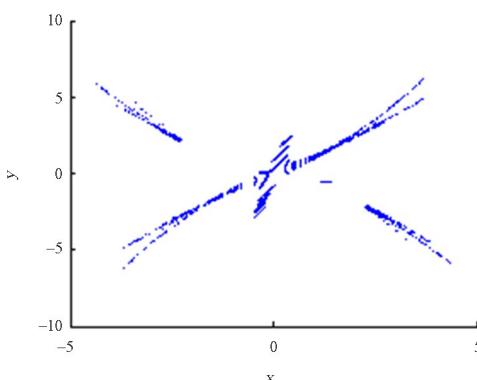


图2 $z=0$ 的 Poincare 截面
Fig. 2 Poincare section with $z=0$

2 参数对系统特性的影响

在系统式(1)中,当 $a \in [-2, 2], b = 2, c = 3$,初值为 $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, 1]$ 时,图3(a)给出了随参数 a 由小变大时的LE谱,图3(b)给出了状态变量 x 随参数 a 由小变大时的分岔图,从观察上来看,分岔图与最大LE指数谱的动力学特性变化是一致的。

当 $b=2, c=3$,初值为 $[x_0, y_0, z_0] = [2, 1, 1]$ 时, a 由小变大的变化时,系统式(1)在 $x-z$ 平面上有典型的相图结构,如图4所示:左2翼周期[图4

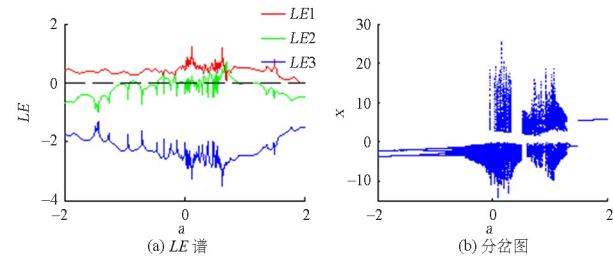


图3 a 变化时的 LE 谱与关于 x 的分岔图
Fig. 3 Bifurcation diagram and LE spectrum about x when a changes

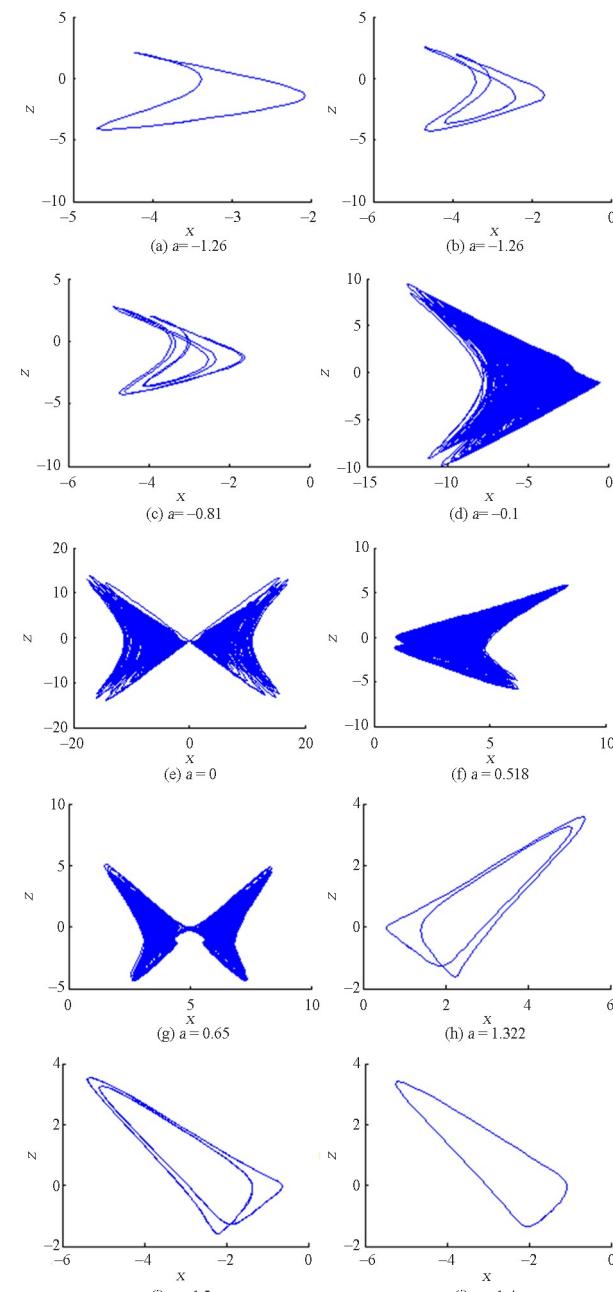


图4 系统随 a 变化时的相图
Fig. 4 Phase diagram of the system with a changes

(a)~(c)] \rightarrow 左 2 翼混沌[图 4(d)] \rightarrow 4 翼混沌[图 4(e)] \rightarrow 右 2 翼混沌[图 4(f)] \rightarrow 4 翼混沌[图 4(g)] \rightarrow 右 2 翼周期[图 4(h)~(j)]等运动模态,表明参数 a 的变化不仅会有倍周期分岔通往混沌道路,还会产生逆倍周期分岔的混沌退化现象.

