

正负刚度并联悬架系统的阵发与激变动力学^{*}

石升建 刘润 苏晗 张文 乐源[†]

(西南交通大学 力学与航空航天学院,成都 610031)

摘要 基于空气弹簧和负刚度弹簧并联的刚度系统,建立单自由度 1/4 车辆悬架模型.根据延拓打靶法对悬架系统的周期解进行追踪并依据 Floquet 理论判断其稳定性,利用胞映射原理绘制出系统随参数变化时吸引子的吸引域,分析吸引域在不同参数下的演变过程.结果表明:悬架系统在周期激励下会发生鞍结分岔、周期倍化分岔等局部分岔行为;揭示了系统由周期解转变为混沌状态的路径主要为与鞍结分岔相关的 I 型阵发;不稳定周期轨道与混沌吸引子碰撞时系统会产生的边界激变、内部激变等动力学行为,致使混沌吸引子发生消失、变大.

关键词 车辆悬架, 胞映射, 阵发性, 分岔, 激变

中图分类号:O313

文献标志码:A

Intermittent and Crisis Dynamics of Positive and Negative Stiffness Parallel Suspension System^{*}

Shi Shengjian Liu Run Su Han Zhang Wen Yue Yuan[†]

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract Based on a stiffness system consisting of an air spring and a negative stiffness spring connected in parallel, a single-degree-of-freedom 1/4 vehicle suspension model was established. The continuation shooting method was applied to track the periodic solutions of the suspension system, and their stability was determined by the Floquet theory. The basin of the system were depicted using the principle of cell mapping, and the evolution of the basin under different parameters was analyzed. The results show that the suspension system exhibits local bifurcation behaviors such as saddle-node bifurcation and period-doubling bifurcation under periodic excitation. The study reveals that the transition from periodic solutions to chaos in the system is mainly associated with I-type intermittent related to saddle-node bifurcation. When the unstable periodic orbit collides with the chaotic attractor, the system will produce dynamic behavior such as boundary crisis and internal crisis, which will cause the chaotic attractor to disappear and become larger.

Key words vehicle suspension, cell mapping, intermittent, bifurcation, crisis

引言

汽车悬架作为车辆的重要组成部分,主要作用

是缓解由于路面不平整带给乘客的冲击与振动.常规车辆的被动悬架主要由弹簧和阻尼器组成,其中弹簧刚度和阻尼系数是线性固定不变的,这也导致

在较为复杂的路面下,汽车悬架的减震性能难以提高.改变悬架结构,提高车辆悬架降振性能成为了学者们的研究热点.

尹万建^[1]建立由空气弹簧和线性阻尼并联构成的车辆悬架系统,分析了空气弹簧悬架在单双频激励下的非线性动力学现象. Hua 等^[2]研究了在路面激励下滞回悬架系统的随机振动,提出滞回弹簧非线性程度的提高能够较大程度的改变车辆的舒适性.曹计欢等^[3]将负刚度弹簧与空气弹簧并联,分析了单自由度悬架系统在周期激励下的亚谐共振情况,将数值解与理论解进行了对比验证. Abebe 等^[4]通过实验曲线拟合结果建立四分之一车辆悬架系统的数学模型,从刚度等方面对悬架动力学特性进行了评价. Diala 等^[5]构造了一种非线性刚度和非线性阻尼并联的单自由度悬架系统,分析了非线性参数对悬架系统耗能水平的影响.

对于具有负刚度的系统,由于整个系统的总刚度降低,拓宽了系统振动频率的范围,使得车辆悬架系统具有了良好的降振性能,极大的改善了汽车在复杂路面下行驶的平顺性及乘坐的舒适性.顾信忠等^[6]研究了空气弹簧刚度系数对负刚度悬架系统的混沌特性影响,得出悬架系统具有分岔等动力学现象.徐兴等^[7]考虑空气弹簧与负刚度弹簧并联的准零汽车悬架系统,研究表明准零刚度系统相对于传统的悬架系统具有较好的隔振性能.为了能够增强汽车悬架的隔振性能, Suman 等^[8]设计了一种可用于车辆悬架的隔振系统,隔振系统的正刚度从气动弹簧获得. Zha 等^[9]建立负刚度悬架系统,基于动力学理论分析负刚度参数对驾驶员舒适性的影响,得出将负刚度应用于车辆悬架系统可以显著提高乘坐舒适性.周冬等^[10]构建了一种具有磁力负刚度弹簧的磁力悬架,分析了磁力悬架的振动特性,表明非线性程度越深,悬架隔振性能越强.

在车辆悬架系统全局动力学研究中,对于系统混沌状态的分析,部分研究者只给出系统混沌运动状态的相图,也有部分研究者对通向混沌的路径进行了探讨,混沌路径主要有:周期倍化分岔、准周期分岔、擦边分岔、阵发性、激变等.大部分学者研究的混沌路径为周期倍化分岔和拟周期分岔,而对于通过阵发性将周期解转变为混沌这一路径研究的较少. Pomeau 等^[11]研究了洛伦兹系统从稳定的周期解向混沌转变的路径,从时间历程图对这一转变

过程进行了详细的分析,利用 Floquet 理论将这一转变称之为型阵发. Kabiraj 等^[12]分析了热声振荡通过阵发性从准周期状态转变为火焰熄灭的过程,利用对声压时间轨迹的重建和相空间时间序列分析技术,对阵发性进行了详细的讨论,确定这一转变为 II 型阵发. Awrejcewicz 等^[13]通过对工程实际中较为常用的梁板壳等基础构件进行研究,分析了在不同白噪声作用下,构件周期、准周期解以及混沌三者区域的变化,通过利用高斯小波分析得出板外的噪声通过阵发向混沌过渡. 吴鑫等^[14]研究了在拟周期激励下悬臂梁结构的奇异非混沌现象,利用最大李雅普诺夫指数验证了奇异非混沌吸引子的存在,表明系统的拟周期吸引子通过阵发过渡到奇异非混沌状态.

