

三层应变梯度微板系统的耦合振动特性^{*}

文鹏军¹ 张波^{1†} 李成² 沈火明¹

(1. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 611756)

(2. 常州工学院 汽车工程学院, 常州 213032)

摘要 基于修正的应变梯度理论和 Kirchhoff-Love 假设,建立了由 Winkler-Pasternak 弹性夹层连接的三层微板系统的耦合振动模型. 结合 Gauss-Lobatto 求积准则和微分求积准则,构造了具有 4 节点 108 个自由度的 C^2 连续性微分求积有限元,以求解微板系统的耦合振动边值问题. 通过数值算例,验证了本文微分求积有限元法的有效性,讨论了各因素对微板系统振动频率及模态的影响. 结果表明:微板系统发生完全同步振动时,弹性夹层不起作用;应变梯度效应或弹性夹层刚度不仅影响微板系统的各阶振动频率,而且会使系统产生模态跃迁现象;边界条件对微板系统振动频率计模态的影响显著.

关键词 修正的应变梯度理论, 三层微板系统, 耦合振动, 微分求积有限元, 模态跃迁

中图分类号: TH131

文献标志码: A

Coupled Vibration Characteristics of the Triple-Layered Strain Gradient Microplate System^{*}

Wen Pengjun¹ Zhang Bo^{1†} Li Cheng² Shen Huoming¹

(1. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

(2. School of Automotive Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213032, China)

Abstract Based on the modified strain gradient theory and the Kirchhoff-Love hypothesis, a coupled vibration model for a triple-layered microplate system connected by Winkler-Pasternak elastic interlayers is established. By combining the Gauss-Lobatto quadrature and the differential quadrature rules, a C^2 continuous differential quadrature finite element with 4 nodes and 108 degrees of freedom is constructed to solve the boundary value problem of the coupled vibration of the microplate system. Numerical examples validate the effectiveness of the differential quadrature finite element method proposed in this paper, and the influences of various factors on the vibration frequencies and modes of the microplate system are discussed. The results show that the elastic interlayers are ineffective during in-phase vibration of the microplate system. Both the strain gradient effect and the stiffness of the elastic interlayers affect not only the vibration frequencies of the microplate system at various orders but also induce mode jumping phenomena in the system. Boundary conditions significantly influence the vibration frequencies and modes of the microplate system.

Key words modified strain gradient theory, triple-layered microplate system, coupled vibration, differential quadrature finite element, mode jumping

2024-06-29 收到第 1 稿, 2024-08-20 收到修改稿.

^{*} 四川省自然科学基金面上项目(23NSFSC0849), 国家自然科学基金(12272064, 11602204), Natural Science Foundation of Sichuan Province(23NSFSC0849), National Natural Science Foundation of China (12272064, 11602204).

[†] 通信作者 E-mail: Zhangbo2008@swjtu.edu.cn

引言

微机电系统(MEMS)是利用微纳加工技术,将微小的传感器、执行机械结构和电子电路集成在一起,形成微型的机械系统,已广泛应用于汽车、医疗、消费电子、工业控制等领域。MEMS 的承力构件通常以微梁、微板、微管等形式存在。当构件特征尺寸减小至微纳米量级时,其力学特性具有显著的尺度依赖性^[1,2]。为了描述尺度效应现象,研究者们提出了非局部理论^[3,4]、应变梯度理论^[5-8]和偶应力理论^[9,10]等非经典连续介质力学理论。过去 20 年里,以上非经典理论被广泛应用于研究微纳米梁、板、壳等结构的静动力学行为^[11,12]。

随着 MEMS 应用场景越来越广泛,单层微板已难以满足当下日益增长的集成化和多功能化需求。多层微板系统是单层微板的重要技术延伸,通过层间垂直堆叠和互连突破了单层功能元件集成密度的物理限制,现如今已在可移动反射镜、射频开关、驱动器、谐振器、可延展电路等领域获得广泛应用。因在边界条件、层厚比、材料参数以及受载方式选择上具有高度可调节性,多层微板系统的力学特性引起了诸多学者的重视。Rajasekaran^[13]基于 Eringen 非局部弹性理论研究了不同形状嵌入聚合物基体的多层石墨烯片在不同边界条件下的自由振动特性并分析了各参数对石墨烯片振动特性的影响。张立民等^[14,15]基于修正的偶应力理论和精化高阶剪切变形理论研究了由 Winkler-Pasternak 弹性夹层连接的双层微板系统的自由振动特性与面内压缩屈曲行为,用 Navier 法获得了各层均为四边简支时系统发生同步/异步屈曲的解析解。Mazur 和 Awrejcewicz^[16]基于非局部弹性理论、Kirchhoff 板理论和 von Kármán 理论研究了层间由范德华力连接的双层石墨烯薄片系统在平面磁场下的几何非线性振动,对同相振动和反相振动模式受非局部参数的影响进行了分析。Liu 等^[17]提出了一种非经典的精细剪切变形理论模型,并结合等几何分析分析了多层微孔板的静态弯曲、自由振动和屈曲行为。Shafiei 等^[18]采用修正的偶应力理论研究了单层石墨烯片和层间由范德华力连接多层石墨烯片的屈曲和自由振动特性,发现范德华力的影响相较于其它参数占主导地位。Abbaspour 和 Arvin^[19]对一致偶应力理论进行了修正,使其与修

正的偶应力理论兼容,完成了对三层中心对称压电微孔板自由振动和强迫振动的研究并进行了热屈曲分析。

以上文献回顾表明,双层微板系统的动力学问题已受到较多关注,且主要局限于各层均为四边简支的情形,而关于三层微板系统的研究还鲜有涉及。较之于双层情形,三层情形下系统会出现更加丰富的动力学新现象。本文拟基于修正的应变梯度理论和 Kirchhoff-Love 假设,建立三层微板系统的耦合振动模型,并构造 C^2 型微分求积有限元进行模型求解,探讨边界条件、弹性夹层刚度、应变梯度参数对系统振动频率及模态的影响。

1 微板系统的耦合振动建模

在修正的应变梯度理论中,各向同性线弹性体在所占据空间 Ω 中存储的变形能 Π_s 为^[5]