由图 4 的相图和图 3(b)的分岔图可知,参数 a 由小变大时,状态变量 x 的运动值域在 x 轴的左右两侧来回跳跃;左 2 翼混沌吸引子、右 2 翼混沌吸引子、4 翼混沌吸引子交替出现;左 2 翼混沌吸引子与右 2 翼混沌吸引子[图 4(d)和图 4(f)]关于原点对称;同时周期 2 吸引子[图 4(h)和图 4(i)]是关于 x 轴对称的;因此,系统式(1)的混沌动力学行为非常丰富.

此外,当参数 $a=0$ 时,图 3(b)的分岔图在该处位于混沌带,图 3(a)的最大 LE 在该处大于零, x - z 平面相图如图 4(e)所示,各类力学行为特性均表明系统式(1)在参数 $a=0$ 处为混沌状态,但是 $a=0$ 使该处的系统方程式比系统式(1)少 1 个线性项,实际又是一新的混沌系统,当 $a=0$ 、 $b=2$ 、 $c=3$,初值为 $[x_0, y_0, z_0]=[2, 1, 1]$ 时,动力学行为如图 5 所示.

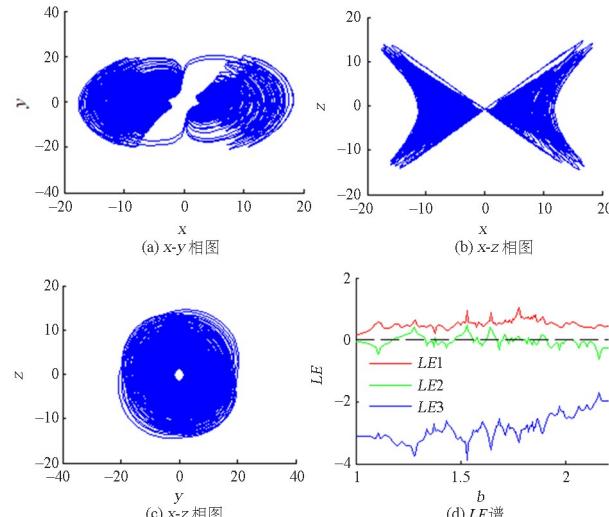


Fig. 5 Phase diagrams of new Chen's system ($a=0$)

2.2 参数 b 、 c 对系统特性的影响

在系统式(1)中,当 $b \in [1, 2.3]$ 或 $c \in [2.5, 26]$,初值 $[x_0, y_0, z_0]=[2, 1, 1]$ 时,图 6(a)、7(a)给出了系统式(1)随参数 b 、 c 由小变大时的 LE 谱,图 6(b)、7(b)给出了状态变量 x 随参数 b 、 c 由小变大时的分岔图,分岔图与最大 LE 谱的动力学

特性变化也是一致的.

当 b 由小变大变化时,系统式(1)在 x - z 平面上有典型的相图结构:周期 \rightarrow 2 翼混沌 \rightarrow 4 翼混沌 \rightarrow 2 翼混沌 \rightarrow 4 翼混沌 \rightarrow 周期等运动模态,当 c 由小变大变化时,系统式(1)在 x - z 平面上有典型的相图结构:拟周期 \rightarrow 左 2 翼混沌 \rightarrow 4 翼混沌 \rightarrow 右 2 翼混沌 \rightarrow 4 翼混沌 \rightarrow 周期等运动模态,过程类同 2.1 节,参数 b 、 c 的变化同样为倍周期分岔通往混沌道路,还会产生逆倍周期分岔的混沌退化现象.

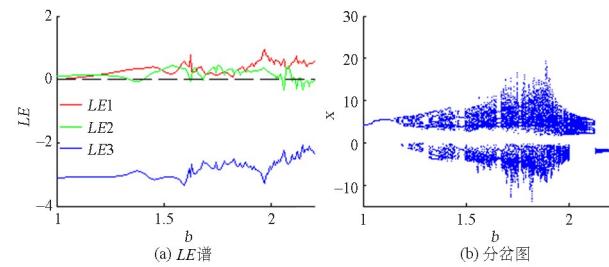


Fig. 6 Bifurcation diagram and LE spectrum about x when b changes

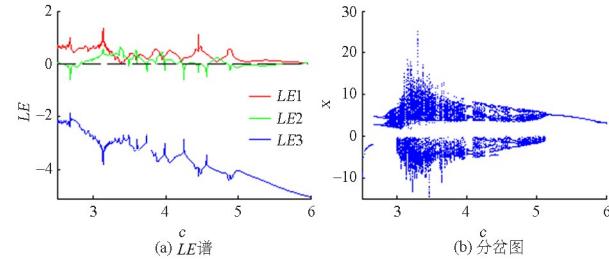


Fig. 7 Bifurcation diagram and LE spectrum about x when c changes

2.3 C_0 复杂度分析

混沌序列的随机性,使得混沌系统能很好地应用于保密通信, C_0 复杂度能反映混沌序列的随机程度^[15].

$$C_0(r, N) = \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - \tilde{x}(n)|^2 / \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \quad (7)$$

系统式(1)的 3 个参数取 $a=0.6$ 、 $b=2$ 、 $c=3$,初值 $[x_0, y_0, z_0]=[2, 1, 1]$ 时,仿真得到参数 a 、 b 、 c 的 C_0 复杂度如图 8 所示.对照图 3、6、7 的 LE 谱和分岔图,系统式(1)位于周期处时 C_0 复杂度较小,位于混沌区时 C_0 复杂度较大.复杂度与分岔图、 LE 谱在表征系统的动力学特性时是一致的,但描述得更清晰,是合理地配置系统参数的参考依据.