激变现象是非线性系统全局动力学研究中一种较为常见的不连续分岔现象. Grebogi 等^[15]以一维映射为研究背景,首次提出激变这一概念,揭示了混沌区域发生突变是由于混沌吸引子与不稳定周期轨道发生碰撞,导致混沌吸引子在参数变化时会发生跃变现象.混沌吸引子突然出现或消失的现象称为边界激变;混沌吸引子尺寸发生突变(变大或变小)的现象称为内部激变;多个混沌吸引子突然合并或一个混沌吸引子突然分裂为多个混沌吸引子的现象称为融合激变.张惠等^[16]在分段光滑碰撞系统中揭示了系统吸引子的消失是周期倍化分支所形成不稳定周期轨道与混沌吸引子发生碰撞即发生边界激变导致的.金花等^[17]研究了单自由度齿轮传动的一系列不连续分岔行为,揭示了在齿轮系统运动过程中,混沌吸引子与处于吸引域边界上的不稳定周期解发生碰撞,使得系统发生边界激变,周期吸引子分岔行为停止. Damghani 等^[18]研究分析三维混沌振子的分岔行为以及吸引子分形吸引域,利用李雅普诺夫指数分析系统的不同动力学特性,指出系统存在相互吸引的吸引域.侯林森等^[19]以单自由度悬索桥为研究对象,数值模拟出系统在不同参数下的分岔图以及吸引子和吸引域,得到系统存在边界激变和内部激变等丰富的动力学现象.

综合已有的文献研究发现,目前关于正负刚度并联车辆悬架的非线性动力学行为分析主要集中在简单分岔以及共振方面,对阵发性、激变等丰富的动力学现象却鲜有提及.考虑单自由度正负刚度

并联的车辆悬架系统,研究其在周期激励下的全局动力学现象,将延拓算法^[20,21]和打靶法^[22,23]相结合求出系统在参数变化时的周期解并应用 Floquet 理论^[24]判断其稳定性与分岔类型,最后利用胞映射原理绘制系统周期解的吸引域,与延拓算法计算结果形成相照应. 研究结果对车辆悬架的动力学设计提供了一定理论依据.

1 力学模型

正负刚度并联的车辆悬架系统^[3],如图1所示,在悬架模型中,阻尼器为线性,弹簧刚度为空气弹簧和负刚度弹簧并联,轮胎质量不计. 其中 m 为车体质量, k_f 为悬架系统的负刚度弹簧系数, $f_k = k_1 y + k_2 y^2 + k_3 y^3$ 为悬架系统的空气弹簧力, c 为线性阻尼系数, y 是悬架的位移, $y_0 = \beta \sin \omega_1 t$ 为路面激励,表明悬架系统受路面正弦波激励.

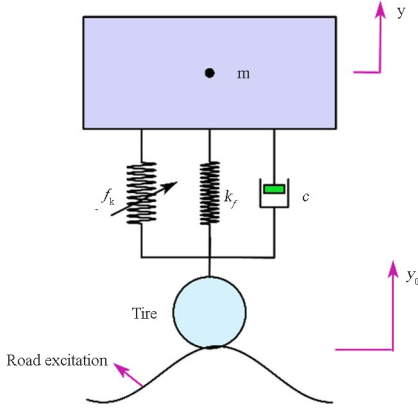


图1 车辆悬架模型
Fig. 1 Vehicle suspension model

根据牛顿运动定律,得到系统的运动微分方程:

$$m\ddot{y} + k_1(y - y_0) + k_2(y - y_0)^2 + k_3(y - y_0)^3 + k_f(y - y_0) + c(\dot{y} - \dot{y}_0) = 0 \quad (1)$$

令 $z = y - y_0$, 并将 $y_0 = \beta \sin \omega_1 t$ 代入(1)式得到:

$$m\ddot{z} + k_1 z + k_2 z^2 + k_3 z^3 + k_f z + c\dot{z} = m\beta \omega_1^2 \sin \omega_1 t \quad (2)$$

对式(2)进行无量纲化,得到:

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -\alpha x_1 - C x_2 - K_2 x_1^2 - K_3 x_1^3 + a \omega^2 \sin \omega \tau \end{cases} \quad (3)$$

其中 x' 表示 x 对 τ 求一阶导数, $\omega_0^2 = \frac{k_1}{m}$, $\tau = \omega_0 t$, ω

$$= \frac{\omega_1}{\omega_0}, x = \frac{z}{\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}}, x = x_1, \dot{x}_1 = x_2, a = \frac{\beta}{\sqrt{\frac{k_1}{k_3}}}, C =$$

$$\frac{c}{m\omega_0}, K_2 = \frac{k_2}{m\omega_0^2} \cdot \sqrt{\frac{k_1}{k_3}}, K_3 = \frac{k_3}{m\omega_0^2}, \alpha = 1 + \frac{k_f}{m\omega_0^2}$$

2 延拓打靶法

考虑方程(3)式: 用 $\mathbf{X}$ 表示状态变量 $[x_1, x_2]^T$, 参数向量 $[\alpha, C, K_2, K_3, a, \omega]$ 用 $\boldsymbol{\varphi}$ 表示, 则式(3)可简记为:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}, \tau) \quad (4)$$

为了求解车辆悬架系统周期运动的稳定性, 构建 Poincaré 映射将求解系统周期解的问题转化为求满足下式的 Poincaré 映射不动点的问题, 即满足:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{X} = 0 \quad (5)$$

其中 $\mathbf{P}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi})$ 定义为 $\mathbf{X}$ 的 Poincaré 映射.