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{(s)} \chi_{ij}^{(s)}) d\Omega \quad (1)$$

式中: ϵ_{ij} , γ_i , $\eta_{ijk}^{(1)}$ 和 $\chi_{ij}^{(s)}$ 分别是应变张量、膨胀梯度张量、拉伸梯度张量偏斜部分和旋转梯度张量对称部分; σ_{ij} 为应力张量, p_i , $\tau_{ijk}^{(1)}$ 和 $m_{ij}^{(s)}$ 为高阶应力张量。

变形度量 ϵ_{ij} , γ_i , $\eta_{ijk}^{(1)}$ 和 $\chi_{ij}^{(s)}$ 定义为

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \gamma_i = \frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial x_i}, \\ \chi_{ij}^{(s)} &= \frac{1}{4} \left(e_{imn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_j} + e_{jmn} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_m \partial x_i} \right), \\ \eta_{ijk}^{(1)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) - \\ &\quad \frac{\delta_{ij}}{15} \left(\frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial x_k} + \frac{2\partial \epsilon_{mk}}{\partial x_m} \right) - \frac{\delta_{jk}}{15} \left(\frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial x_i} + \frac{2\partial \epsilon_{mi}}{\partial x_m} \right) - \\ &\quad \frac{\delta_{ki}}{15} \left(\frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial x_j} + \frac{2\partial \epsilon_{mj}}{\partial x_m} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式中: e_{ijk} 是置换符号, δ_{ij} 是克罗内克符号; u_i 是位移矢量。

本构方程如下

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2G \epsilon_{ij}, \quad p_i = 2Gl_0^2 \gamma_i \\ \tau_{ijk}^{(1)} &= 2Gl_1^2 \eta_{ijk}^{(1)}, \quad m_{ij}^{(s)} = 2Gl_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \end{aligned} \quad (3)$$

式中: l_0 , l_1 , l_2 是应变梯度参数, $G = E/2(1+\nu)$ 是剪切模量, $\lambda = Ev/(1+\nu)(1-2\nu)$ 是体积模量。

图 1 所示为各层几何尺寸和材料性质均相同的三层微板系统,层间由 Winkler-Pasternak 弹性

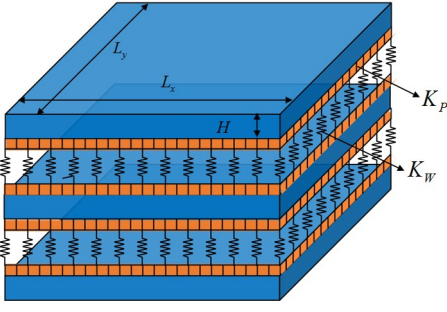


图1 三层微板系统的示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the triple-layered microplate system

夹层相连。微板的长度、宽度、厚度依次为 L_x 、 L_y 、 H ，材料的弹性模量、泊松比、剪切模量、密度依次为 E 、 ν 、 G 、 ρ 。笛卡尔直角坐标系的坐标面与各层微板的几何中面重合且原点位于中面左上角。

在 Kirchhoff-Love 假设下，第 p 层微板的位移场如下

$$u_x^{(p)} = -z \frac{\partial w^{(p)}}{\partial x}, u_y^{(p)} = -z \frac{\partial w^{(p)}}{\partial y}, u_z^{(p)} = w^{(p)} \quad (4)$$

式中： $u_x^{(p)}$ 、 $u_y^{(p)}$ 、 $u_z^{(p)}$ 分别为第 p 层微板内一点沿着 x 、 y 、 z 方向的位移分量， $w^{(p)}$ 是第 p 层微板中面的挠度。

利用式(2)和式(4)，可得各层微板的应变张量和应变梯度张量的非零分量。依据文献[20]，不难得到微板系统的变动能：

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \sum_{p=1}^3 \int_{\Omega} \left\{ \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_i^{(p)}}{\partial y^2} \right)^2 \right] + \right. \\ & \Sigma_2 \left(\frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x \partial y} \right)^2 + \Sigma_3 \left[\left(\frac{\partial^3 w^{(p)}}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 w_i^{(p)}}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right] + \\ & \Sigma_1 \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w^{(p)}}{\partial y^2} + \\ & \Sigma_4 \left(\frac{\partial^3 w^{(p)}}{\partial x^3} \frac{\partial^3 w_i^{(p)}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 w^{(p)}}{\partial y^3} \frac{\partial^3 w_i^{(p)}}{\partial x^2 \partial y} \right) + \\ & \left. \frac{\Sigma_3 + \Sigma_4}{3} \left[\left(\frac{\partial^3 w^{(p)}}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 w_i^{(p)}}{\partial y^3} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (5) \end{aligned}$$

式中 Σ_j 定义如下：

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= GH \left(2l_0^2 - \frac{2l_1^2}{15} - l_2^2 \right) + \nu D, \\ \Sigma_2 &= GH \left(\frac{2l_1^2}{3} + 2l_2^2 \right) + (1 - \nu) D, \\ \Sigma_3 &= \frac{GH^3}{12} \left(l_0^2 + \frac{12l_1^2}{5} \right), \Sigma_4 = \frac{GH^3}{6} \left(l_0^2 - \frac{3l_1^2}{5} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

系统的动能为

$$\Pi_k = \frac{\rho H}{2} \sum_{p=1}^3 \int_A \left(\frac{\partial w^{(p)}}{\partial t} \right)^2 dA \quad (7)$$

Winkler-Pasternak 弹性夹层引起的势能为

$$\begin{aligned} \Pi_f = & \frac{1}{2} K_W (w^{(1)} - w^{(2)})^2 + \\ & \frac{1}{2} K_P \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_P \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} K_W (w^{(2)} - w^{(3)})^2 + \frac{1}{2} K_P \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} - \frac{\partial w^{(3)}}{\partial x} \right)^2 + \\ & \frac{1}{2} K_P \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} - \frac{\partial w^{(3)}}{\partial y} \right)^2 \quad (8) \end{aligned}$$