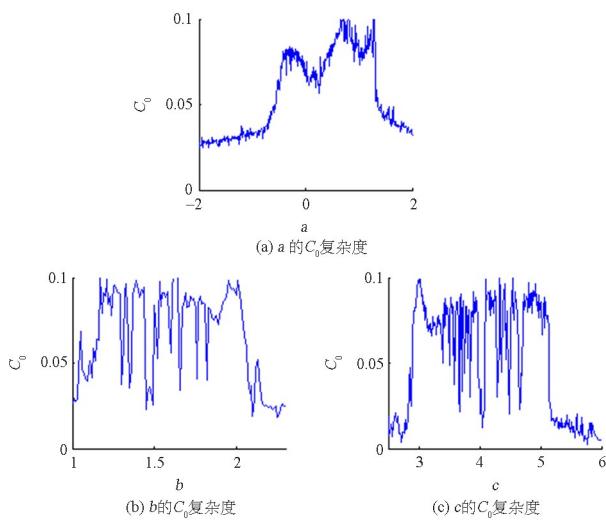


Fig. 8 Complexity C_0 varying with parameters

3 多种类型的共存吸引子

3.1 参数 a 变化下的共存吸引子

当系统式(1)的参数 $a \in [-2, 2]$ 、 $b=2$ 、 $c=3$, 初值分别取 $[-2, -1, -1]$ 和 $[2, 1, -1]$ 时, 图 9 给出了不同初值时状态变量 x 的分岔图和系统的 LE 谱(初值为 $[-2, -1, -1]$ 时的分岔图、相图为红色, 初值为 $[2, 1, -1]$ 时的分岔图、相图为蓝色, 下同), 图 9(a)是两个不同初值的分岔图显示在同一 $x-y$ 平面坐标系, 可以看出有部分区域无重叠现象, 且关于 x 轴对称, 表明系统式(1)可能存在共存吸引子.

为了确定共存吸引子的存在, 进一步研究, 当参数 a 由小到大变化时取不同的初值, 数值仿真系

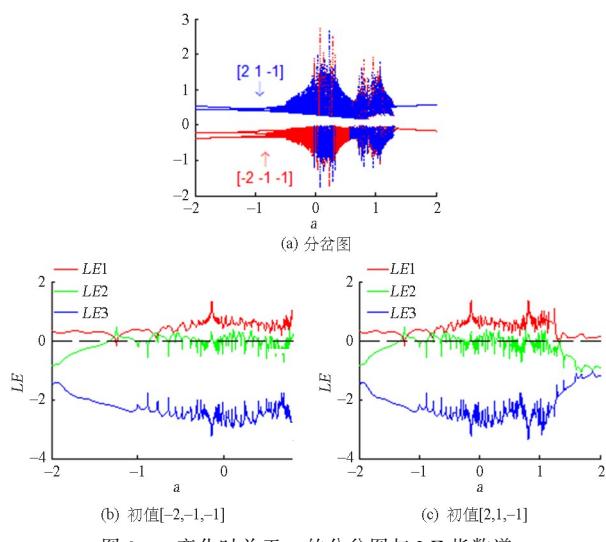


图 9 a 变化时关于 x 的分岔图与 LE 指数谱
Fig. 9 Bifurcation diagram and LE spectrum about x when a changes

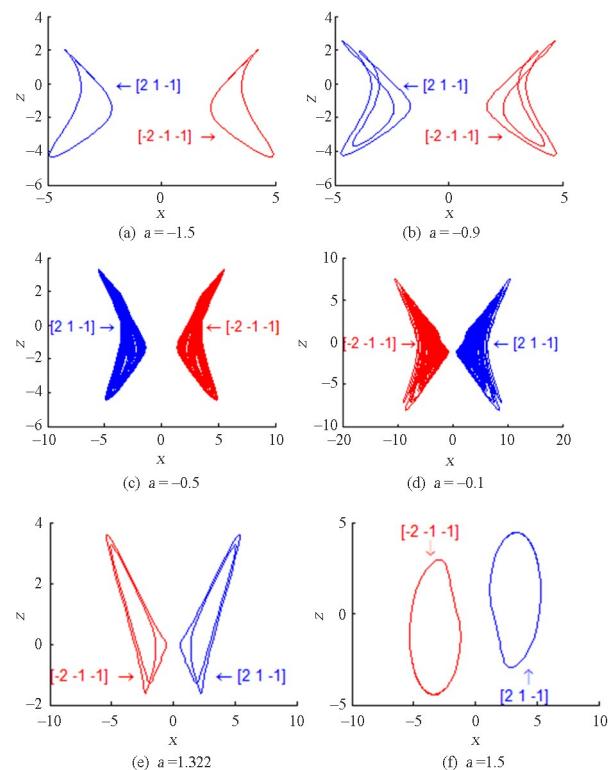


Fig. 10 Phase diagram of the system with a changes

统式(1), 在 $x-z$ 平面出现不同类型的典型共存吸引子现象, 如图 10(a)~(f) 所示: 当 $a = -1.5$ 、 1.5 时, 共存周期 1 吸引子; 当 $a = -0.9$ 、 1.322 时, 共存周期 2 吸引子; 当 $a = -0.5$ 时, 共存拟周期吸引子; 当 $a = -0.1$ 时, 共存 2 翼混沌吸引子; 各典型共存吸引子的 LE 如表 2 所示.