对于方程(5)的求解, 选定 $\mathbf{X}(\boldsymbol{\varphi}_0) = \mathbf{X}_0$ 为初始不动点, 若 $\mathbf{Q}(\mathbf{X}_0) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_0) - \mathbf{X}_0 = 0$, 则此不动点为所求的周期解, 若 $\mathbf{Q}(\mathbf{X}_0) \neq 0$, 则在给出初值的情况下, 采用 Newton-Raphson 迭代不断进行修正, 最后获得满足(5)式的不动点 $\mathbf{X}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \mathbf{X}_i$, 迭代格式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i^{k+1} &= \mathbf{X}_i^k - \mathbf{DQ}(\mathbf{X}_i^k)^{-1} \mathbf{Q}(\mathbf{X}_i^k) \\ &= \mathbf{X}_i^k - [\mathbf{DP}(\mathbf{X}_i^k) - \mathbf{I}]^{-1} [\mathbf{P}(\mathbf{X}_i^k) - \mathbf{X}_i^k] \end{aligned} \quad (6)$$

k 为迭代次数, $\mathbf{DP}(\mathbf{X}_i)$ 和 $\mathbf{P}(\mathbf{X}_i)$ 可由下面初值问题求解, 即

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}, \tau)}{\partial \mathbf{X}} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 2K_2 x_1 - 3K_3 x_1^2 & -C \end{bmatrix} \times \mathbf{v} \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{I} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\tau = T$ 时 (T 为 Poincaré 映射周期), $\mathbf{DP}(\mathbf{X}_i) = \mathbf{v}(T)$.

延拓算法主要分为两步: (1) 预测; (2) 校正; 主要思想是在已知系统一支解时, 寻找充分靠近这支解且满足一定精度的一系列个点. 对式(5)进行转化, 得到式(8):

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{d\boldsymbol{\varphi}} = -\left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi})}{\partial \mathbf{X}}\right]^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi})}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{X}(\boldsymbol{\varphi}_i) = \mathbf{X}_i \end{cases} \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{X}_i - \left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)}{\partial \mathbf{X}}\right]^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{Q}(\mathbf{X}_i, \boldsymbol{\varphi}_i)}{\partial \boldsymbol{\varphi}}\right] \Delta \boldsymbol{\varphi} \quad (9)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\psi}}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}, \tau)}{\partial \mathbf{X}} \times \boldsymbol{\psi} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\varphi}, \tau)}{\partial \boldsymbol{\varphi}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 2K_2x_1 - 3K_3x_1^2 & -C \end{bmatrix} \times \psi + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

(10)

在前面求得 $\varphi = \varphi_i$ 时的周期解 $\mathbf{X}_i$, 利用式(9)进行预测, 得到 $\varphi = \varphi_{i+1}$ 时 $\mathbf{X}_{i+1}$ 的预测值 $\tilde{\mathbf{X}}_{i+1}$. 在式(9)中 $\varphi_{i+1} - \varphi_i = \Delta\varphi$, $\frac{\partial Q(\mathbf{X}_i, \varphi_i)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{DP}(\mathbf{X}_i) - I$, 而 $\frac{\partial Q(\mathbf{X}_i, \varphi_i)}{\partial \varphi}$ 可由式(4)、式(10)以 $[\varphi_i, 0]$ 为初值积分一个 Poincaré 映射周期得到. 以参数 α 为延拓参数, 其余参数为不变量.

通过上述计算过程, 可以得到 Poincaré 映射的雅可比矩阵 $\mathbf{DP}(\mathbf{x}^k)$ 的特征值, 根据 Floquet 理论, 当所有的 Floquet 乘子都在单位圆内时, 则周期解是稳定的; 存在一个 Floquet 乘子在单位圆外, 则周期解是不稳定的; 当 Floquet 乘子从 +1 穿出单位圆时, 系统发生鞍结分岔、跨临界分岔; 当 Floquet 乘子从 -1 穿出单位圆时, 系统发生周期倍化分岔^[25].

3 全局动力学分析

3.1 负刚度参数对全局特性的影响

在正负刚度并联的汽车悬架中, 负刚度的并联能够实现车辆的低频振动, 对负刚度弹簧的研究能够为车辆安全、稳定的行驶提供一定的理论依据. 选取系统的参数为^[26]: $\omega = 0.41, K_2 = 0.5, K_3 = 0.3, C = 0.08, a = 0.2$, 应用延拓打靶法求解系统的运动状态, 图 2 和图 3(a) 为以 α 为控制参数, $\alpha \in (0.1, 0.35)$ 时系统的分岔图及其所对应的最大李雅普诺夫指数图, 从图 2 中可以看出 $0.1 < \alpha < 0.35$ 时, 系统存在周期运动与混沌交替出现的运动状态, 其中红色轨迹代表系统的不稳定周期轨道, 蓝色曲线和区域分别表示系统在一定初值下的周期运动以及混沌运动状态. SN_i 和 PD_i 表示鞍结分岔点和周期倍化分岔点, CA_i 表示混沌状态, 下标 i 表示鞍结分岔和周期倍化分岔发生的次序. SPn 和 UPn 分别表示稳定和不稳定的周期 n 吸引子, 用下标 a, b, c 分别表示周期 n 运动状态的不同分支.

由图 2 可见, 系统在多处发生鞍结分岔和周期倍化分岔, 引起周期吸引子的出现或消失. 在参数 $\alpha = 0.35$ 时系统只有稳态周期一解 $SP1_a$, 在图 3(a)

中其最大李雅普诺夫指数表现为小于 0, 随着参数 α 的变化, 系统分别在 SN_1 ($\alpha = 0.299\ 459$), SN_2 ($\alpha = 0.305\ 813$), SN_3 ($\alpha = 0.209\ 759$), SN_4 ($\alpha = 0.262\ 419$) 处连续发生鞍结分岔, 系统运动经历从 $SP1_a \rightarrow SP1_b \rightarrow SP1_c$ 的转变, $SP1_c$ 经周期倍化序列转变为周期四 (SP4) 的稳定运动状态.

