

# 6R 串联机械臂时间最优轨迹规划<sup>\*</sup>

刘永<sup>†</sup> 徐鉴

(同济大学 航空航天与力学学院, 上海 200092)

**摘要** 针对机械臂轨迹规划的时间优化问题, 对 6R 串联机械臂的运动轨迹进行分析与研究。基于机器人的运动学特性, 采用多项式插值构造运动轨迹, 同时融合粒子群优化思想, 提出了一种时间最优轨迹规划方法。利用旋量理论构建机械臂的运动学模型, 采用五次多项式曲线在关节空间中构造关节运动轨迹, 以最小化运行时间为优化目标, 采用改进型 PSO 算法求解出最优时间序列, 从而完成轨迹的优化。在算法参数设置中, 采用自适应惯性权重因子和动态学习因子策略改进标准的粒子群算法, 提高了算法的搜索速度和全局收敛能力。以搬运工况为仿真实例, 通过优化结果验证了基于改进的 PSO 优化算法和五次多项式函数的规划方法的有效性。结果显示, 该方法能够保证机械臂各关节角的运动学变化曲线连续平滑无突变, 并使运行时间从 7.2 s 减少至 6.64 s, 整体运行时间较优化前提升了约 8.43%, 有效地提高了机械臂的运行效率与平稳性。

**关键词** 机械臂, 轨迹规划, 五次多项式, 时间最优, 粒子群算法

中图分类号:TP241

文献标志码:A

## Time Optimal Trajectory Planning for a 6R Serial Robotic Manipulator<sup>\*</sup>

Liu Yong<sup>†</sup> Xu Jian

(School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract** Considering the time optimization for robotic manipulator trajectory planning, the motion trajectory of 6R serial robotic manipulator is analyzed and studied. According to the robot kinematic characteristics, a time-optimal method based on the improved particle swarm algorithm is proposed with adopting the polynomial curve trajectory combined with the particle swarm optimization notion. The kinematic model of the robotic manipulator is constructed by the method of screw theory, and the joint trajectory is constructed by using the quintic polynomial curve in the joint space, and the optimal time sequence is solved by the improved PSO algorithm with minimizing running time as the objective function to complete the optimization of the trajectory. In the algorithm parameter setting, adaptive inertia weight factor and dynamic learning factor strategy are used to improve the standard particle swarm algorithm, which improves the search speed and global convergence ability of the algorithm. The effectiveness of the planning method based on the improved PSO optimization algorithm and the quintic polynomial function is verified by the optimization results using the handling condition as a simulation example. The results show that the method can ensure that the angular displacement, angular velocity and angular acceleration curves of each joint of the robotic manipulator are continuously smooth without sudden changes, and reduce the running time from 7.2 s to 6.64 s, with an overall runtime improvement of a

2024-04-01 收到第 1 稿, 2024-04-23 收到修改稿。

\* 国家自然科学基金资助项目(12372022), National Natural Science Foundation of China(12372022).

† 通信作者 E-mail: 2130894@tongji.edu.cn

about 8.43% over the before optimization, which effectively improves the efficiency and smoothness of the robotic manipulator operation.

**Key words** robotic manipulator, trajectory planning, quintic polynomial, time optimization, particle swarm algorithm

## 引言

6R 串联机械臂作为工业上最常用的机器人构型,由于具有结构紧凑、关节灵活、工作空间广等优点,广泛应用于焊接、铣削、打磨、喷涂、搬运和码垛等工业制造领域<sup>[1-3]</sup>。在工业应用中,机械臂都需要按照规划的轨迹进行工作,为提高作业效率和产品质量,合理的轨迹规划至关重要。而时间最优轨迹规划是指以最小化总运动时间为目标,通过优化算法确定机械臂在特定时间内的运动轨迹,同时也满足相关的约束条件,决定着机械臂的作业效率和运动性能<sup>[4]</sup>。

机械臂的轨迹规划通常在机械臂的关节空间中执行,需要对路径点进行逆运动学求解,然后采用插值函数生成各关节运动轨迹,这样可以避免奇异性问题<sup>[5]</sup>。Ding 等<sup>[6]</sup>采用三次多项式确定大型挖掘机驱动臂的位移曲线,但无法保证其加速度的连续,造成冲击颤振。Wang 等<sup>[7]</sup>采用关节空间七次多项式规划尺蠖机器人的蠕动轨迹,但多项式次数的增加大大增加了计算量,求解时间较长。王本亮等<sup>[8]</sup>基于几何力学的反应规划算法得到了机械臂的末端避障轨迹,路径更为光滑。Yue 等<sup>[9]</sup>引入了一种基于时间的五次多项式函数来实现欠驱动牵引挂车机械臂的轨迹规划,充分考虑了速度和加速度的连续性,提高了车辆系统的安全性和舒适性。然而,由于插值算法的局限性,得到的轨迹可能并不总是符合实际加工情况或预期效果。为了提高轨迹的质量和适应性,可以考虑进行轨迹优化。

优化方法通常分为经典优化算法、启发式优化算法以及群体智能优化算法<sup>[10]</sup>。经典算法大多是不考虑随机性的确定性算法,其采用特定的搜索策略来寻找全局最优解,常用的有牛顿法和梯度下降法等,通常表现出较高的效率<sup>[11]</sup>。然而,确定性算法通常对目标函数有较高的数学要求,如可微性和连续性等,并且初始值的设定在很大程度上决定了算法的优化效果,因此适用范围相对有限。当机械