3.2 参数 b 变化下的共存吸引子

当系统式(1)的参数 $b \in [1, 2, 3]$ 、 $a=0.6$ 、 $c=3$, 初值分别取 $[-2, -1, -1]$ 和 $[2, 1, -1]$ 时, 图 11 给出了不同初值时状态变量 x 的分岔图和系统的 LE 谱, 图 11(a)是两个不同初值的分岔图显示在同一 $x-y$ 平面坐标系, 可以看出也有部分区域无重叠现象, 且关于 x 轴对称, 表明系统式(1)依然可能存在共存吸引子.

同上, 参数 b 由小到大变化时取不同的初值, 数值仿真系统式(1), 在 $x-z$ 平面出现不同类型的典型共存吸引子现象, 如图 12(a)~(d) 所示: 当 $b = 1.3$ 时, 共存周期 2 吸引子; 当 $b = 2.05$ 时, 共存 2 翼混沌吸引子, 当 $b = 2.11$ 时, 共存周期 3 吸引子, 是混沌系统最重要的特征, 周期 3 蕴含着混沌^[3]; 当 $b = 2.3$ 时, 共存周期 1 吸引子; 各典型结构共存吸引子的 LE 如表 2 所示.

表 2 不同参数和初始值下的共存吸引子

Table 2 Coexisting attractors for different values of system parameters and initial values

参数取值	初值	LE	共存吸引子		图形编号
			运动状态	拓扑结构	
$a = -1.5$	$[\pm 2, \pm 1, -1]$	$0.001, -0.272, -1.727$ $-0.001, -0.272, -1.727$	周期 1		10(a)
$a = -0.9$	$[\pm 2, \pm 1, -1]$	$0.003, -0.306, -1.697$ $0.003, -0.306, -1.697$	周期 2		10(b)
$b=2$	$a = -0.5$	$0.211, -0.001, -2.209$ $0.21, -0.001, -2.209$	混沌	2 翼	10(c)
$c=3$	$a = -0.1$	$0.281, -0.003, -2.279$ $0.281, -0.003, -2.279$	混沌	2 翼	10(d)
	$a = 1.322$	$0.002, -0.726, -1.276$ $0.002, -0.726, -1.276$	周期 2		10(e)
	$a = 1.5$	$0.002, -0.435, -1.567$ $0.002, -0.436, -1.567$	周期 1		10(f)
$b=1.3$	$[\pm 2, \pm 1, -1]$	$0.005, -0.118, -2.587$ $0.005, -0.118, -2.587$	周期 2		12(a)
$a=0.6$	$b=2.05$	$0.202, 0.002, -2.154$ $0.202, -0.002, -2.154$	混沌	2 翼	12(b)
$c=3$	$b=2.11$	$0.005, -0.449, -1.446$ $0.005, -0.449, -1.446$	周期 3		12(c)
	$b=2.3$	$0.004, -0.849, -0.854$ $0.004, -0.849, -0.854$	周期 1		12(d)
$c=2.5$	$[\pm 2, \pm 1, -1]$	$0.192, -0.201, -1.491$ $0.191, -0.201, -1.49$	混沌	2 翼	14(a)
$a=0.6$	$c=2.85$	$0.16, 0.001, -2.011$ $0.159, 0.002, -2.011$	混沌	2 翼	14(b)
$b=2$	$c=4.3$	$0.008, -0.091, -3.216$ $0.008, 0.091, -3.216$	周期 3		14(c)
	$c=5.5$	$0.005, -0.134, -4.371$ $0.005, -0.134, -4.371$	周期 1		14(d)

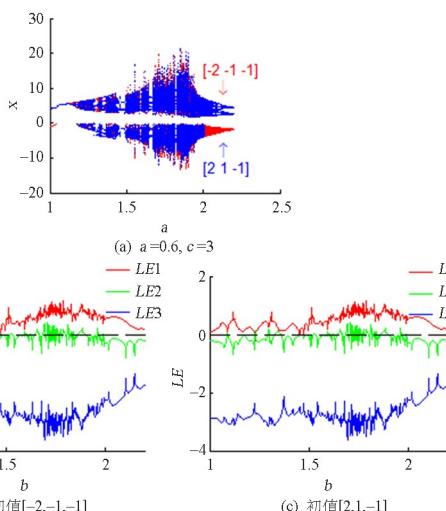


图 11 b 变化时关于 x 的分岔图与 LE 谱
Fig. 11 Bifurcation diagram and LE spectrum about x when b changes