当参数 α 减小到 0.224 776 时, 悬架系统通过 I 型阵发 (IN) 从 SP4 变迁为混沌状态 CA_a , 在图 3(a) 中其最大李雅普诺夫指数表现为大于 0. 在参数 $\alpha = 0.193\ 627$ 时由于不稳定周期轨道和混沌吸引子 CA_a 发生碰撞, 系统发生内部激变 (IC), 导致

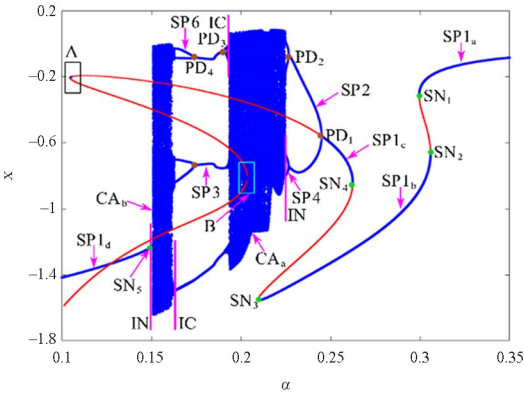


图 2 $\alpha \in (0.1, 0.35)$ 时系统的分岔图
Fig. 2 Bifurcation diagram of the system at $\alpha \in (0.1, 0.35)$

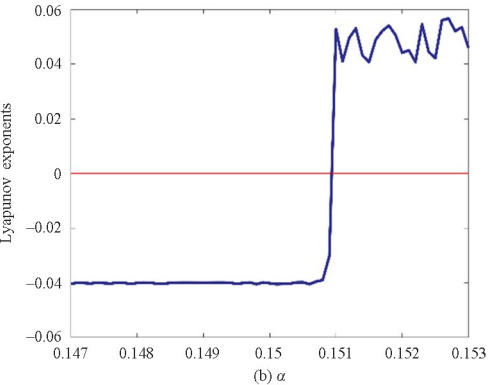
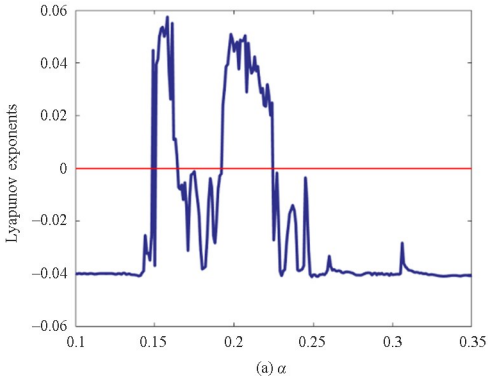


图 3 系统随参数 α 变化的最大李雅普诺夫指数:
(a) $\alpha \in (0.1, 0.35)$; (b) $\alpha \in (0.147, 0.152)$
Fig. 3 The maximum Lyapunov index of the system with parameter α variation: (a) $\alpha \in (0.1, 0.35)$; (b) $\alpha \in (0.147, 0.152)$

混沌吸引子 CA_a 突然变小, 经逆周期倍化分岔, 在参数 $\alpha=0.179\ 456$ 时, 系统表现为稳定的周期三 (SP3) 运动, SP3 随着 α 减小经周期倍化分岔序列进入混沌状态, 系统在 $\alpha=0.161\ 455$ 再次发生内部激变 (IC), 周期六 (SP6) 经倍周期分岔产生的混沌吸引子发生突然增大转变为混沌吸引子 CA_b , 在 $\alpha=0.150\ 955$ (SN₅) 时系统发生鞍结分岔, 通过 I 型阵发^[11] 将混沌状态 CA_b 变迁为稳定的周期一解 SP1_d.

3.2 阵发性通向混沌的路径

取参数区间 $\alpha \in (0.147, 0.152)$, 系统的响应及其所对应的最大李雅普诺夫指数如图 4 和图 3 (b) 所示, 图 3 中红色轨线表示不稳定周期轨道. 当参数 α 小于 0.1509 时, 系统表现为蓝色轨线代表的周期一解 SP1_d, 由图 3 (b) 可知其最大李雅普诺夫指数小于 0. 随着参数 α 的增加, 系统在 $\alpha=0.150\ 955$ (SN₅) 处发生鞍结分岔, 当 α 再略微增大时, 系统变为蓝色区域所表示的混沌状态 CA_b , 在图 3 (b) 中可知其最大李雅普诺夫指数大于 0. 系统运动从 SP1_d 转变为 CA_b 这一过程中, 当参数 α 小于 α^* ($\alpha^*=0.150\ 955$) 时, 悬架系统表现为周期一的稳态解, 如图 5 (a) 所示. 当 α 略微超过 α^* 到达 0.150 957 时, 悬架系统的响应整体为规则的周期运动, 但稳态的周期运动会被间隔一定时间所爆发的混沌行为间歇性中断, 混沌状态会持续一定的时间, 当混沌行为停止时, 系统运动方式立即转变为稳态周期运动. 随着时间的向前推移, 系统响应为混沌状态与周期运动交替出现, 如图 5 (b) 所示; 随着 α 的增大, 周期运动持续的时间逐渐减小, 混沌出现的次数越来越频繁, 所持续的时间也越来越长, 如图 5 (c) 所示; 当 $\alpha=0.151$ 时, 系统的运动行

