

温度场下波纹型薄膜基底结构的动态屈曲分析^{*}

李文杰¹ 毕皓皓¹ 张欣刚¹ 姚文莉¹ 王博^{2†}

(1. 青岛理工大学 理学院, 青岛 266520)

(2. 西北工业大学 工程力学系, 西安 710072)

摘要 基于薄膜/基底结构的柔性电子器件具有良好的可拉伸性和灵敏度,然而此类结构电子器件的动力学行为极易受到温度变化等激励的影响.因此,本文研究了温度场作用下薄膜/基底结构的动态屈曲问题.首先,基于 Euler-Bernoulli 梁理论,建立温度场作用下,薄膜/基底结构非线性振动的控制方程;其次,利用 Galerkin 截断方法和两类变量,将薄膜/基底结构非线性振动的控制方程导入 Hamilton 体系;最后,通过高精度、高数值稳定性的辛 Runge-Kutta 方法求解薄膜/基底结构的 Hamilton 方程,进而讨论温度变化量、阻尼系数等对薄膜/基底结构非线性动力学响应的影响.研究发现薄膜的温度变化量和预应变会影响薄膜的动力学行为.随着温度变化量的增加,薄膜/基底结构的振动频率增加,振幅减小.随着预应变的增加,结构的频率减小,振幅增加.

关键词 薄膜/基底结构, Euler-Bernoulli 梁, 辛 Runge-Kutta 方法, 温度影响

中图分类号:O322;O175

文献标志码:A

Dynamic Buckling Analysis of Wrinkled Film Substrate Structure under the Thermal Effect^{*}

Li Wenjie¹ Bi Haohao¹ Zhang Xingang¹ Yao Wenli¹ Wang Bo^{2†}

(1. School of Science, Qingdao University of Technology, Qingdao 266520, China)

(2. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Flexible electronic devices, which are based on thin film/substrate structure, have excellent stretchability and sensitivity, but the dynamic behaviour of this film/substrate structure is very susceptible to the complex excitation such as temperature change. Therefore, the dynamic buckling behaviour of thin film/substrate structure under the thermal effect is studied in this paper. Firstly, based on Euler-Bernoulli beam theory, the governing equations of nonlinear vibration of thin film/substrate structure under the thermal effect are established. Secondly, the governing equations of nonlinear vibration of thin film/substrate structures are introduced into Hamilton system by the Galerkin method. Finally, the Hamilton equation of the thin film/substrate structure is solved by the Symplectic Runge-Kutta method, and the influence of temperature variation and damping coefficient on the nonlinear dynamic response of the thin film/substrate structure is discussed. It is found that the temperature variation and the pre-strain could change the dynamic behaviour of the thin film/substrate structure. With the increase of temperature variation, the vibration frequency of the film/substrate structure increases and the amplitude

2024-08-02 收到第 1 稿,2024-09-19 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12172282,12272197,12402002),广东省自然科学基金(2024A1515010767),山东省自然科学基金(ZR2022MA066),Natural Science Foundation of China(12172282,12272197,12402002),Natural Science Foundation of Guangdong Province(2024A1515010767),Natural Science Foundation of Shandong Province(ZR2022MA066).

[†] 通信作者 E-mail:bowang@nwpu.edu.cn

decreases. With the increase of pre-strain, the frequency of the system decreases and the amplitude increases.

Key words film/substrate structure, Euler-Bernoulli beam, symplectic Runge-Kutta method, temperature effects

引言

基于力学屈曲原理形成的薄膜/基底结构具有良好的可拉伸性和优异的力学性能^[1,2],已被广泛应用于微纳电子器件^[3]、能量采集器^[4,5]和生物医学设备^[6]等领域.然而,在实际应用中,薄膜/基底结构面临的复杂载荷工况将引起结构的振动,并且基于薄膜/基底结构的能量采集器等可拉伸电子器件也要求结构振动.因此,为了提高基于薄膜/基底结构的电子器件的动态可靠性^[7],其动态屈曲问题已引起广泛关注.

基于薄膜/基底结构的静态屈曲问题,国内外学者进行了众多的研究.基于能量法,Suo和Huang等^[8,9]建立了小变形情况下波纹型薄膜/基底结构的力学模型,解析地推导了薄膜/基底结构的波长、振幅和静态屈曲的临界应力.Huang等^[10,11]分析了大变形下波纹状薄膜基底结构的屈曲行为,并研究了多条薄膜有限宽度对屈曲行为的影响^[12],并提出了区别于全黏附的屈曲模式的可控部分屈曲波纹模式^[13].由于单波结构(欧拉屈曲)和多波结构(波纹结构)都可能发生,Wang和Li等^[14,15]等通过区分了薄膜基底结构的波纹状屈曲与传统欧拉屈曲.之后,Cheng和Wang等^[16,17]研究了三层波纹薄膜基底结构的屈曲行为^[18].作为实现可控部分屈曲模式的替代方法,Yu等^[19]研究了具有表面浮雕结构的软基底,这种结构具有易于封装的优点.