3.3 参数 c 变化下的共存吸引子

当系统式(1)的参数 $c \in [2.5, 6]$ 、 $a = 0.6$ 、 $b = 2$, 初值分别取 $[-2, -1, -1]$ 和 $[2, 1, -1]$ 时, 图 13

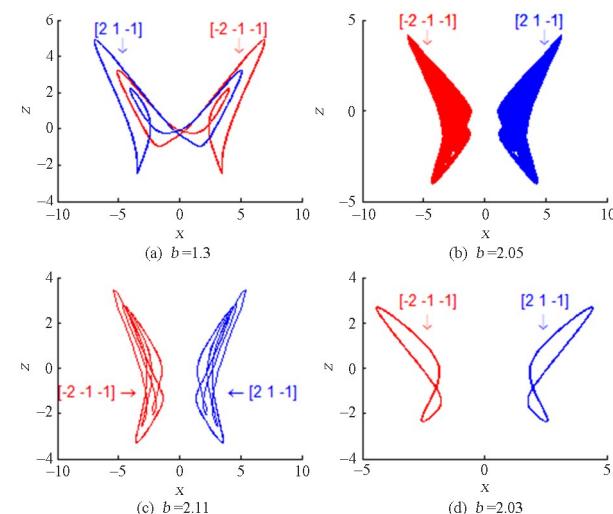


图 12 系统随 b 变化时的相图
Fig. 12 Phase diagram of the system with b changes

给出了不同初值时状态变量 x 的分岔图和系统的 LE 谱, 图 13(a)是两个不同初值的分岔图显示在同一 $x-y$ 平面坐标系, 可以看出再次有部分区域无重叠现象, 且关于 x 轴对称, 表明系统式(1)可

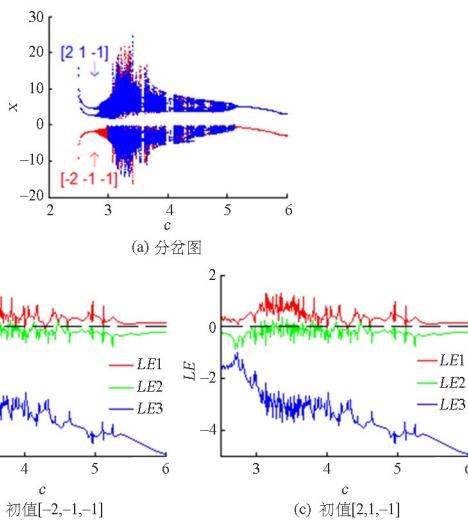


图 13 \$c\$ 变化时关于 \$x\$ 的分岔图与 LE 谱

Fig. 13 Bifurcation diagram and LE spectrum about \$x\$ when \$c\$ changes

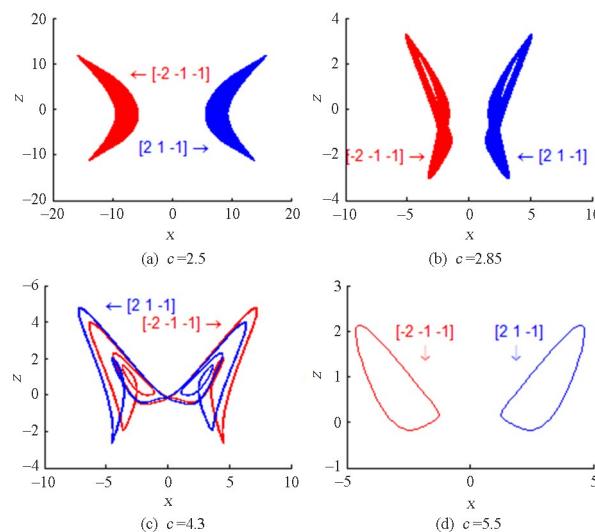


图 14 系统随 \$c\$ 变化时的相图

Fig. 14 Phase diagram of the system with \$c\$ changes

能再次存在共存吸引子。

同上,参数 \$c\$ 由小到大变化时取不同的初值,数值仿真系统式(1),在 \$x\$-\$z\$ 平面出现不同类型的典型共存吸引子现象,如图 14(a)~(d)所示:当 \$c=2.5\$ 时,共存 2 翼混沌吸引子;当 \$c=2.85\$ 时,共存 2 翼混沌吸引子;当 \$c=4.3\$ 时,共存周期 3 吸引子、共存拟周期吸引子;当 \$c=5.5\$ 时,共存周期 1 吸引子;各典型结构共存吸引子的 LE 如表 2 所示。