考虑式(5)、式(7)和式(8)，利用变分原理可得微板系统的耦合振动方程

$$\begin{aligned} (K_W - K_P \nabla^2) (w^{(2)} - w^{(1)}) - \rho H \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial t^2} - \\ (\Sigma_1 + \Sigma_2) \nabla^4 w^{(1)} + (\Sigma_3 + \Sigma_4) \nabla^6 w^{(1)} = 0, \\ (K_W - K_P \nabla^2) (w^{(1)} - 2w^{(2)} + w^{(3)}) - \\ \rho H \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2} - (\Sigma_1 + \Sigma_2) \nabla^4 w^{(2)} + \\ (\Sigma_3 + \Sigma_4) \nabla^6 w^{(2)} = 0, \\ (K_W - K_P \nabla^2) (w^{(2)} - w^{(3)}) - \rho H \frac{\partial^2 w^{(3)}}{\partial t^2} - \\ (\Sigma_1 + \Sigma_2) \nabla^4 w^{(3)} + (\Sigma_3 + \Sigma_4) \nabla^6 w^{(3)} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

对于各层均为四边简支的情形，系统自由振动的解析解可通过 Navier 法求解如下广义特征值方程：

$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix} & \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

式中， $M_{11} = M_{22} = M_{33} = \rho H (1 + \Delta_{mn}^2 H^2)$ ，

$$\begin{aligned} K_{11} &= \Delta_{mn}^4 \left(\frac{2(\Sigma_3 + \Sigma_4)}{3} \Delta_{mn}^2 + \Sigma_1 + \Sigma_2 \right) + \\ & K_P \Delta_{mn}^2 + K_W, \\ K_{33} &= K_{11}, K_{22} = K_{11} + K_P \Delta_{mn}^2 + K_W, \\ K_{32} &= K_{23} = K_{21} = K_{12} = -K_P \Delta_{mn}^4 - K_W, \\ K_{13} &= K_{31} = 0, \Delta_m = m\pi/L_x, \Delta_n = n\pi/L_y, \\ \Delta_{mn}^2 &= \Delta_m^2 + \Delta_n^2. \end{aligned} \quad (11)$$

2 微板系统的微分求积有限元求解

从式(5)可以看到，微板系统的势能泛函中出现了挠度的三阶偏导数，这就要求各层挠度满足 C^2 连续性。此外，各层在边界约束方面可以呈现出复杂多样性。因而，难以通过解析手段获得一般情

式中: $w_{ij}^{(p)}$ 为第 p 层微板单元在求积点 (x_i, y_i) 处的挠度值, $l_i(x)$ 、 $l_j(y)$ 分别为 x 、 y 方向 Lagrange 插值基函数. 依据微分求积准则, 单元 Gauss-Lobatto 求积点处 $w^{(p)}$ 的各阶导数可以表示为矩阵形式:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^{m+n} w^{(p)}}{\partial x^m \partial y^n} \right]_{\text{GL}} &= \mathbf{A}_x^{(m)} \mathbf{A}_y^{(n)} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)}, \\ \left[\frac{\partial^m w^{(p)}}{\partial x^m} \right]_{\text{GL}} &= \mathbf{A}_x^{(m)} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)}, \\ \left[\frac{\partial^n w^{(p)}}{\partial y^n} \right]_{\text{GL}} &= \mathbf{A}_y^{(n)} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)} \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{A}_x^{(m)}$ 和 $\mathbf{A}_y^{(n)}$ (本文 m, n 取值 0, 1, 2) 为微分求积权系数矩阵^[20]; $\mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)}$ 为第 p 层微板单元中各求积点处挠度形成的如下所示列向量

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)} &= [\mathbf{w}_{11}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{21}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{31}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{41}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{51}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{61}^{(p)} \\ &\quad \mathbf{w}_{12}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{22}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{32}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{42}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{52}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{62}^{(p)} \\ &\quad \mathbf{w}_{13}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{23}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{33}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{43}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{53}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{63}^{(p)} \\ &\quad \mathbf{w}_{14}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{24}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{34}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{44}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{54}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{64}^{(p)} \\ &\quad \mathbf{w}_{15}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{25}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{35}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{45}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{55}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{65}^{(p)} \\ &\quad \mathbf{w}_{16}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{26}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{36}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{46}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{56}^{(p)} \quad \mathbf{w}_{66}^{(p)}]^\text{T} \end{aligned} \quad (16)$$

若采用式(15)分别离散微板系统变形能和动能, 所得表达式仅包含 Gauss-Lobatto 求积点处挠度本身. 为满足单元间协调性要求, 需要通过微分求积准则将单元求积点处位移列向量 $\mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)}$ 转换为单元角点处位移列向量 $\mathbf{w}_N^{(p)}$, 即

$$\mathbf{w}_N^{(p)} = \mathbf{B} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)} \quad (17)$$

式中:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_N^{(p)} &= \left[\langle \mathbf{w}^{(p)} \rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x} \right\rangle_{11} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{11} \right. \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(p)} \rangle_{61} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x} \right\rangle_{61} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{61} \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(p)} \rangle_{66} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x} \right\rangle_{66} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{66} \\ &\quad \left. \langle \mathbf{w}^{(p)} \rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x} \right\rangle_{16} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(p)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{16} \right]^\text{T} \end{aligned} \quad (18)$$

利用微分求积准则可得

$$\mathbf{w}_N^{(p)} = \mathbf{B} \mathbf{w}_{\text{GL}}^{(p)} \quad (19)$$

式中: 转换矩阵 $\mathbf{B}$ 的表达式参见文献[20].