臂关节数增加时,经典算法的计算复杂度也相应增大,因此一般不适用于解决六自由度机械臂轨迹优化问题。启发式优化算法基于大自然的运行规律,给出了生活中许多实际问题的解决方案<sup>[12]</sup>。这些方法包括遗传算法、模拟退火算法、人工神经网络等。而群体智能优化算法的基本理论是模拟自然界中生物群体间的信息交流与合作行为来达到优化目的的算法,其中包括蚁群优化算法、粒子群优化算法和人工鱼群算法等<sup>[13]</sup>。目前,常见的用于优化机械臂轨迹规划的算法包括遗传算法(Genetic Algorithm, GA)<sup>[14]</sup> 和粒子群优化算法 (Particle Swarm Optimization, PSO)<sup>[15]</sup>。由于 PSO 算法无需进行 GA 算法中涉及的二进制编码解码和交叉变异等复杂过程,同时对种群大小的敏感性较低,因此其算法复杂度和计算量相对较小<sup>[16]</sup>。这使得 PSO 算法更适合用于机械臂轨迹优化的实际实现。王成等<sup>[17]</sup>针对发球机械臂存在发球不精准、稳定性较差和速度较慢的缺点,采用分段多项式的方法规划平滑的运动轨迹,利用改进的粒子群算法进行时间最优轨迹规划,以此来代替人工发球,提高训练效率。Luo 等<sup>[18]</sup>针对制造加工系统中可移动执行器与移动基座之间的动态耦合问题,采用改进的量子粒子群算法来最小化驱动关节在移动过程中的加速度值来获得平稳的运动轨迹,从而达到较高的精度和工作效率。Yang 等<sup>[19]</sup>基于二阶连续多项式插值函数,采用余弦递减权重来对 PSO 算法的参数进行改进,并在 PUMA 560 机械臂上验证了改进的算法对时间最优规划的优越性。Du 等<sup>[20]</sup>采用五次多项式插值函数规划关节运动轨迹并基于混沌策略改进学习因子的 PSO 算法得到了时间最优轨迹,避免了算法过早收敛到局部极小值,提高了搜索能力。

本文重点研究了 GSK-RB03 六自由度机械臂如何高效进行搬运操作的轨迹规划策略。基于机械臂的运动学模型,建立了点到点的“门”型搬运操作轨迹。根据笛卡尔空间与关节空间的映射关系,采

用五次多项式插值函数来控制各段轨迹。考虑到时间成本,在满足运动学约束条件下,提出了利用非线性惯性权值和动态变化学习因子改进 PSO 算法并以此来优化运动轨迹。最后通过仿真分析验证上述改进方法的可行性和有效性,得到机械臂最优运行时间和末端轨迹。

## 1 机械臂运动学模型

### 1.1 螺旋运动—刚体运动的几何表示

刚体运动的几何描述和代数表征是多体系统运动学建模的基础。

欧拉定理指出:离开固定点的任意旋转运动,都可以表示为围绕旋转轴  $\mathbf{k}$  旋转  $\theta$  的单次旋转。旋转矩阵给出了旋转运动的几何描述,全部旋转矩阵的集合构成了特殊正交群  $SO(3)$ 。 $SO(3)$  存在对应的李代数  $so(3)$ ,李代数  $so(3)$  到李群  $SO(3)$  的指数映射可以表示为:

$$\mathbf{R} = \exp(\theta[\mathbf{k}]^*) = \mathbf{I}_3 + \sin\theta[\mathbf{k}]^* + (1 - \cos\theta)[\mathbf{k}]^*[\mathbf{k}]^* \quad (1)$$

其中  $\mathbf{I}_3$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵,  $\mathbf{k} = [k_x, k_y, k_z]^T$  为旋转轴的单位向量,  $[\mathbf{k}]^*$  是反对称矩阵, 即:

$$[\mathbf{k}]^* = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \in so(3) \quad (2)$$

其满足以下关系:

$$([\mathbf{k}]^*)^2 = \mathbf{k}\mathbf{k}^T - \|\mathbf{k}\|^2\mathbf{I}_3 \\ ([\mathbf{k}]^*)^3 = -\|\mathbf{k}\|^2[\mathbf{k}]^* \quad (3)$$

式(1)即为欧拉—罗德里格斯变换<sup>[21]</sup>。

Mozzi-Chasles 定理<sup>[22]</sup>指出:任意刚体运动可以表示为绕不一定过原点的螺旋轴  $\mathbf{L}$  旋转  $\theta$ ,再沿该螺旋轴平移  $d$ ,也称为螺旋运动,如图 1 所示。其中螺旋轴  $\mathbf{L}$  包含方向向量和位置向量,方向向量为

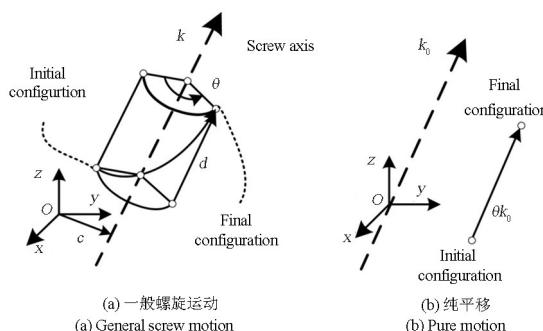


图 1 螺旋运动  
Fig. 1 Screw motion

旋转矩阵的旋转轴,而位置向量使用图 1 所示的向量  $\mathbf{c}$  确定。当  $\theta \neq 0$  时,平移量  $d$  与旋转角度  $\theta$  的比值  $h = d/\theta$  定义为螺旋运动的节距,螺旋轴表示为  $\mathbf{L} = \{\mathbf{c} + \lambda\mathbf{k} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ;当  $\theta = 0$  时,为纯平移,这时螺旋轴定义为过原点的单位向量  $\mathbf{k}_0$ ,纯移动的幅值为  $\theta$ ,表示为  $\mathbf{L} = \{\mathbf{0} + \lambda\mathbf{k}_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 。

螺旋运动的无穷小量即为运动旋量,其参数可构建对应的李代数为:

$$\theta[\mathbf{s}]^* = \theta \begin{bmatrix} [\mathbf{k}]^* & \mathbf{k}_0 \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{s}]^* \in se(3). \quad (4)$$