4 混沌电路设计

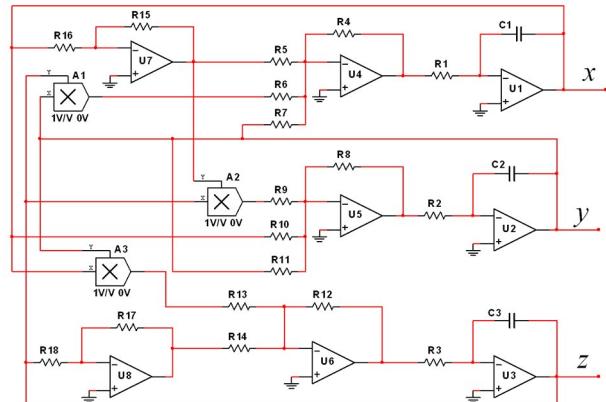
4.1 基于 Multisim 的模拟电路设计与仿真

图 1(d)所示的状态变量动态范围为:\$x \in

\$(-10, 10)\$、\$y \in (-10, 10)\$、\$z \in (-5, 5)\$,因此,系统式(1)的非线性交叉乘积项的数值会比较大,超出集成运放和乘法器的工作电压范围。因此,先对系统式(1)的状态变量 \$x\$、\$y\$、\$z\$ 作比例压缩变换,各变量压缩为原值的 \$1/10\$,再作时间尺度变换,令 \$\tau = \tau_0 t\$, \$\tau_0 = 100\$,参数取为 \$a=0.6, b=2, c=3\$,可得

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = 100(y - x + 10yz) \\ \frac{dy}{d\tau} = 100[0.6x + 2(y - 10xz)] \\ \frac{dz}{d\tau} = 100(10xy - 3z) \end{cases} \quad (8)$$

在 Multisim 电子线路仿真软件上,根据系统式(8),利用电阻、电容、集成运放和乘法器,实现了该混沌系统的电路设计,电路原理图如图 15 所示。

图 15 电路原理图
Fig. 15 Circuit schematic diagram of the system

简单、直观,电路方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{R_4}{R_7 R_1 C_1} y - \frac{R_{15} R_4}{R_{16} R_5 R_1 C_1} x + \frac{R_4}{R_6 R_1 C_1} y z \\ \frac{dy}{dt} = \frac{R_8}{R_{10} R_2 C_2} x + \frac{R_8}{R_{11} R_2 C_2} y - \frac{R_8}{R_9 R_2 C_2} x z \\ \frac{dz}{dt} = \frac{R_{12}}{R_{13} R_3 C_3} x y - \frac{R_{12}}{R_{14} R_3 C_3} z \end{cases} \quad (9)$$

令 \$R_1=R_2=R_3=R_4=R_8=R_{12}=R_{15}=R_{16}=R_{17}=R_{18}=10\text{k}\Omega\$, \$C_1=C_2=C_3=100\text{nF}\$, 通过对比方程式(8)、式(9),保持相应的系数相等,可得其余电阻值为: \$R_5=10\text{k}\Omega\$, \$R_6=1\text{k}\Omega\$, \$R_7=10\text{k}\Omega\$, \$R_9=0.5\text{k}\Omega\$, \$R_{10}=16.7\text{k}\Omega\$, \$R_{11}=5\text{k}\Omega\$, \$R_{13}=10\text{k}\Omega\$, \$R_{14}=3.3\text{k}\Omega\$。

同状态变量压缩 10 倍一样,初值大小也压缩 10 倍,为 \$[0.2, 0.1, 0.1]\$,图 16(a)、(b)为 Multisim 软件的示波器上观察到的平面相图,同数值仿真得

到的图 1(a)、(b)一样;当 $a=0.5$ 、 $b=2$ 、 $c=3$,初值为 $[-0.2, -0.1, -0.1]$ 和 $[0.2, 0.1, -0.1]$ 时,示波器上观察到的平面相图如图 16(c)、(d)所示,实际上是一对共存混沌吸引子,关于原点对称。

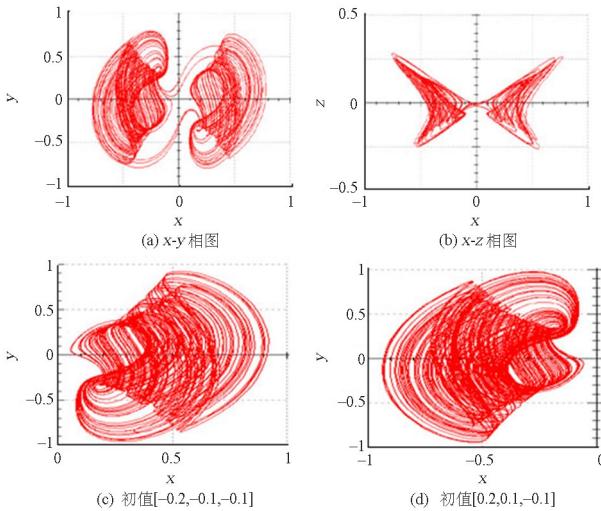


图 16 Multisim 电路实验结果

Fig. 16 Experimental results of the circuit by Multisim

4.2 基于 STM32 芯片的数字电路设计与实验

随着混沌理论研究的日趋成熟,混沌研究成果将会应用于工程实际,因此,在嵌入式芯片上实现混沌电路是趋势,避免了模拟电路对外界环境温度敏感、电路结构复杂调试困难、电子元件易老化、混沌信号波形频谱范围较窄、模拟信号不能直接被计算机处理等诸多问题。STM32 处理器,拥有较大的存储容量、丰富的 I/O 口和完备的工业现场通信协议,应用越来越广泛,基于此处理器实现混沌序列是有意义,STM32 硬件电路如图 17 所示。