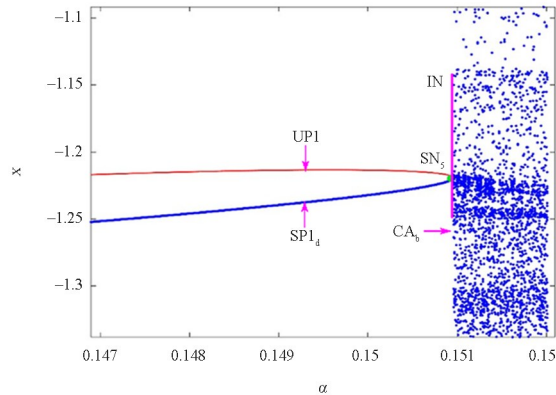


图 4 $\alpha \in (0.147, 0.152)$ 时系统的分岔图

Fig. 4 Bifurcation diagram of the system at $\alpha \in (0.147, 0.152)$

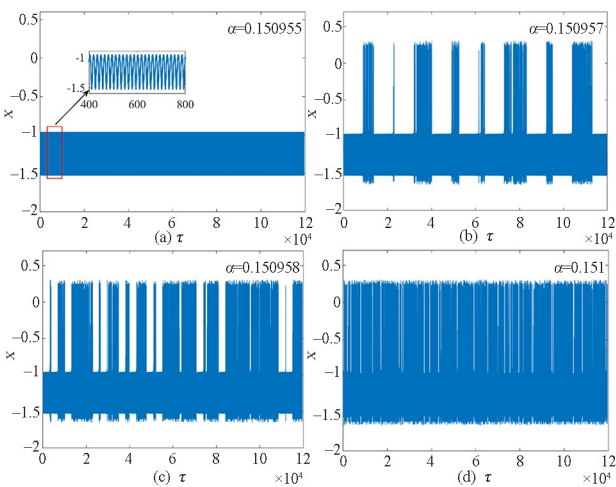


图 5 系统时间历程图: (a) $\alpha=0.150\ 955$; (b) $\alpha=0.150\ 957$; (c) $\alpha=0.150\ 958$; (d) $\alpha=0.151$

Fig. 5 System time history diagram: (a) $\alpha=0.150\ 955$; (b) $\alpha=0.150\ 957$; (c) $\alpha=0.150\ 958$; (d) $\alpha=0.151$

为彻底全部转变为混沌, 如图 5 (d) 所示. 如果系统从周期解过渡为混沌的路径经历图 5 这种变化过程, 将这一过渡行为称之为阵发性.

3.3 激变动力学与局部吸引子的分岔

为了能够全面的揭示分岔图 2 中悬架系统在 A、B 两处的动力学行为, 基于分岔参数 α 递增和递减的不同工况, 分析系统周期解吸引子和混沌吸引子随参数变化的情况以及吸引子的吸引域演化规律. 在系统的相空间中选取一个区域, 将其划分为 1000×1000 个胞, 用简单胞映射法求解出参数 α 在增大 (减小) 时系统吸引子的吸引域演化过程. 用 “▲”、“•” 表示周期吸引子, 吸引域用 S 表示, 下标表示系统吸引域的个数, “×” 表示不稳定吸引子.

应用延拓打靶法描绘出参数 $\alpha \in (0.1048, 0.1056)$ 时系统的分岔演化, 如图 6 所示. 从图 6 中可以看出, 当 $\alpha \in (0.104\ 859, 0.105\ 272)$ 时, 系统只有稳定的周期一解 SP1, 同时在 $\alpha=0.104\ 859$ (SN₁) 处, 周期一解 SP1 的 Floquet 乘子从 +1 穿出单位圆 (见表 1), 由 Floquet 理论可知 SP1 在此处发生鞍结分岔, 产生红色的不稳定轨道 UP₁. 随着参数的增大, SP1 在 PD₁ ($\alpha=0.105\ 287$)、PD₃ ($\alpha=0.105\ 441$) 处经倍周期序列最终变为混沌响应 CA_a . 同时, 在参数 $\alpha=0.105\ 276$ 处系统存在稳定的周期三 (SP3) 解 (黑色), 状态空间在此处的响应为三吸引子共存, 分别为 SP1、SP3 和图 2 中的 SP1_d, 三者的吸引域见图 7 (a), 天蓝色区域 S₁ 表示吸引子 SP1_d 的吸引域, 棕黄色区域 S₂ 为吸引子

表 1 区域 A 处各点的 Floquet 乘子
Table 1 Floquet multipliers for each point in region A

Fixed point	Floquet multiplier	Norm of floquet multiplier	Nature
SN ₁	1.000 186 499 1	On the unit circle	Saddle-node bifurcation point
	0.293 413 087 7	inside the unit circle	
SN ₂	0.025 280 039 4	Inside the unit circle	Saddle-node bifurcation point
	0.999 778 117 1	on the unit circle	
PD ₁	−0.293 328 686 0	Inside the unit circle	Period-doubling bifurcation point
	−1.000 474 290 6	on the unit circle	
PD ₂	−1.000 526 177 4	On the unit circle	Period-doubling bifurcation point
	−0.025 261 138 3	inside the unit circle	

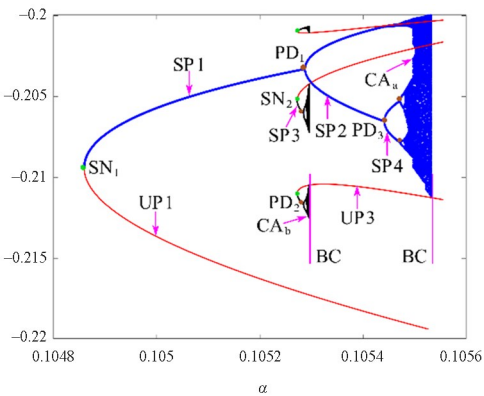


图 6 区域 A 处局部分岔图
Fig. 6 Bifurcation diagram of the branch in area A

吸引子 CA_b 三吸引子共存. 随着不稳定轨道 UP_3 的持续延拓, 在 $\alpha=0.105\ 532$ 处, UP_3 与混沌吸引子 CA_a 发生碰撞, 系统再次发生边界激变(BC), 致使混沌吸引子 CA_a 突然消失, 系统的终态为周期一 SP_{1d} 的响应. 在图 7(b)、图 7(c)中区域 S_1 表示吸引子 SP_{1d} 的吸引域, 棕黄色区域 S_2 为吸引子 CA_a 的吸引域. 图(b)为混沌吸引子 CA_a 与碰前状态, 图(c)表示混沌吸引子 CA_a 与位于吸引域边界上的不稳定轨道 UP_3 发生碰撞, 引起系统发生边界激变(BC), 致使混沌吸引子 CA_a 的消失, 系统此时的运动仅为周期一解 SP_{1d} , 图 7(d)中 S_1 为其吸引域.