其中  $\mathbf{s} = [\mathbf{k}, \mathbf{k}_0]^T = [\mathbf{k}, \mathbf{c} \times \mathbf{k} + h\mathbf{k}]^T$ , 可用于表示旋转副的旋量坐标。根据李代数  $se(3)$  到李群  $SE(3)$  的指数映射,可以得到三维空间刚体运动的位姿变换矩阵  $\mathbf{N}$ ,即:

$$\mathbf{N} = \exp(\theta[\mathbf{s}]^*) = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{N} \in SE(3). \quad (5)$$

将式(1)和式(4)代入式(5)中可得:

$$\mathbf{N} = \exp(\theta[\mathbf{s}]^*) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \exp(\theta[\mathbf{k}]^*) & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} \neq 0; \\ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \theta\mathbf{k}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{k} \equiv 0. \end{cases} \quad (6)$$

式中  $\mathbf{t} = \{\mathbf{I}_3 - \exp(\theta[\mathbf{k}]^*)\}(\mathbf{k} \times \mathbf{k}_0) + \theta\mathbf{k}\mathbf{k}^T\mathbf{k}_0$ 。

6R 机械臂的末端瞬时位姿变换取决于末端初始位形以及历经的刚体运动,将初始位形定义为  $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}_0)$ ,则末端位姿表示为:

$$\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (7)$$

### 1.2 正运动学建模

本文以 GSK-RB03 机械臂为例,如图 2 所示,该机械臂由 6 个旋转关节串联构成,具有良好的工作性能,对应的运动学参数如表 1 所示。

表 1 GSK-RB03 机械臂运动学参数

Table 1 Kinematic parameters of GSK-RB03 manipulator

Joint $j$	$\alpha_{j-1}/\text{mm}$	$d_j/\text{mm}$	$\alpha_{j-1}/(^{\circ})$	$\theta_j/(^{\circ})$	Joint limit /(^{\circ})
1	0	430	0	$\theta_1$	-170~170
2	155	0	90	$\theta_2$	-110~150
3	360	0	0	$\theta_3$	-170~75
4	100	365	-90	$\theta_4$	-190~190
5	0	0	90	$\theta_5$	-125~125
6	0	116	-90	$\theta_6$	-360~360

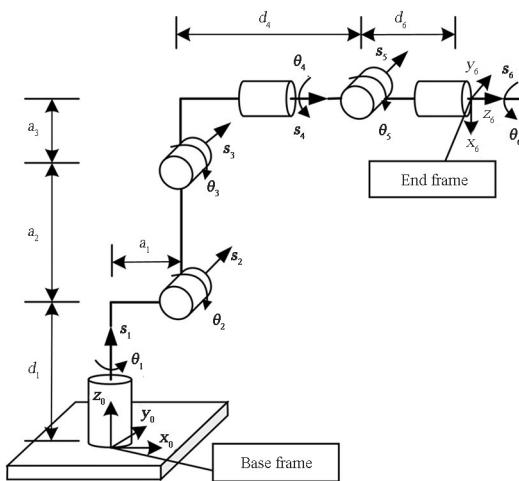


图 2 GSK-RB03 机械臂的示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the GSK-RB03 manipulator

以基座坐标系作为参考坐标系,选取零位状态作为初始位形  $\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}_0)$ ,即:

$$\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & a_1 + d_4 + d_6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

在初始位形下各关节的旋量坐标为:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{k}_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ d_1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_3 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ d_1 + a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{c}_5 &= \begin{pmatrix} a_1 + d_4 \\ 0 \\ d_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

6R 机械臂末端运动依次由前一关节决定,将各个关节的螺旋运动加以累乘就可以得到机械臂的正运动学指数积模型,根据式(7)可得:

$$\mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^6 \exp(\theta_i [\mathbf{s}_i]^*) \mathbf{N}_p(\boldsymbol{\theta}_0) \quad (10)$$

### 1.3 逆运动学求解简述

GSK-RB03 机械臂满足 Pieper 准则<sup>[23]</sup>。该机械臂的关节 2 和关节 3 轴线相互平行,关节 4、5、6

交于一点,则其存在封闭形式的解析解。基于旋量理论运动学模型,结合 2 种最基本的 Paden-Kahan 子问题<sup>[24]</sup>,将整个 6R 机械臂的逆解问题拆分为若干个已知的几何子问题。

子问题 1 可以表述为:已知  $\mathbf{c}_2$  为起始点,  $\mathbf{c}_1$  为终点, 绕螺旋轴  $\mathbf{s}$  旋转角度为  $\theta$ , 如图 3 所示,  $\mathbf{r}$  为螺旋轴上的一点,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  在垂直于螺旋轴  $\mathbf{s}$  的平面上的投影如图 3 所示。

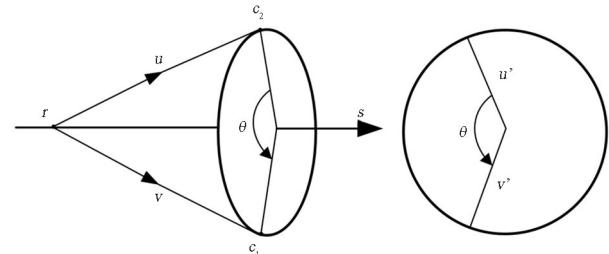


图 3 单关节螺旋运动及其平面投影

Fig. 3 Screw motion of one joint and planar projection

那么有:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{u} - \mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{u} \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{v} \end{aligned} \quad (11)$$

根据几何关系可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' \times \mathbf{v}' &= \mathbf{w}\sin\theta \|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{v}'\| \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' &= \cos\theta \|\mathbf{u}'\| \|\mathbf{v}'\| \end{aligned} \quad (12)$$

从而求得:

$$\theta = \alpha \tan2[\mathbf{w}^T(\mathbf{u}' \times \mathbf{v}'), \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}'] \quad (13)$$