系统算法实现采用 Euler 方法,对系统式(1)作离散化处理,写成递归形式(差分方程)如式(10),其中, h 为迭代步长。

$$\begin{cases} x(n+1) = x(n) + \\ h[y(n) - x(n) + y(n)z(n)] \\ y(n+1) = y(n) + \\ h\{ax(n) + b[y(n) - x(n)z(n)]\} \\ z(n+1) = z(n) + \\ h[x(n)y(n) - cz(n)] \end{cases} \quad (10)$$

在 STM32 硬件电路上实现时,其 DAC 寄存器为 12 位精度的转化器,能写入的最大“数字量”为 $2^{12}-1=4095$,对应输出电压位 3.3V;最小“数字量”为 $2^0-1=0$,对应输出电压位 0V。对差分方程系统式(10)的输出变量的在 STM32 硬件电路

上作标度化变换^[16],即

$$\mathbf{x} = \mathbf{ax} + \mathbf{s} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3]^T$ 为压缩系数, $\mathbf{a}=[x, y, z]^T$, $\mathbf{s}=[s_1, s_2, s_3]^T$ 为偏移距离, 图 1(d)所示相图的各状态变量阈值区间为 Matlab 有限时长仿真的结果, STM32 实际运行结果和仿真还有差别,这是算法误差等因素导致的。因此,要尽量缩小标度化变量的 x, y, z 阈值范围,DAC 寄存器的值取在 0~4000 之间,保证各变量输出电压值在 0~3.3V 的动态范围之内,本文的标度化如表 3 所示。

表 3 系统的标度化前提与规划

Table 2 Premise and planning of system scaling

参数	x	y	z
动态范围	$l: -10 \sim 10$	$m: -10 \sim 10$	$n: -5 \sim 5$
拟调整为	$o: -2000 \sim 2000$	$p: -2000 \sim 2000$	$q: -2000 \sim 2000$
扩大/压缩	$a_1: o/l = 200$	$a_2: p/m = 200$	$a_3: q/n = 400$
偏移距离	$s_1: 2000$	$s_2: 2000$	$s_3: 2000$
标度化为	$0 \sim 4000$	$0 \sim 4000$	$0 \sim 4000$

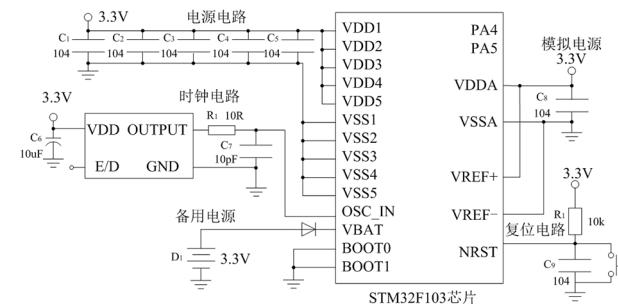
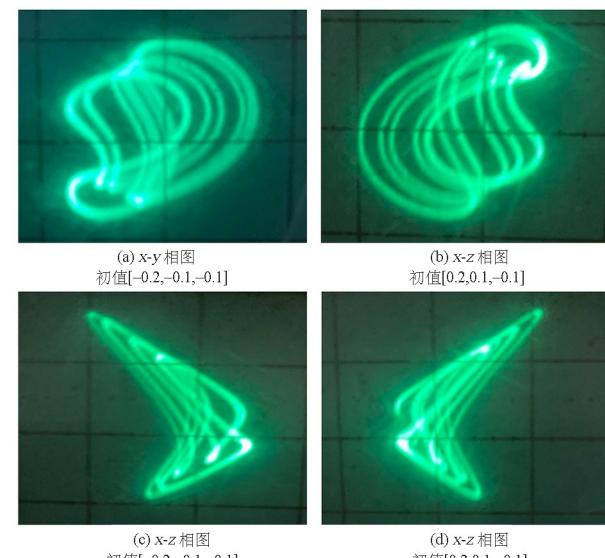
图 17 STM32F103 的硬件系统
Fig. 17 Hardware system of STM32F103

图 18 电路实验结果

Fig. 18 Circuit experiment results

系统式(10)中取: $h=0.005$,参数 $a=-0.1$ 、 $b=2$ 、 $c=3$,初值 $[x(1),y(1),z(1)]$ 为 $[-2,-1,-1]$ 和 $[2,1,-1]$ 时,示波器上观察到的共存吸引子如图18所示。当系统式(10)的参数和初值采用表2的典型值时,示波器上观察到的平面相图同表2列举的相图一一对应。

5 结论

本研究基于Chen系统,在其第一方程增加1个交叉乘积项,构建了一个新的混沌系统,该系统在特定的参数下,产生共存吸引子现象,有多种稳定模态,有如下结论:

(1)该系统3个参数的变化,使得系统具有多种稳定模态:共存周期吸引子、混沌吸引子等现象,更适合多模式工作场景;

(2)在给定参数值的情况下,该系统可将4翼蝶型混沌吸引子分解为2个共存2翼蝶型混沌吸引子,也可分解为2个共存4翼蝶型混沌吸引子;

(3)该系统的3个参数的由小到大的方向变化时,有周期分岔和逆倍周期分岔的现象,说明该系统对参数极其敏感;