利用式(15)和(19)可将式(5)中变形能离散为

$$\Pi_S = \sum_{p=1}^3 \{ (\mathbf{w}_N^{(p)})^\text{T} (\mathbf{B}^{-1})^\text{T} \{ \Sigma_1 (\mathbf{A}_x^{(2)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_y^{(2)} +$$

$$\begin{aligned} &\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2}{2} [(\mathbf{A}_x^{(2)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(2)} + (\mathbf{A}_y^{(2)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_y^{(2)}] + \\ &\frac{\Sigma_3 + \Sigma_4}{3} [(\mathbf{A}_x^{(3)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(3)} + (\mathbf{A}_y^{(3)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_y^{(3)}] + \\ &\Sigma_3 [(\mathbf{A}_x^{(1)} \mathbf{A}_y^{(2)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(1)} \mathbf{A}_y^{(2)} + \\ &(\mathbf{A}_x^{(2)} \mathbf{A}_y^{(1)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(2)} \mathbf{A}_y^{(1)}] + \\ &\Sigma_4 [(\mathbf{A}_x^{(3)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(1)} \mathbf{A}_y^{(2)} + (\mathbf{A}_y^{(3)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(2)} \mathbf{A}_y^{(1)}] + \\ &\Sigma_2 (\mathbf{A}_x^{(1)} \mathbf{A}_y^{(1)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(1)} \mathbf{A}_y^{(1)} \} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{w}_N^{(p)} \} \end{aligned} \quad (20)$$

式中: $\mathbf{C}_G$ 为权系数矩阵, 具体参见文献[20].

利用式(15)和(19)可将式(7)中动能离散为

$$\Pi_k = \sum_{p=1}^3 \left[\frac{1}{2} \rho H (\dot{\mathbf{w}}_N^{(p)})^\text{T} (\mathbf{B}^{-1})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{B}^{-1} \dot{\mathbf{w}}_N^{(p)} \right] \quad (21)$$

利用式(15)和(19)可将式(8)中弹簧势能离散为

$$\begin{aligned} \Pi_f &= (\mathbf{w}_N^{(1)} - \mathbf{w}_N^{(2)})^\text{T} (\mathbf{B}^{-1})^\text{T} \left[\frac{1}{2} K_w \mathbf{C}_G + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} K_p (\mathbf{A}_x^{(1)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(1)} \right] \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{w}_N^{(1)} - \mathbf{w}_N^{(2)}) + \\ &\quad (\mathbf{w}_N^{(2)} - \mathbf{w}_N^{(3)})^\text{T} (\mathbf{B}^{-1})^\text{T} \left[\frac{1}{2} K_w \mathbf{C}_G + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} K_p (\mathbf{A}_x^{(1)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_x^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} K_p (\mathbf{A}_y^{(1)})^\text{T} \mathbf{C}_G \mathbf{A}_y^{(1)} \right] \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{w}_N^{(2)} - \mathbf{w}_N^{(3)}) \end{aligned} \quad (22)$$

引入以下单元总体位移列向量:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_N &= \\ &[\langle \mathbf{w}^{(1)} \rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial x} \right\rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial y} \right\rangle_{11} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{11} \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(2)} \rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)}}{\partial x} \right\rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)}}{\partial y} \right\rangle_{11} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(2)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{11} \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(3)} \rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(3)}}{\partial x} \right\rangle_{11} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(3)}}{\partial y} \right\rangle_{11} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(3)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{11} \\ &\quad \vdots \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(1)} \rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial x} \right\rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(1)}}{\partial y} \right\rangle_{16} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(1)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{16} \\ &\quad \langle \mathbf{w}^{(2)} \rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)}}{\partial x} \right\rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(2)}}{\partial y} \right\rangle_{16} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(2)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{16} \\ &\quad \left. \langle \mathbf{w}^{(3)} \rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(3)}}{\partial x} \right\rangle_{16} \quad \left\langle \frac{\partial \mathbf{w}^{(3)}}{\partial y} \right\rangle_{16} \quad \cdots \quad \left\langle \frac{\partial^4 \mathbf{w}^{(3)}}{\partial x^2 \partial y^2} \right\rangle_{16} \right]^\text{T} \end{aligned} \quad (23)$$

$\mathbf{K}^e$ 和 $\mathbf{M}^e$ 的元素可以表示为

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \frac{\partial^2 (\Pi_S + \Pi_f)}{\partial \mathbf{d}_N(i) \partial \mathbf{d}_N(j)}, \quad \mathbf{M}_{ij}^{(e)} = \frac{\partial^2 \Pi_k}{\partial \mathbf{d}_N(i) \partial \mathbf{d}_N(j)} \quad (24)$$

综上所述, 三层微板单元各层均被离散为具有

4 个节点矩形单元,每个节点处包含 9 个自由度,将三层微板单元各层在相同角点位置的节点合视为一个整体节点,新节点处便有 27 个自由度. 矩形微板常见边界约束主要有固支(C)、简支(S)以及自由(F),数值实施中对应的位移边界条件参见文献[20]中单层情形.

3 结果和讨论

本节通过数值算例来验证本文理论模型及数值方法的有效性,并讨论应变梯度参数、弹性夹层刚度和边界条件对微板系统振动特性的影响. 假定微板由环氧树脂组成,弹性模量 $E=1.44\text{GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$,密度 $\rho=1220\text{kg/m}^3$. 引入以下无量纲参数:

$$\bar{\omega}_n = \omega_n L_Y^2 \sqrt{\frac{\rho H}{D}}, \bar{k}_w = \frac{K_w L_Y^4}{D}, \bar{k}_p = \frac{K_p L_Y^2}{D}$$

(25)

3.1 有效性验证

已有文献对应变梯度板的微分求积有限元的收敛性进行了验证,结果证明了在相同结点参数下微分求积有限元与标准有限元相比具有更低的单元矩阵条件数. 本节讨论了单元收敛性与网格密度的关系. 图 3 给出了边界条件为 SFSF-SFSF-SFSF 不同网格下三层微板系统前 5 阶无量纲固有频率,其中 $\bar{k}_w=100, \bar{k}_p=10, L_y=L_x=1, L_x/H=100, l/H=1$. 结果显示,随着网格的细化,前 5 阶无量纲频率收敛于稳定值. 若无特别说明,后续计算中网格密度保持为 30×30 .