子问题 2 可以描述为绕两个有序轴的旋转:将起点  $\mathbf{p}$  绕螺旋轴  $\mathbf{s}_2$  旋转  $\theta_2$  角度,再绕  $\mathbf{s}_1$  旋转  $\theta_1$  角度至终点  $\mathbf{q}$  时,求此时的  $\theta_1$  和  $\theta_2$ ,如图 4 所示。

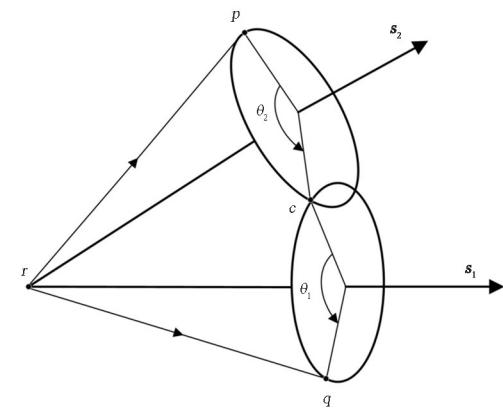


图 4 两相交关节螺旋运动

Fig. 4 Screw motion of two intersecting joints

关节 1 和关节 2 既不平行也不重合,则  $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2 \neq 0$ 。设  $\mathbf{c}$  是满足下式的点:

$$\exp(\theta_2 [\mathbf{s}_2]^*) \mathbf{p} = \mathbf{c} = \exp(-\theta_1 [\mathbf{s}_1]^*) \mathbf{q} \quad (14)$$

将上述子问题 2 分解为两个子问题 1 进行联

立求解可得满足上述矩阵方程的关节角  $\theta_1$  和  $\theta_2$ .

综上,采用旋量法和几何法相结合的方法推导出六自由度机械臂 GSK-RB03 的逆运动学解析解公式,当存在可行解的情况下,其个数通常不是唯一的.对于本文中的机械臂,其满足 Pieper 准则存在解析解,逆解的个数最多为 8 组.

## 2 轨迹规划及优化

轨迹规划的主要目标是通过设计合适的路径,确保机械臂在运动过程中的速度和加速度能够平稳地过渡,并且保持末端运动状态的稳定性.同样也需要我们在考虑运动学约束条件的基础上,寻找一条最优的轨迹,以实现机械臂的高效运动和稳定操作.

### 2.1 关节运动轨迹插值

为了确保机械臂在作业过程平稳运行并符合运动学约束条件,本文在机械臂关节空间进行轨迹规划,采用五次多项式插值函数能够有效的保证机械臂在关节空间内的运动轨迹连续且平滑,从而避免了关节运动速度和加速度值的突变现象.五次多项式函数中包含 6 个待求解的系数,通过给定各段路径的起始点和目标点的运动学约束条件得到角位移的插值公式,即:

$$\theta_j(t) = x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + x_4 t^4 + x_5 t^5 \quad (15)$$

其中  $j=1,2,\dots,6$  角速度和角加速度的表达式可通过对其求一阶和二阶导数获得.对于任意的  $\theta_j(t_0)$  和  $\theta_j(t_f)$  分别为每一段路径的起始点和终止点处的角度,根据连续性要求可得约束条件为:

$$\begin{cases} \theta_j(t_0) = x_0 \\ \theta_j(t_f) = x_0 + x_1 t_f + x_2 t_f^2 + x_3 t_f^3 + x_4 t_f^4 + x_5 t_f^5 \\ \dot{\theta}_j(t_0) = x_1 \\ \dot{\theta}_j(t_f) = x_1 + 2x_2 t_f + 3x_3 t_f^2 + 4x_4 t_f^3 + 5x_5 t_f^4 \\ \ddot{\theta}_j(t_0) = 2x_2 \\ \ddot{\theta}_j(t_f) = 2x_2 + 6x_3 t_f + 12x_4 t_f^2 + 20x_5 t_f^3 \end{cases} \quad (16)$$

将式(13)代入式(12)中可得:

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & t_0^3 & t_0^4 & t_0^5 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 3t_0^2 & 4t_0^3 & 5t_0^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_0 & 12t_0^2 & 20t_0^3 \\ 1 & t_f & t_f^2 & t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 0 & 1 & 2t_f & 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_j(t_0) \\ \dot{\theta}_j(t_0) \\ \ddot{\theta}_j(t_0) \\ \theta_j(t_f) \\ \dot{\theta}_j(t_f) \\ \ddot{\theta}_j(t_f) \end{bmatrix} \quad (17)$$

式(17)记为  $\mathbf{T} \mathbf{x} = \mathbf{B}$ .当每一段轨迹的插值不为 0 时,  $\mathbf{T}$  矩阵是可逆的.因此,本文轨迹优化的目标则为找出每一段轨迹在运动学约束条件下的运行时间,代入上式中即可求解得到每个关节各段运动轨迹函数的系数.

### 2.2 目标函数和约束条件

本文以机械臂到达每一段目标点的运动周期为优化对象,那么目标函数可以表示为:

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} T_i = \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \quad (18)$$

式中  $i=1,2,\dots,n$ , 表示轨迹上的  $n$  个路径点.  $T$  为机械臂末端的运动时间,度量的是其运行效率.

机械臂的运动学等性能受到物理学极限的约束.这些约束条件包括其最大运行速度为  $\dot{\theta}_{j\max}$ ,最大加速度为  $\ddot{\theta}_{j\max}$ ,最大加加速度为  $\dddot{\theta}_{j\max}$ .机械臂关节空间中的运动约束在其运动过程中应被严格满足,那么可以将优化问题表述为如下形式:

$$\begin{aligned} \min T &= T_1 + T_2 + \cdots + T_{n-1} \\ \text{s.t.} \quad &|\dot{\theta}_j| \leq \dot{\theta}_{j\max} \\ &|\ddot{\theta}_j| \leq \theta \ddot{\theta}_{j\max} \\ &|\dddot{\theta}_j| \leq \ddot{\theta}_{j\max} \end{aligned} \quad (19)$$

同时,在逆运动学求解中我们也应考虑关节限位条件如表 1 最后一列所示得到矩阵  $\mathbf{B}$ ,进而构造上述优化问题.