(4)该系统具有较多的稳定模态,其动力学行为更加复杂,在保密通信中具有更高的应用价值。

参考文献

- [1] 吕恩胜. 基于Simulink的Lorenz系统标度化设计及硬件其实现[J]. 电子器件, 2019, 42(5): 1201—1204+1215.
LV E S. Scale design of Lorenz system and hardware based on Simulink and hardware implementation thereof [J]. Chinese Journal of Electron Devices, 2019, 42(5): 1201—1204 + 1215. (in Chinese)
- [2] 张国山,牛弘.一个基于Chen系统的新混沌系统的分析与同步[J].物理学报,2012,61(11):137—147.
ZHANG G S, NIU H. Analysis and synchronization of a novel chaotic system based on Chen's system [J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(11): 137—147. (in Chinese)
- [3] 张文,谢建华,李高磊,等.单自由度齿轮系统的混沌控制[J].动力学与控制学报,2021,19(4):1—7.
ZHANG W, XIE J H, LI G L, et al. Chaos Control of a single degree of freedom gear system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(4): 1—7. (in Chiniese)
- [4] 李小腾,王江彬,刘崇新,等.四阶混沌电力系统的全局快速滑模控制器设计[J].科学技术与工程,2021,21(24):10298—10303.
LI X T, WANG J B, LIU C X, et al. Global fast sliding mode controller design for a four-dimensional chaotic power system [J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(24) : 10298 — 10303. (in Chiniese)
- [5] LEE E C, PARRILLA-GUTIERREZ J M, HENS-ON A, et al. A crystallization robot for generating true random numbers based on stochastic chemical processes [J]. Matter, 2020, 2(3): 649—657.
- [6] GONG L S, ZHANG J G, LIU H F, et al. True random number generators using electrical noise [J]. IEEE Access, 2019, 7: 125796—125805.
- [7] ZHOU W, WANG G Y, SHEN Y R, et al. Hidden coexisting attractors in a chaotic system without equilibrium point [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2018, 28(10): 1830033.
- [8] 鲜永菊,莫运辉,徐昌彪,等.具有多种吸引子共存类型的新型四维混沌系统[J].华南理工大学学报:自然科学版,2020,48(3):32—43.
XIAN Y J, MO Y H, XV C B, et al. New four-dimensional chaotic system with multiple types of coexistence of attractor [J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2020, 48(3):32—43. (in Chiniese)
- [9] 鲜永菊,扶坤荣,徐昌彪.一个具有多翼吸引子的四维多稳态超混沌系统[J].振动与冲击,2021,40(1): 15—22+38.
XIAN Y J, FU K R, XU C B. A 4-D multi-stable hyper-chaotic system with multi-wing attractors [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(1): 15—22+38. (in Chinese)
- [10] LAI Q, NOROUZI B, LIU F. Dynamic analysis, circuit realization, control design and image encryption application of an extended Lü system with coexisting attractors [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2018, 114: 230—245.
- [11] 闫少辉,王尔童,孙溪,等.一个吸引子共存的混沌系统及其同步电路实现[J].深圳大学学报:理工版,2021,38(6): 649—657.
YAN S H, WANG E T, SUN X, et al. A chaotic system with attractor coexistence and its synchroni-

- zation circuit implementation [J]. Journal of Shenzhen University: Science and Engineering, 2021, 38 (6): 649—657. (in Chinese)
- [12] 施倩倩, 张莉. 基于共存吸引子的图像加密算法 [J]. 河北师范大学学报: 自然科学版, 2022, 46(3): 239—250.
- SHI Q Q, ZHANG L. Image encryption algorithm based on coexisting attractor [J]. Journal of Hebei Normal University: Natural Science, 2022, 46(3): 239—250. (in Chinese)
- [13] 吕恩胜, 熊丽. 二维四涡卷混沌电路的设计及实现 [J]. 电子器件, 2023, 46(3): 678—683.
- LV E S, XIONG L. Design and implementation of 2D 4-scroll chaotic circuit [J]. Chinese Journal of Electron Devices, 2023, 46(3): 678—683. (in Chinese)
- [14] 禹思敏. 混沌系统与混沌电路: 原理、设计及其在通信中的应用 [M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011.
- YU S M. Chaotic systems and chaotic circuits [M]. Xi'an: Xidian University Press, 2011. (in Chinese)
- [15] 孙克辉, 贺少波, 朱从旭, 等. 基于 C_0 算法的混沌系统复杂度特性分析 [J]. 电子学报, 2013, 41(9): 1765—1771.
- SUN K H, HE S B, ZHU C X, et al. Analysis of chaotic complexity characteristics based on C_0 algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(9): 1765—1771. (in Chinese)
- [16] 张新国, 孙洪涛, 赵金兰, 等. 蔡氏电路的功能全同电路与拓扑等效电路及其设计方法 [J]. 物理学报, 2014, 63(20): 200503.
- ZHANG X G, SUN H T, ZHAO J L, et al. Equivalent circuit in function and topology to Chua's circuit and the design methods of these circuits [J]. Acta Physica Sinica, 2014, 63(20): 200503. (in Chinese)