表 1 比较了本文求解方法和文献[22]中 Rayleigh-Ritz 法计算的宏观单层方形板的无量纲频率,

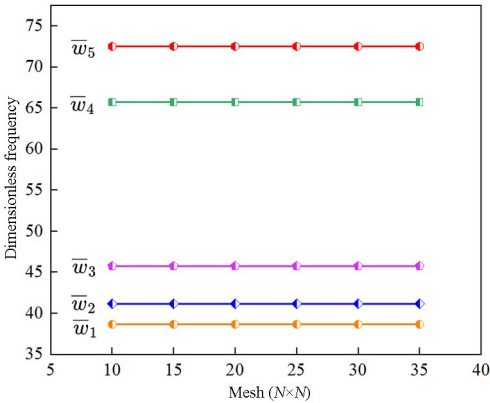


图 3 不同网格下微板系统的前 5 阶无量纲固有频率
Fig. 3 First five dimensionless natural frequencies of the triple-layered microplate system under different meshes

出于比较的原因,本文模型同步振动的情况下,尺度效应取 $l/H=0, L_y=L_x, L_x/H=100$. 由表 1 可知微分求积有限元所预测的结果略小于 Rayleigh-Ritz 法计算的结果,但最大误差均在 1.221% 以内;对于 SSSS 板,微分求积有限元与 Navier 法预测结果十分接近;边界条件约束越强,板的振动频率越大,原因在于增加边界约束会使结构刚性增强.

表 1 不同边界条件下宏观单层方形板的前 4 阶无量纲基频
Table 1 First four dimensionless fundamental frequencies of a macroscopic single-layer square plate under different boundary conditions

Boundary conditions	Method	Dimensionless frequency			
		$\tilde{\omega}_1$	$\tilde{\omega}_2$	$\tilde{\omega}_3$	$\tilde{\omega}_4$
SSSS	Present ^①	19.739	49.348	78.957	98.696
	Present ^②	19.739	49.348	78.957	98.696
	Ref. [22]	19.739	49.348	78.957	98.696
SSSF	Present ^②	11.684	27.756	41.197	59.066
	Ref. [22]	11.684	27.757	41.220	59.360
SFSF	Present ^②	9.631	16.135	36.726	38.945
	Ref. [22]	9.631	16.135	37.180	39.134
CCCF	Present ^②	23.933	40.021	63.255	76.748
	Ref. [22]	23.960	40.021	63.291	78.139
CFCF	Present ^②	22.185	26.556	43.583	61.215
	Ref. [22]	22.223	26.556	44.072	61.265

① Navier method; ② Differential quadrature finite element method

3.2 参数研究

表 2 给出了微板系统在半波数相同时会出现同步振动、部分异步振动和完全异步振动的三种情形. 以微板系统边界条件为 SSSS-SSSS-SSSS 的振动模态,其中 $l/H=0, L_y/L_x=2, L_x/H=100, \bar{k}_w=50, \bar{k}_p=5$. 各层微板的最大振幅比为 $\xi = |\omega^{(1)}|_{\max} : |\omega^{(2)}|_{\max} : |\omega^{(3)}|_{\max}$. 部分异步振动情形中层板相对上层和下层静止,上下两层板振动方向相反,完全异步振动情形中层板与上下两层板振动方向相反并且中层板的振幅是上下两层板的 2 倍. 原因在于,同步振动情形下,弹性夹层不起作用,部分异步振动情形下,中层板受到上下两层板通过弹性夹层传递的力刚好抵消使得其静止,完全异步振动时弹性夹层的变形最大.

完全异步振动受到弹性夹层的影响最显著,因此选取第 3 阶振动频率分析弹性夹层刚度对系统频率的影响时. 图 4 呈现了不同弹性夹层刚度下微板系统第 3 阶无量纲频率随应变梯度参数的变化规律. 此处 $L_x/L_y=1, L_x/H=100$, 系统边界条件

表 2 SSSS-SSSS-SSSS 三层微板系统半波数为 1 时的振动模式

Table 2 Vibration modes of the SSSS-SSSS-SSSS triple-layered microplate system with half-wave number 1

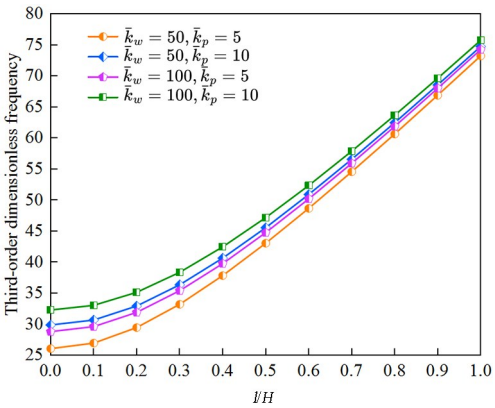
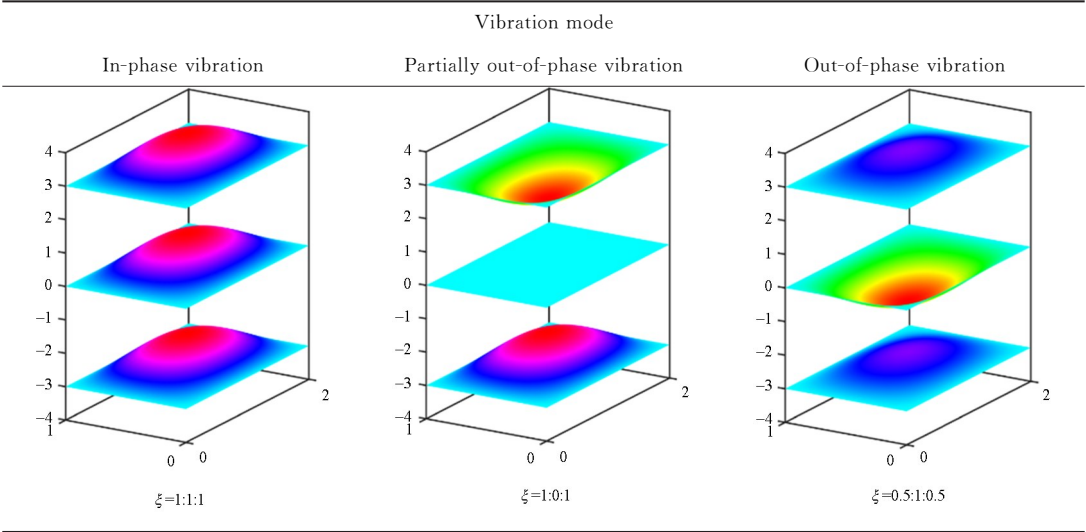