采用延拓打靶法追踪出系统在 B 处的稳定与不稳定周期解以及其演化历程, 如图 8 所示, 同时计算吸引子在不同参数下其吸引域的变化规律以揭示系统发生的分岔行为, 如图 9 所示. 在 $\alpha=0.2033$ 处, 系统只有稳定的周期一解 SP_1 . 随着参数 α 的增大, 在 $\alpha=0.203\ 47$ (SN_1) 时, 周期一解 SP_1 的 Floquet 乘子从 +1 穿出单位圆(见表 2), 由 Floquet 理论可知, SP_1 在此处发生鞍结分岔, 产生红色的不稳定轨道 UP_1 , 同时通过 I 型阵发(IN)将周期一的稳态解转变为混沌吸引子 CA_a . 伴随着参数 α 的减小, SP_1 在 PD_1 ($\alpha=0.203\ 221$)、 PD_3 ($\alpha=0.203\ 127$) 处经倍周期序列变迁为混沌响应 CA_c . 同时参数 α 在 $0.203\ 226$ (SN_2) 处系统存在周期三的解 SP_3 (黑色曲线), 根据 Floquet 理论可知, SP_3 在此处发生鞍结分岔, 产生不稳定的周期解 UP_3 , 随着参数 α 的变化, SP_3 经周期倍化分岔通向混沌运动状态 CA_b . 当 $\alpha=0.203\ 222$ 时, 系统表现为周期三的吸引子 SP_3 与周期一的吸引子 SP_1 共存, 如图 9(a)所示, 靛蓝色区域 S_1 为 SP_1 的吸引域, 黄色区域 S_2 表示 SP_3 的吸引域, 两个吸引子的吸引域相互嵌套在一起, 且吸引域 S_2 具有分形结构,

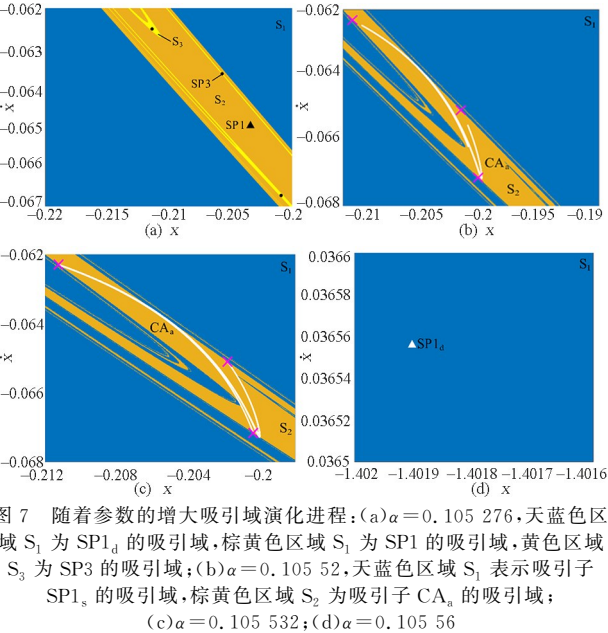


图 7 随着参数的增大吸引域演化进程: (a) $\alpha=0.105\ 276$, 天蓝色区域 S_1 为 SP_{1d} 的吸引域, 棕黄色区域 S_1 为 SP_1 的吸引域, 黄色区域 S_3 为 SP_3 的吸引域; (b) $\alpha=0.105\ 52$, 天蓝色区域 S_1 表示吸引子 SP_{1s} 的吸引域, 棕黄色区域 S_2 为吸引子 CA_a 的吸引域; (c) $\alpha=0.105\ 532$; (d) $\alpha=0.105\ 56$

SP_1 的吸引域, 而黄色区域 S_3 为吸引子 SP_3 的吸引域. SP_3 经 PD_2 ($\alpha=0.105\ 284$) 通过周期倍化分岔最终在 $\alpha=0.105\ 291$ 进入混沌运动状态 CA_b , 此时系统表现为吸引子 SP_{1d} 、吸引子 SP_2 和混沌

表 2 区域 B 处各点的 Floquet 乘子
Table 1 Floquet multipliers for each point in region B

Fixed point	Floquet multiplier	Norm of floquet multiplier	Nature
SN ₁	0.293 475 225 2	Inside the unit circle on the unit circle	Saddle-node bifurcation point
	0.999 974 709 3		
SN ₂	1.000 027 333 4	On the unit circle inside the unit circle	Saddle-node Bifurcation Point
	0.025 269 190 1		
PD ₁	−1.000 016 041	On the unit circle inside the unit circle	Period-doubling bifurcation point
	−0.293 463 099 0		
PD ₂	−0.025 265 125 4	Inside the unit circle on the unit circle	Period-doubling bifurcation point
	−1.000 068 253 6		