### 2.3 粒子群算法

粒子群优化算法是一种模拟鸟群和鱼群的迁徙及觅食等群体智能行为并将社会心理学的个体认知和社会影响等概念融入的随机搜索算法<sup>[25]</sup>.

#### (1) 算法基本原理

类似于群体协作搜寻食物的过程,每一个个体被称为“粒子”,都具有速度和位置两个属性.它们作为问题搜索空间中的有效解,通过求解问题定义的目标函数来确定粒子的适应度值,然后不断迭代搜索,根据粒子自身的历最优解和整个群体的全局最优解来更新粒子的飞行速度和下一代位置,让粒子在搜索空间中遍历,最终找到全局最优解.粒子的“位置—速度”模型迭代公式如下:

$$\mathbf{v}_{kd}^{h+1} = w \mathbf{v}_{kd}^h + c_1 r_1 (\mathbf{p}_{kd}^h - \mathbf{x}_{kd}^h) + c_2 r_2 (\mathbf{p}_{gd}^h - \mathbf{x}_{kd}^h) \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_{kd}^{h+1} = \mathbf{x}_{kd}^h + \mathbf{v}_{kd}^{h+1} \quad (21)$$

其中,  $k=1, 2, \dots, K$  表示为种群规模,  $d=1, 2, \dots, D$  表示为搜索空间的维度,  $h=1, 2, \dots, H$  表示为迭代次数;  $\mathbf{v}_{kd}^h$  代表的是第  $k$  个粒子在第  $h$  次迭代中速度的第  $d$  维分量,  $\mathbf{x}_{kd}^h$  代表的是第  $k$  个粒子在第  $h$  次迭代中位置的第  $d$  维分量,  $\mathbf{p}_{kd}^h$  代表的是第  $k$  个粒子个体最好位置的第  $d$  维分量,  $\mathbf{p}_{gd}^h$  代表的是种群最好位置的第  $d$  维分量;  $r_1, r_2$  为  $[0, 1]$  之间的随机数,  $c_1, c_2$  分别为个体认知因子和群体社会因子,  $w$  为惯性权重因子<sup>[26]</sup>.

## (2) 算法的改进

当权重因子  $w$  和学习因子  $c_1, c_2$  为常数时, 式(20)和式(21)称为标准的 PSO 算法<sup>[27]</sup>. 我们认为在不同时间段, 机械臂关节轨迹在优化算法中对  $w$  和  $c_1, c_2$  的要求是不同的. 较大的  $w$  值可以提高算法的全局搜索能力, 有助于发现新的位置, 在初始迭代阶段尤其适用; 较小的  $w$  值可以提高算法的局部搜索能力, 从而加速收敛, 适用于最终迭代阶段.  $c_1$  和  $c_2$  的值分别决定了粒子个体的认知能力和群体之间的信息共享能力. 当  $c_1$  值较大,  $c_2$  值较小时, 这样的组合可以提高算法的局部搜索能力, 这时粒子个体的自寻优过程占据活跃位置; 当  $c_1$  值较小,  $c_2$  值较大时, 算法的全局收敛速度提高, 群体的社会最优过程占据主导地位. 因此, 本文采用动态调整惯性权重因子和学习因子的自适应方法, 使 PSO 算法可以更快地计算出满足机械臂运行的最优指标, 提高机械臂的运行效率, 调整策略如下所示.

### ① 自适应惯性权重

$$w = w_{\max} - (w_{\max} - w_{\min}) \times \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{h}{h_{\max}} \right) \quad (22)$$

### ② 动态学习因子

$$c_1 = c_{1\max} - (c_{1\max} - c_{1\min}) \times \frac{h}{h_{\max}} \quad (23)$$

$$c_2 = c_{2\min} + (c_{2\max} - c_{2\min}) \times \frac{h}{h_{\max}}$$

综上所述, 式(20)~(23)构成了改进的粒子群自适应优化算法(Improved Particle Swarm Adaptive Optimization, IPSAO), 其具体实施步骤如下:

步骤 1 随机生成种群规模为  $K$  的时间粒子群, 给定各段路径点之间的插值时间为  $[t_{\min}, t_{\max}]$ . 同时, 随机初始化粒子速度, 设置算法最大迭代次

数以及惯性权重因子和学习因子的取值范围.

步骤 2 根据预定的目标函数评估初始粒子位置对应的适应度值, 将每个粒子的所达到历史最优位置更新为粒子当前位置, 比较所有粒子的当前最优解, 得到群体最优位置.

步骤 3 依据式(20)和式(21)对种群中每个粒子的速度向量及位置向量进行迭代更新, 同时计算每个粒子在其新位置的适应度值, 更新个体历史最优位置和群体最优位置, 生成新的种群.

步骤 4 根据当前迭代次数动态调整更新惯性权重因子和学习因子.

步骤 5 根据设定的终止条件判断算法迭代是否结束. 满足终止条件则输出关节每一段的运行最优时间; 反之, 则返回到步骤 2.

算法流程图如图 5 所示.