图 4 不同弹性夹层刚度下微板系统的第 3 阶无量纲频率
Fig. 4 The third order dimensionless frequencies of the microplate system under different elastic interlayer stiffnesses

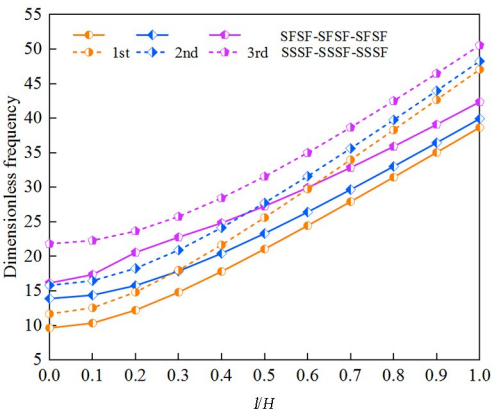


图 5 不同边界条件下微板系统的前 3 阶无量纲频率
Fig. 5 First three dimensionless frequencies of the microplate system under different boundary conditions

设为 SFSF-SFSF-SFSF。可以看出，完全异步振动情形下，弹性夹层刚度越大，系统频率越大，并且对比弹性夹层刚度变化前后系统频率的变化可以看出 Pasternak 夹层刚度与 Winkler 夹层刚度相比对系统频率影响更大。

图 5 呈现了两种边界条件下微板系统的前 3 阶无量纲频率随应变梯度参数的变化，此处 $\bar{k}_w = 100, \bar{k}_p = 10, L_x = L_y = 1, L_x/H = 100$ 。结果表明，无量纲频率随应变梯度参数的增大而增大，并且边界约束越强，微板系统的频率受尺度效应的影响越显著。由于前 3 阶频率分别对应于系统的同步振动，部分异步振动和完全异步振动三种情形，图 5 可以看出完全异步振动频率大于部分异步振动频率，后者又大于同步振动频率，而随着 l/H 的变大，前 3 阶频率的差异会逐渐减小，这是由于尺度

效应参数对系统刚度的增强使得弹性夹层刚度在系统刚度中所占比重减小。

为定量研究弹性夹层参数对微板各阶振动模式的影响程度，对 $\bar{k}_w = 50, \bar{k}_p = 5$ 和 $\bar{k}_w = 1000, \bar{k}_p = 40$ 两种情形下对应模态向量进行相关性分析。第 i 阶模态向量的相关系数 R_i 定义如下^[23]：

$$R_i = \left| \frac{N(\mathbf{X}_i)^T \mathbf{Y}_i - N^2 \bar{X}_i \bar{Y}_i}{\sqrt{(\mathbf{X}_i)^T \mathbf{X}_i - N^2 \bar{X}_i^2} \cdot \sqrt{(\mathbf{Y}_i)^T \mathbf{Y}_i - N^2 \bar{Y}_i^2}} \right| \quad (26)$$

式中， $\mathbf{X}_i$ 和 $\mathbf{Y}_i$ 分别是 $\bar{k}_w = 50, \bar{k}_p = 5$ 和 $\bar{k}_w = 1000, \bar{k}_p = 40$ 情形下系统对应的第 i 阶模态向量， $\bar{X}_i$ 和 $\bar{Y}_i$ 是对应均值。

表 3 显示了弹性夹层刚度对 CCSF-CCSF-CCSF 微板系统前 4 阶振动模式的影响，此处 l/H

表 3 弹性夹层刚度对 CCSF-CCSF-CCSF 三层微板系统振动模态的影响

Table 3 Effect of the elastic interlayer stiffnesses on the vibration modes of the CCSF-CCSF-CCSF triple-layered microplate system

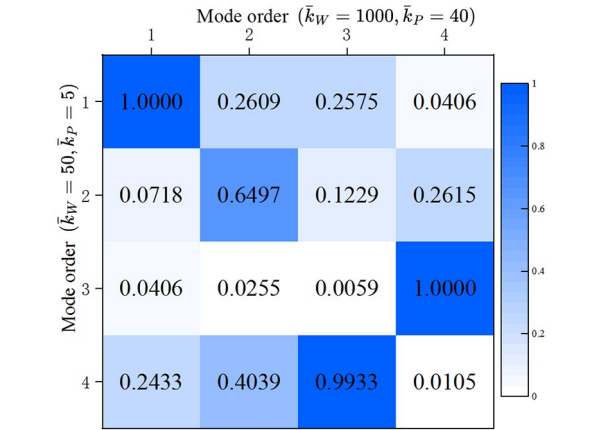
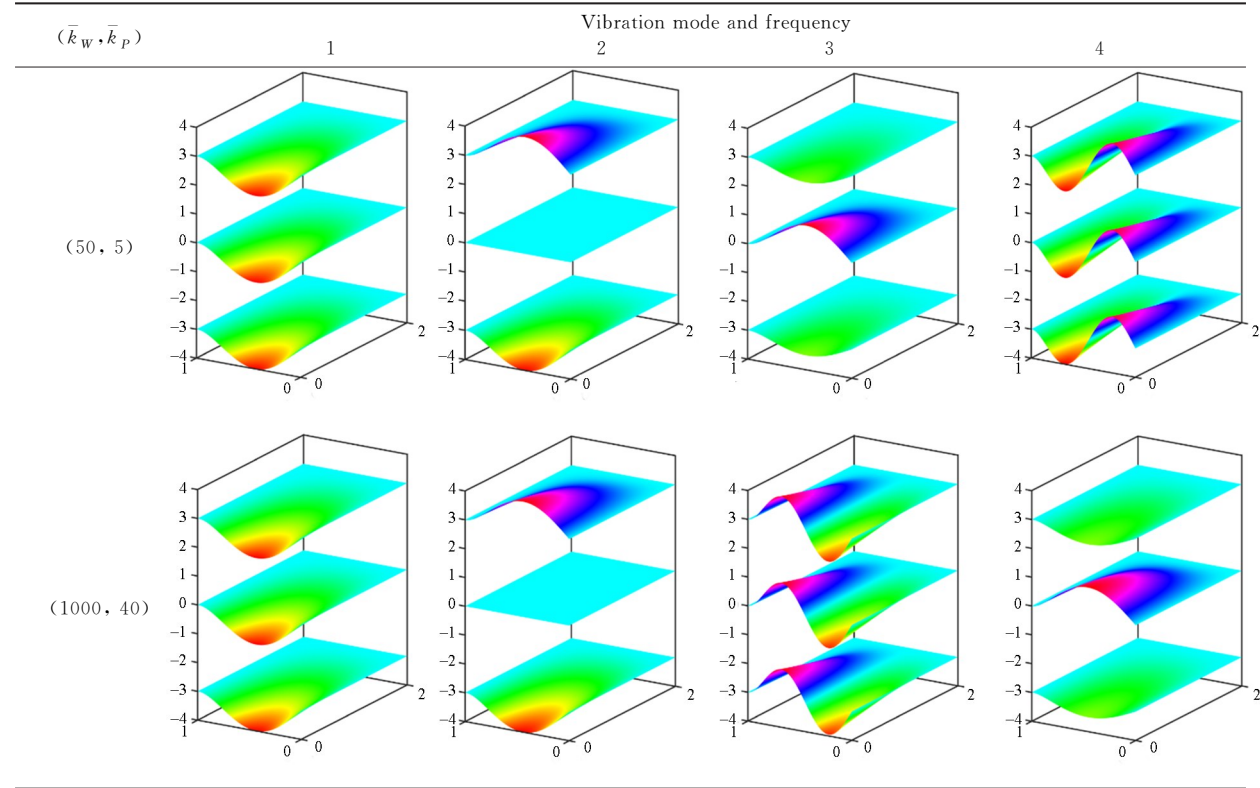