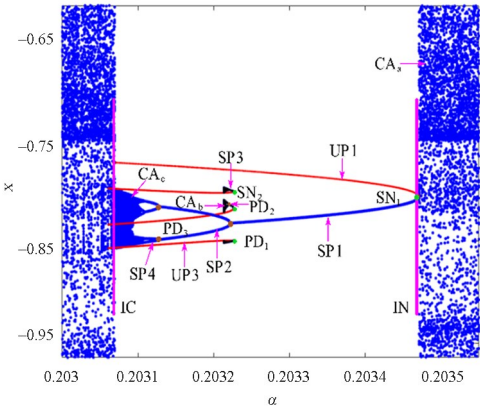


图 8 区域 B 处局部分岔图
Fig. 8 Bifurcation diagram of the branch in area B

系统在此处发生边界激变(BC),引发混沌吸引子 CA_b 的突然消失,系统的响应仅为稳态的周期二解 SP_2 . 随着 UP_3 的继续延拓,在 $\alpha=0.203\ 072$ 处, UP_3 与混沌吸引子 CA_c 发生碰撞,内部激变(IC)在此处发生,致使混沌吸引子 CA_c 发生突然性的增大转变为混沌吸引子 CA_a ,图 9(b)、图 9(c)中青绿色区域 S_1 为吸引子 CA_c 的吸引域,图(b)为混沌吸引子 CA_c 与 UP_3 碰前状态,图(c)表示为吸引子 CA_c 与位于吸引域边界上的不稳定轨道 UP_3 发生碰撞,导致系统发生内部激变(IC),将吸引子 CA_c 转变为图 9(d)所示的混沌吸引子 CA_a ,青绿色区域 S_1 为其吸引域.

4 结论

考虑单自由度正负刚度并联的四分之一汽车悬架系统,该系统包含正刚度的空气弹簧、负刚度弹簧以及线性阻尼,研究了悬架模型在道路轮廓为周期激励下随着参数改变时系统的动力学特性. 得出以下结论:

(1)通过改变参数 α 数值模拟出系统随参数变化时的响应,将延拓打靶法应用到悬架系统中对其周期解进行延拓追踪并根据 Floquet 理论和 Floquet 乘子穿出单位圆的方式判断出系统有鞍结分岔、周期倍化分岔等局部分岔行为.

(2)通过对时间历程图的刻画,发现系统通过与鞍结分岔相关的 I 型阵发从周期运动转变为混沌状态.

(3)通过简单胞映射原理,得出不同吸引子的吸引域在参数变化时的演化规律,揭示了混沌吸引子突然消失原因是当分岔参数改变时,鞍结分岔产生的不稳定周期解与混沌吸引子发生碰撞使得系统发生边界激变;表明了不稳定周期轨道与混沌吸引子发生碰撞时系统发生内部激变,导致混沌吸引

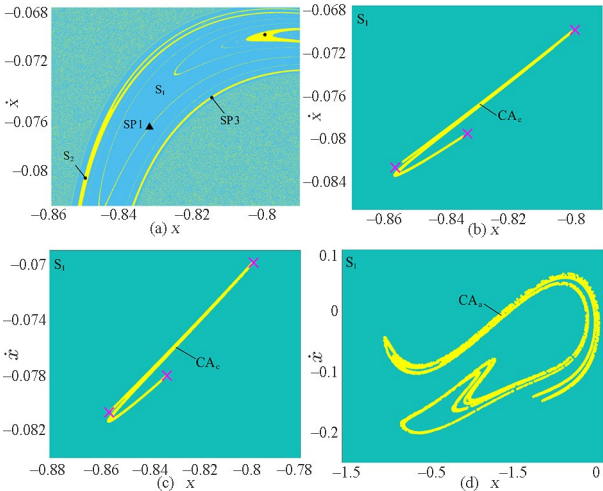


图 9 随着参数的减小吸引域演化进程:(a) $\alpha=0.203\ 22$;靛蓝色区域 S_1 为 SP_1 的吸引域,黄色区域 S_2 为 SP_3 的吸引域;
(b) $\alpha=0.203\ 074$;(c) $\alpha=0.203\ 072$;(d) $\alpha=0.203\ 06$
Fig. 9 Evolution process of attraction domain with decreasing parameters: (a) $\alpha=0.20322$, the indigo blue region S_1 is the basin of SP_1 , the yellow region S_2 is the basin of SP_3 ; (b) $\alpha=0.203\ 074$; (c) $\alpha=0.203\ 072$; (d) $\alpha=0.203\ 06$

说明在参数 $\alpha=0.203\ 222$ 时系统响应对初始条件极为敏感,任何微小的改变都会导致系统运动到不同的周期轨道上.