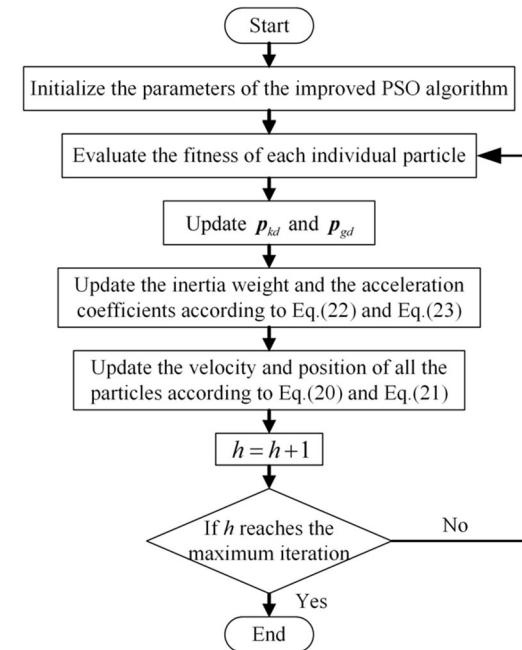


图 5 IPSAO 算法流程  
Fig. 5 Flow chat of IPSAO algorithm

## 3 轨迹优化仿真及结果分析

搬运机械臂经常应用于点到点(point to point, PTP)的抓放场合, 考虑实际的环境等因素, 故选择“门”字形的运动轨迹, 示例如图 6 所示.

本文以 GSK-RB03 机械臂为研究对象, 各关节的运动学约束条件如表 2 所示.

在任务空间坐标系中确定机械臂末端执行器的运动轨迹时, 这涉及从起始位置到结束位置的整个路径规划, 包括给定的所有中间点. 同时, 借助逆运动学将这些路径点转化为机械臂在不同位姿下

各关节运动角度值。假设各路径点经逆运动学求解后,各关节对应的具体角度值如表 3 所示。

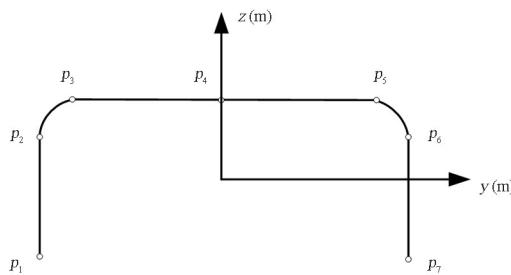


图 6 搬运示例轨迹

Fig. 6 Example trajectory of handling condition

表 2 运动学约束

Table 2 Kinematic constraints

Joint $j$	1	2	3	4	5	6
$\theta_j$ ( $^{\circ}/s$ )	6150	150	180	270	270	270
$\ddot{\theta}_j$ ( $^{\circ}/s^2$ )	70	70	70	80	80	80
$\dddot{\theta}_j$ ( $^{\circ}/s^3$ )	100	100	100	120	120	120

表 3 关节空间插值点

Table 3 Joint space interpolation points for each joint

N	Joint angle1					
	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
1	15.23	-0.91	14.75	36.18	9.81	23.35
2	15.22	-16.94	28.29	28.95	11.91	30.39
3	8.38	-31.88	30.77	8.00	23.60	45.41
4	0	-27.36	16.06	-0.02	33.80	45.01
5	-6.49	-19.72	-3.91	-3.44	46.05	41.39
6	-9.98	2.81	-35.09	-4.68	54.57	38.48
7	-9.99	30.08	-74.35	-4.15	66.50	37.41

本文以机械臂工作效率最优为前提,将关节轨迹运行时间作为粒子变量,通过改进的粒子群优化算法寻优。在上文提出的 IPSAO 算法中,关节轨迹运行时间的粒子数量和迭代次数可以任意给定。而  $w, c_1$  和  $c_2$  这些变量的取值随迭代次数而自适应改变,仅给定他们的约束范围。本文取“门型”轨迹的粒子维度为  $d = 6$ , 种群规模为  $K = 40$ ,  $w \in [0.4, 0.9]$ ,  $c_1, c_2 \in [0.8, 1.5]$ , 各段轨迹运行时间为  $t \in [0.01, 15]$ , 最大迭代次数  $H = 50$ 。在考虑机械臂关节物理约束条件下,记录种群最优位置在每次迭代过程中的位置变化,如图 7 所示。

由图 7 可以看出,标准 PSO 算法在迭代 50 次后才有收敛的趋势,未能达到全局收敛。而改进 PSO 算法在进行第 30 次迭代后就已经趋于收敛,

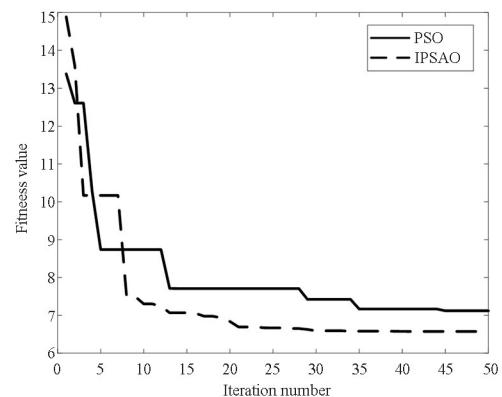


图 7 粒子适应度迭代曲线

Fig. 7 Iteration curve of particle fitness

第 34 次迭代后收敛到全局最优解并保持稳定,大幅提升了算法的运行时间和收敛速度。两种优化算法规划出的机械臂各段轨迹运行时间如表 4 所示。

表 4 优化轨迹运行时间

Table 4 Running time of optimal trajectory

Algorithm	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_{total}$
PSO	2.00	0.91	0.69	0.69	0.91	2.00	7.20
IPSAO	1.75	0.77	0.80	0.80	0.77	1.75	6.64

由表 4 可得,采用标准 PSO 算法机械臂关节运动总耗时为 7.2 s,使用改进的 PSO 算法则需要耗时 6.64 s,这一数据表明改进后的 PSO 算法使机械臂运行时间减少了 8.43%,使得机械臂的工作效率得到提升。因此,本文所提的自适应改进方法具有一定的可行性和优越性。