图 6 不同弹性夹层刚度下三层微板系统模态相关系数热力图
Fig. 6 Heatmap of the modal correlation coefficients of the three-layer microplate system under different elastic interlayer stiffnesses

$=0, L_y/L_x=2, L_x/H=100$. 可以看出随着弹性夹层刚度增大,第 1 阶和第 2 阶模态受影响较小,第 3 阶和第 4 阶模态发生交换即模态跃迁现象. 图 6 是基于表 3 的模态跃迁现象的定量表示,图中元素的值越接近于 1 模态之间的相关性就越高. 对图 6 分析发现系统的第 3 阶和第 4 阶模态在弹性夹层刚度变化前后彼此之间的相关系数分别为 0.9933 和 1,这说明较小弹性夹层模量的第 3 阶模态与较大弹性夹层模量的第 4 阶模态具有强相似性,较小弹

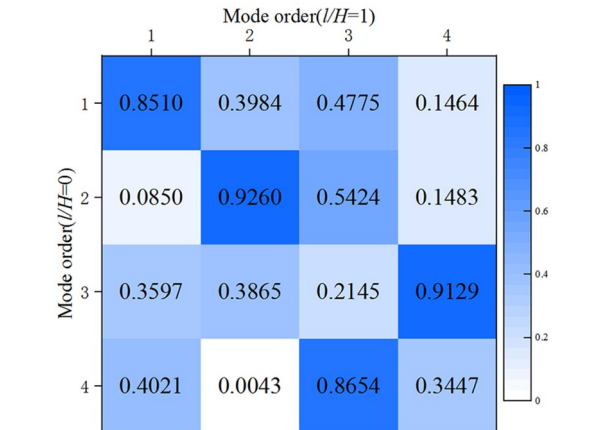
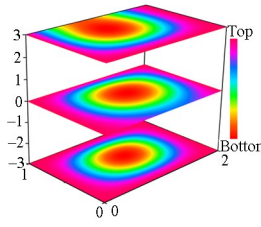
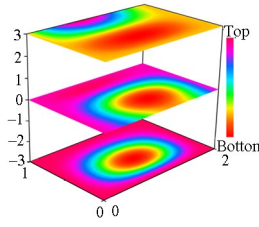
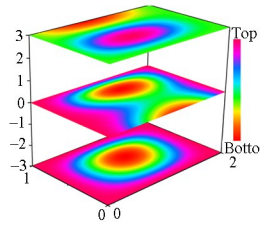
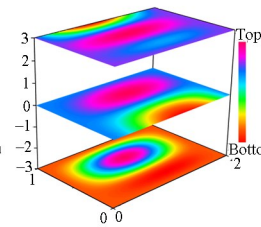
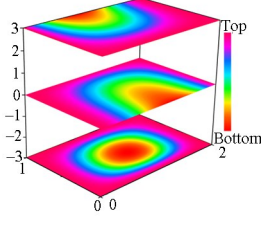
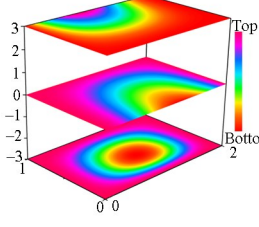
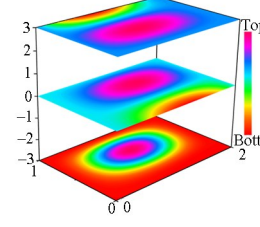
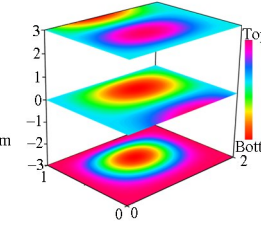


图 7 不同应变梯度参数下三层微板系统模态相关系数热力图
Fig. 7 Heatmap of the modal correlation coefficients of the triple-layered microplate system under different strain gradient parameters

性夹层模量的第 4 阶模态与较大弹性夹层模量的第 3 阶模态也具有强相似性,说明了表 3 中系统在第 3 阶和第 4 阶模态处发生的模态跃迁现象是合理的.