随着参数的减小,不稳定周期轨道 UP_3 首先在 $\alpha=0.203\ 213$ 处与混沌吸引子 CA_b 发生碰撞,

子的吸引域突然变大。

研究结果揭示了正负刚度并联悬架系统存在阵发性和激变等丰富动力学现象,为车辆悬架动力学优化设计提供了理论依据。

参考文献

- [1] 尹万建. 汽车空气弹簧悬架系统的非线性动力学行为研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2007.
YIN W J. Investigation on nonlinear dynamic behavior in automobile air spring suspension system [D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2007. (in Chinese)
- [2] HUA C R, ZHAO Y, LU Z W, et al. Random vibration of vehicle with hysteretic nonlinear suspension under road roughness excitation [J]. *Advances in Mechanical Engineering*, 2018, 10 (1): 168781401775122.
- [3] 曹计欢, 牛江川, 王军. 负刚度和空气弹簧并联的悬架系统的亚谐共振 [J]. 石家庄铁道大学学报: 自然科学版, 2020, 33(3): 1—6.
CAO J H, NIU J C, WANG J. Subharmonic resonance of suspension system with negative stiffness and air spring in parallel [J]. *Journal of Shijiazhuang Tiedao University: Natural Science Edition*, 2020, 33(3): 1—6. (in Chinese)
- [4] ABEBE B A, SANTHOSH J, AHMED A A, et al. Non-linear mathematical modelling for quarter car suspension model [J]. *International Journal on Emerging Technologies*, 2020, 11(5): 536—544.
- [5] DIALA U H, ZHU Y P, LANG Z Q. Analysis of the energy dissipation characteristics of a nonlinear vehicle suspension system [C]//2022 UKACC 13th International Conference on Control. New York: IEEE, 2022: 177—182.
- [6] 顾信忠, 李舜酩, 程春. 负刚度悬架系统动力学特性及其性能研究 [J]. 华中科技大学学报, 2018, 46(9): 82—87.
GU X Z, LI S M, CHENG C. Research on dynamics properties and performance for negative stiffness suspension system [J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2018, 46(9): 82—87. (in Chinese)
- [7] 徐兴, 施天玲, 江昕炜, 等. 准零刚度空气悬架系统建模与动态特性研究 [J]. 振动与冲击, 2021, 40(24): 205—211+292.
- XU X, SHI T L, JIANG X W, et al. Modeling and dynamic characteristic analysis of a quasi-zero stiffness pneumatic suspension system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(24): 205—211+292. (in Chinese)
- [8] SUMAN S, BALAJI P S, SELVAKUMAR K, et al. Nonlinear vibration control device for a vehicle suspension using negative stiffness mechanism [J]. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2021, 9(5): 957—966.
- [9] ZHA J L, NGUYEN V, SU B B, et al. Performance of the seat suspension system using negative stiffness structure on improving the driver's ride comfort [J]. *SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH*, 2022, 6(2): 135—146.
- [10] 周冬, 张慧杰, 郝慧荣, 等. 磁力负刚度弹簧的汽车悬架非线性特性分析 [J]. 科学技术与工程, 2023, 23(5): 2181—2189.
ZHOU D, ZHANG H J, HAO H R, et al. Analysis of nonlinear characteristics of automotive suspensions with magnetic negative stiffness springs [J]. *Science Technology and Engineering*, 2023, 23(5): 2181—2189. (in Chinese)
- [11] POMEAU Y, MANNEVILLE P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems [J]. *Communications in Mathematical Physics*, 1980, 74(2): 189—197.
- [12] KABIRAJ L, SUJITH R I. Nonlinear self-excited thermoacoustic oscillations: intermittency and flame blowout [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2012, 713: 376—397.
- [13] AWREJCEWICZ J, KRYSKO A V, PAPKOVA I V, et al. Chaotic dynamics of flexible beams driven by external white noise [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 79: 225—253.
- [14] 吴鑫, 李高磊, 乐源. 单自由度碰撞振动系统的奇异非混沌动力学和多稳态共存 [J]. 振动与冲击, 2022, 41(2): 45—52+86.
WU X, LI G L, LE Y. Strange nonchaotic dynamics and multistable coexistence phenomena of a single-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, 41(2): 45—52+86. (in Chinese)
- [15] GREBOGI C, OTT E, YORKE J A. Chaotic attractors in crisis [J]. *Physical Review Letters*, 1982, 48(22): 1507—1510.

- [16] 张惠, 丁旺才, 李险峰. 分段光滑碰撞振动系统吸引域结构变化机理研究 [J]. 振动与冲击, 2019, 38(18): 141–147.
ZHANG H, DING W C, LI X F. Structure change mechanism of the attractor basin in a piecewise-smooth vibro-impact system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(18): 141–147. (in Chinese)
- [17] 金花, 吕小红, 张子豪, 等. 齿轮传动系统共存吸引子的不连续分岔 [J]. 力学学报, 2023, 55(1): 203–212.
JIN H, LV X H, ZHANG Z H, et al. Discontinuous bifurcations of coexisting attractors for a gear transmission system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(1): 203–212. (in Chinese)
- [18] GHASEM DAMGHANI H, NAZARIMEHR F, JAFARI S, et al. Chaotic oscillators with two types of semi-fractal equilibrium points: Bifurcations, multistability, and fractal basins of attraction [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023, 120: 107143.
- [19] 侯林森, 李高磊, 吴鑫等. 一类单自由度分段光滑悬索桥模型的动力学研究 [J]. 重庆理工大学学报, 2023, 37(3): 119–128.
HOU L S, LI G L, WU X, et al. Dynamic study on the suspension bridge model of single-degree-of-freedom piecewise smoothness [J]. Journal of Chongqing University of Technology, 2023, 37(3): 119–128. (in Chinese)
- [20] GIMENEZ A, CHAUSSE V, MESEGUER A. Numerical continuation in classical mechanics and thermodynamics [J]. European Journal of Physics, 2015, 36(1): 015015.
- [21] 张锦涛, 王昕, 吕小红, 等. Duffing 系统共存周期解的稳定性与分岔演化 [J]. 噪声与振动控制, 2022, 42(4): 46–51.
ZHANG J T, WANG X, LV X H, et al. Stability and bifurcation evolution of coexisting periodic solutions of Duffing system [J]. Noise and Vibration Control, 2022, 42(4): 46–51. (in Chinese)
- [22] 李德信, 徐健学. 求解非线性动力系统周期解推广的打靶法 [J]. 应用力学学报, 2003, 20(4): 80–85.
LI D X, XU J X. Generalized shooting method for determining the periodic orbit of the nonlinear dynamics system [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003, 20(4): 80–85. (in Chinese)
- [23] 张子豪. 基于打靶法的单级齿轮传动系统稳定性分析 [D]. 兰州: 兰州交通大学, 2022.
ZHANG Z H. Stability analysis of single-stage gear transmission system based on shooting method [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiaotong University, 2022. (in Chinese)
- [24] 金俐, 陆启韶, 王琪. 非光滑动力系统 Floquet 特征乘子的计算方法 [J]. 应用力学学报, 2004, 21(3): 21–26.
JIN L, LU Q S, WANG Q. Calculation methods of Floquet multipliers for non-smooth dynamic system [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2004, 21(3): 21–26. (in Chinese)
- [25] 李冠强, 谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌 [J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 1–7.
LI G Q, XIE J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of the double-impact Duffing oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 1–7. (in Chinese)
- [26] 贺尔星, 赵文浩, 刘润, 等. 非线性车辆悬架系统的滞后分岔及多稳态控制 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(3): 30–36.
HE E X, ZHAO W H, LIU R. Hysteresis bifurcation and control multistability of nonlinear vehicle suspension system [J]. Journal of dynamics and control, 2023, 21(3): 30–36. (in Chinese)