将采用上述改进的 PSO 算法寻优搜索到的各段关节轨迹执行时间代入到式(17)中求解方程组得到每个关节各段运动轨迹函数的系数,然后代入式(15)中即可得到机械臂各关节在满足运动学约束条件下的运动情况,仿真结果如图 8~图 11 所示。

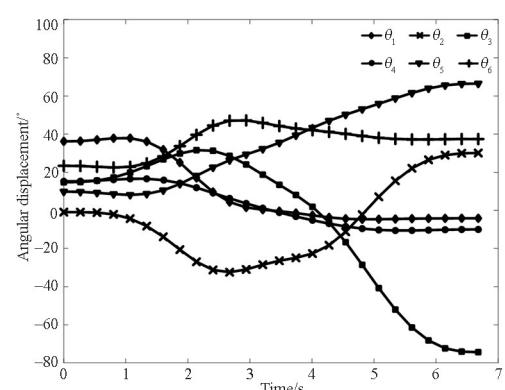


图 8 角位移变化曲线

Fig. 8 Joint angular displacement curve

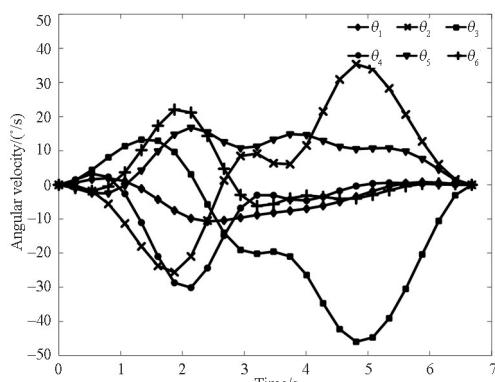


图 9 角速度变化曲线  
Fig. 9 Joint angular velocity curve

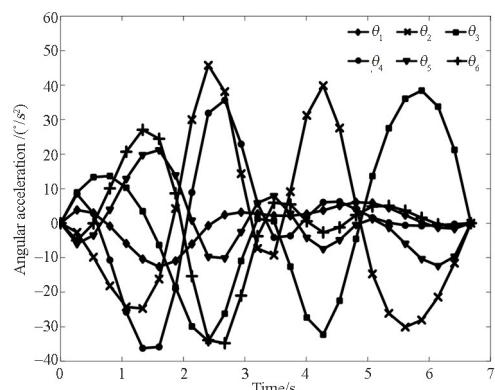


图 10 角加速度变化曲线  
Fig. 10 Joint angular acceleration curve

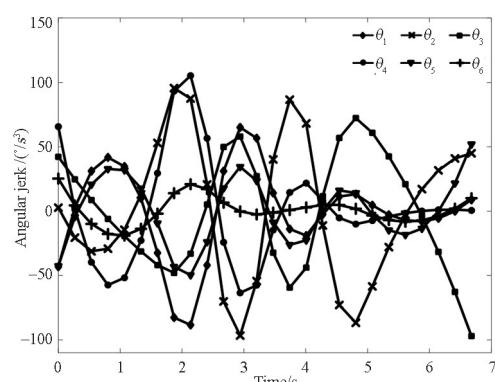


图 11 角加加速度变化曲线  
Fig. 11 Joint angular jerk curve

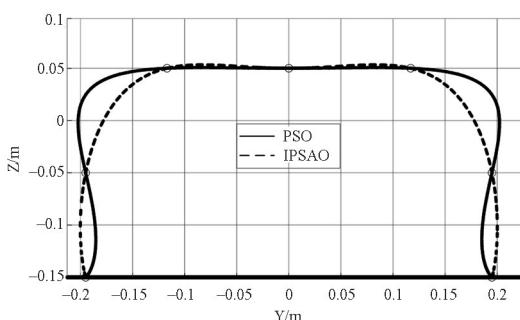


图 12 “门型”轨迹  
Fig. 12 “Door” trajectory

由图 8~图 11 可得, 机械臂的各个关节都在较短的时间内准确地达到了所设定的路径点, 在整个运行过程中, 机械臂各关节的运行轨迹保持连续平稳, 没有发生突变, 并且严格满足速度和加速度的约束条件, 这一结果充分验证了所采用方法的有效性, 表明该方法在实际应用中具有良好的稳定性和可靠性.

最后, 通过机械臂的正运动学仿真可以得到两种优化算法下的末端执行器“门型”轨迹, 如图 12 所示. 可以看出, 改进后的运动轨迹在转角处曲率较小, 斜率变化较为平缓, 整个运动过程较为平稳, 符合运行工况要求, 使关节驱动更加柔顺, 提高了机械臂的工作效率.

## 4 结论

根据机械臂在搬运工况下的运动轨迹, 本文提出了一种单一目标优化方法, 以获得机械臂的时间最优轨迹. 首先, 采用五次多项式方法对关节空间中的关键点进行连接, 生成机械臂的搬运轨迹. 其次, 以机械臂的工作效率为目标函数, 并确保满足机械臂的运动学约束不等式, 提出了一种基于自适应变换惯性权重和动态调整学习因子的改进 PSO 算法来优化关节插值时间. 最后, 以机械臂在搬运作业中的应用为仿真实例, 仿真结果表明, 与传统的 PSO 算法相比, 所提出的时间最优改进粒子群算法具有更快的收敛速度, 并且能够找到全局最优解, 使用所提出的改进 PSO 算法将机械臂的运行时间由 7.20 s 缩短到 6.64 s, 效率提升了 8.43%, 获得了良好的轨迹性能, 能够让关节运行更加柔顺, 更有效地保护电机, 从而可以提高机械臂的使用寿命.