表 4 呈现了尺度效应对 CCCC-CFSS-SCCF 三层微板系统振动模态的影响,此处 $\bar{k}_w=1000, \bar{k}_p=40, L_y/L_x=2$. 结果显示,随着 l/H 增大,各层微板的振幅峰值比随着应变梯度参数增加剧烈变化,说明应变梯度参数对不同边界条件下的微板振幅

表 4 尺度效应对 CCCC-CFSS-SCCF 三层微板系统振动模式的影响
Table 4 Size effects on the vibration modes of a CCCC-CFSS-SCCF triple-layered microplate system

$(\bar{k}_w, \bar{k}_p)$		Vibration mode and frequency			
		1	2	3	4
0					
ξ		0.3080:0.6401:1	0.2939:0.5281:1	0.6048:0.4545:1	0.4366:1:0.6725
1					
ξ		0.0091:0.3405:1	0.0221:1:0.4532	0.0401:1:0.2467	0.0086:0.1569:1

的影响不一致;表 4 中系统在应变梯度参数改变前后发生了模态跃迁现象,跃迁后第 3 阶和第 4 阶模态前后顺序发生了交换,分析图 7 中的相关系数也可以得到相同的结论,即应变梯度参数变化使微板系统发生了模态跃迁现象,这种现象可以通过模态相关系数热力图准确识别。

4 结论

本文采用修正的应变梯度理论和 Kirchhoff 假设建立了由弹性夹层连接的三层微板系统的自由振动模型,构造了 C^2 型微分求积有限元。通过数值算例验证了本文模型的准确性和有效性,探究了各参数对三层微板系统振动特性的影响。主要结论如下:

- (1)当三层板完全相同时,系统会出现同步振动,部分异步振动和完全异步振动三种情形,并且弹性夹层对三者的影响逐渐增加;尺度效应对系统频率的影响程度与边界条件、弹性夹层刚度有关;
- (2)弹性夹层刚度和应变梯度参数变化会使系统产生模态跃迁现象,模态相关系数定量地说明了弹性夹层刚度和应变梯度参数对模态的影响。

参考文献

[1] LEI J, HE Y M, GUO S, et al. Size-dependent vibration of nickel cantilever microbeams: experiment and gradient elasticity [J]. AIP Advances, 2016, 6

(10): 105202.

[2] LI Z K, HE Y M, ZHANG B, et al. Experimental investigation and theoretical modelling on nonlinear dynamics of cantilevered microbeams [J]. European Journal of Mechanics-A, 2019, 78(6): 103834.

[3] LIM C W, ZHANG G, REDDY J N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation [J]. Journal of Mechanics Physics of Solids, 2015, 78: 298—313.

[4] ERINGEN A C, EDELEN D G B. On nonlocal elasticity [J]. International Journal of Engineering Science, 1972, 10(3): 233—248.

[5] LAM D C C, YANG F, CHONG A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity [J]. Journal of Mechanics Physics of Solids, 2003, 51(8): 1477—1508.

[6] FU G Y, ZHOU S J, QI L. On the strain gradient elasticity theory for isotropic materials [J]. International Journal of Engineering Science, 2020, 154 (10): 103348.

[7] MINDLIN R D, ESHEL N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1968, 4(1): 109—124.

[8] CORDERO N M, FOREST S, BUSSO E P. Second strain gradient elasticity of nano-objects [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2016, 97: 92—124.

- [9] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity [J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, 11(1): 415—448.
- [10] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(10): 2731—2743.
- [11] ROODBARI M A, JORSHARI T D, LV C F, et al. A review of size-dependent continuum mechanics models for micro-and nano-structures [J]. *Thin-Walled Structures*, 2022, 170: 108562.
- [12] WU C P, HU H X. A review of dynamic analyses of single-and multi-layered graphene sheets/nanoplates using various nonlocal continuum mechanics-based plate theories [J]. *Acta Mechanica*, 2021, 232(11): 4497—4531.
- [13] RAJASEKARAN S. Numerical investigation of non-local elasticity theory for free vibration of polymer embedded multi-layer graphene sheets [J]. *Materials Today Communications*, 2024, 39: 108669.
- [14] 张立民, 张波, 张旭, 等. 面内压缩荷载作用下双层微板系统的同步/异步屈曲 [J]. *应用数学和力学*, 2023, 44(2): 160—167.
ZHANG L M, ZHANG B, ZHANG X, et al. Synchronous/asynchronous buckling of double-layered microplate systems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, 44(2): 160—167. (in Chinese)
- [15] 张立民, 张波, 张旭, 等. 基于微分求积有限元法的双层微板系统振动特性研究 [J]. *计算力学学报*, 2023, 40(6): 893—091.
Zhang L M, Zhang B, Zhang X, et al. Application of differential quadrature finite element method to the free vibration analysis of double-layered microplate system [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2023, 40(06): 893—091. (in Chinese)
- [16] MAZUR O, AWREJCWICZ J. The nonlocal elasticity theory for geometrically nonlinear vibrations of double-layer nanoplate systems in magnetic field [J]. *Meccanica*, 2022, 57(11): 2835—2847.
- [17] LIU S, WANG K F, WANG B L, et al. Isogeometric analysis of bending, vibration, and buckling behaviors of multilayered microplates based on the non-classical refined shear deformation theory [J]. *Acta Mechanica*, 2021, 232(8): 2991—3010.
- [18] SHAFIEI Z, SARRAMI-FOROUSANI S, AZHARI F, et al. Application of modified couple-stress theory to stability and free vibration analysis of single and multi-layered graphene sheets [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2020, 98: 105652.
- [19] ABBASPOUR F, ARVIN H. Vibration and thermal buckling analyses of three-layered centrosymmetric piezoelectric microplates based on the modified consistent couple stress theory [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2020, 26 (15/16): 1253—1265.
- [20] ZHANG B, LI H, KONG L L, et al. Variational formulation and differential quadrature finite element for freely vibrating strain gradient Kirchhoff plates [J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 101(6): e202000046.
- [21] ZHANG B, LI H, KONG L L, et al. Strain gradient differential quadrature finite element for moderately thick micro-plates [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, 121 (24): 5600—5646.
- [22] CHAKRAVERTY S. *Vibration of plates* [M]. Boca Raton, Florida: CRC Press, 2008.
- [23] DENG T, ZHANG B, LIU J, et al. Vibration frequency and mode localization characteristics of strain gradient variable-thickness microplates [J]. *Thin-Walled Structures*, 2024, 199: 111779.