## 参考文献

- [1] WANG X W, ZHOU X, XIA Z L, et al. A survey of welding robot intelligent path optimization [J]. Journal of Manufacturing Processes, 2021, 63: 14–23.
- [2] 闵熔祺, 张舒. 多移动机械臂系统动力学建模以及稳定性分析 [J]. 动力学与控制学报, 2024, 21 (12): 103–109.
- MIN R Q, ZHANG S. Dynamics modelling and stability analysis of a multi-mobile robotic manipulator system [J]. Journal of Dynamics and Control,

- 2024, 21(12): 103–109. (in Chinese)
- [3] 方虹斌, 郑立, 张琦炜, 等. 柔性机械臂动力学建模研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 5–21.
- FANG H B, ZHENG L, ZHANG Q W, et al. Research progress on dynamics modeling of flexible robotic arms: a review [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(12): 5–21. (in Chinese)
- [4] 张玉松. 六自由度机械臂空间轨迹规划方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2014.
- ZHANG Y S. 6-DOF manipulator trajectory planning methods research [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2014. (in Chinese)
- [5] LI X F, ZHAO H, HE X M, et al. A novel Cartesian trajectory planning method by using triple NURBS curves for industrial robots [J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2023, 83: 102576.
- [6] DING H G, SANG Z W, LI Z P, et al. Trajectory planning and control of large robotic excavators based on inclination-displacement mapping [J]. Automation in Construction, 2024, 158: 105209.
- [7] WANG B R, WANG J X, HUANG Z H, et al. Motion planning of an inchworm robot based on improved adaptive PSO [J]. Processes, 2022, 10(9): 1675.
- [8] 王本亮, 高山, 孙宏伟, 等. 一种基于几何力学的机械臂末端规划算法 [J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(5): 391–396.
- WANG B L, GAO S, SUN H W, et al. An algorithm of path planning for manipulator end-effector based on geometric mechanics [J]. Journal of Dynamics and Control, 2018, 16(5): 391–396. (in Chinese)
- [9] YUE M, HOU X Q, ZHAO X D, et al. Robust tube-based model predictive control for lane change maneuver of tractor-trailer vehicles based on a polynomial trajectory [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(12): 5180–5188.
- [10] 白云飞, 张奇峰, 范云龙, 等. 基于能耗优化的深海电动机械臂轨迹规划 [J]. 机器人, 2020, 42(3): 301–308.
- BAI Y F, ZHANG Q F, FAN Y L, et al. Trajectory planning of deep-sea electric manipulator based on energy optimization [J]. Robot, 2020, 42(3): 301–308. (in Chinese)
- [11] ATA A A. Optimal trajectory planning of manipulators: a review [J]. Journal of Engineering Science and technology, 2007, 2(1): 32–54.
- [12] 雷秀娟. 群智能优化算法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2012: 87–129.
- LEI X J. Swarm intelligent optimization algorithms and their applications [M]. Beijing: Science Press, 2012: 87–129. (in Chinese)
- [13] 孙家泽, 王曙燕. 群体智能优化算法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2017: 36–48.
- SUN J Z, WANG S Y. Swarm intelligence algorithm and its application [M]. Beijing: Science Press, 2017: 36–48. (in Chinese)
- [14] DING R Q, WANG J H, CHENG M, et al. Vibration-polynomial-based optimal trajectory planning for mobile concrete pumping equipment with state constraints [J]. Automation in Construction, 2024, 158: 105246.
- [15] EKREM Ö, AKSOY B. Trajectory planning for a 6-axis robotic arm with particle swarm optimization algorithm [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2023, 122: 106099.
- [16] LIU C, CAO G H, QU Y Y, et al. An improved PSO algorithm for time-optimal trajectory planning of Delta robot in intelligent packaging [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2020, 107(3): 1091–1099.
- [17] 王成, 王朝立, 赵忆文. 基于改进粒子群优化的乒乓球发球机械手轨迹规划 [J]. 智能计算机与应用, 2022, 12(4): 1–9, 14.
- WANG C, WANG C L, ZHAO Y W. Trajectory planning of table tennis serving manipulators based on improved particle swarm optimization [J]. Intelligent Computer and Applications, 2022, 12(4): 1–9, 14. (in Chinese)
- [18] LUO L, GUO T B, CUI K K, et al. Trajectory planning in robot joint space based on improved quantum particle swarm optimization algorithm [J]. Applied Sciences, 2023, 13(12): 7031.
- [19] YANG Y, XU H Z, LI S H, et al. Time-optimal trajectory optimization of serial robotic manipulator with kinematic and dynamic limits based on improved particle swarm optimization [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2022, 120(1): 1253–1264.
- [20] DU Y X, CHEN Y H. Time optimal trajectory planning algorithm for robotic manipulator based on locally

- chaotic particle swarm optimization [J]. Chinese Journal of Electronics, 2022, 31(5): 906—914.
- [21] DAI J S. Euler-Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 92: 144—152.
- [22] WANG K, DAI J S. The dual Euler-Rodrigues formula in various mathematical forms and their intrinsic relations [J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 181: 105184.
- [23] PIEPER D L. The kinematics of manipulators under computer control [D]. Palo Alto, CA, USA: Stanford University, 1969.
- [24] PADEN B E. Kinematics and control of robot manipulators [D]. Berkeley, CA, USA: University of California, Berkeley, 1985.
- [25] 倪庆剑, 邢汉承, 张志政, 等. 粒子群优化算法研究进展 [J]. 模式识别与人工智能, 2007, 20(3): 349—357.
- [26] NI Q J, XING H C, ZHANG Z Z, et al. Survey of particle swarm optimization algorithm [J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2007, 20(3): 349—357. (in Chinese)
- [27] 王延年, 向秋丽. 基于改进粒子群优化算法的六自由度机器人轨迹优化算法 [J]. 国外电子测量技术, 2020, 39(1): 49—53.
- [28] WANG Y N, XIANG Q L. Trajectory of 6-DOF robot based on improved particle swarm optimization algorithm [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2020, 39(1): 49—53. (in Chinese)
- [29] JAIN M, SAIHJPAL V, SINGH N, et al. An overview of variants and advancements of PSO algorithm [J]. Applied Sciences, 2022, 12(17): 8392.