当基于薄膜/基底结构的电子器件在复杂的环境中工作时,了解其非线性动力学行为非常重要.通过Jacobi椭圆函数,Ou等^[20]研究了受阶跃载荷

作用下波纹型薄膜/基底结构的自由振动行为.基于辛方法,Wang和Bi等^[21,22]分析了压电薄膜/软基底结构的非线性振动行为,以及白噪声激励下薄膜/软基底结构的随机振动行为.由于基底的阻尼效应对薄膜/基底结构产生影响,Zhou等^[23]分析时变激励下薄膜/粘弹性基底结构的非线性动态屈曲行为.考虑到亚纳米级范德华相互作用的动态边界效应,Dong等^[24]建立了分层纳米薄膜在基底上的动态行为,有助于指导纳米薄膜/基底型谐振2D纳米机电系统器件的动态设计.

在可拉伸电子器件的应用过程中,薄膜/基底结构不可避免地承受热载荷激励^[25],因此,本文针对温度场影响下的薄膜/基底结构,采用Euler-Bernoulli梁理论建立其非线性振动方程.并结合Galerkin截断方法和辛Runge-Kutta方法求解相应的动力学方程,进而分析温度变化和预应变对薄膜/基底结构动力学行为的影响.

1 薄膜/基底结构动力学模型

本文考虑预应变策略下的温度场作用下的薄膜/基底结构的动力学行为,该结构由实现电子器件功能的刚性薄膜和柔性基底组成.如图1所示, h 为薄膜厚度, λ 为屈曲后波纹长度.

根据文献[8]和文献[9],薄膜位于软基底上,承受横向压缩,基底可假设为无限厚度的弹性体,薄膜可假设为带有 von Kármán 非线性的 Euler-Bernoulli 梁结构,其受温度影响下薄膜的动力学控制方程为

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\bar{E}_I h^3}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -T_z \quad (1)$$

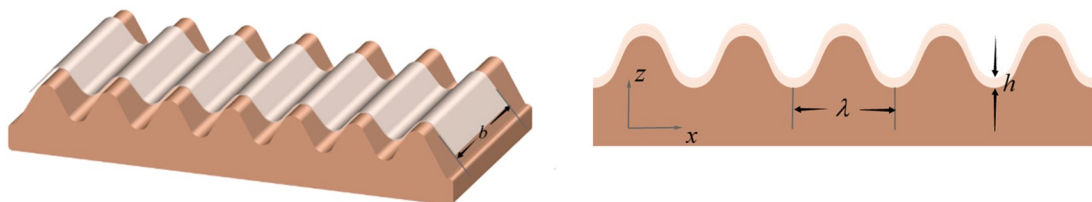


图1 薄膜/基底结构:(a) 薄膜/基底结构示意图;(b) 薄膜/基底结构正视图

Fig. 1 Thin film/substrate structure: (a) Diagram of film/substrate structure; (b) Front view of film/substrate structure

其中, m 为薄膜质量, w 为薄膜横向位移, $\bar{E}_f = E_f / (1 - \nu_f^2)$ 为薄膜的等效杨氏模量, E_f 为薄膜的杨氏模量, ν_f 为薄膜的泊松比, T_z 为薄膜/基底之间界面处的法向力, N_x 为薄膜轴向应力, 其表达式为

$$N_x = \bar{E}_f h \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - N \quad (2)$$

其中, u 为轴向位移, $N = \bar{E}_f h \alpha_x \Delta T$, α_x 为线热膨胀系数, ΔT 为温度变化量. 根据对薄膜的静态屈曲分析^[8], 薄膜横向位移 w , 轴向位移 u 的表达式为:

$$\begin{cases} w = A \cos(kx) \\ u = \frac{1}{8} k A^2 \sin(2kx) - \epsilon_{\text{pre}} x \end{cases} \quad (3)$$

其中, A 为薄膜振动位移, $k = 2\pi/\lambda$ 为波数, ϵ_{pre} 为预应变.

由于薄膜与软基底良好黏结, 当薄膜发生屈曲时, 薄膜受到薄膜/基底之间界面处的法向力 T_z . 基于平面应变假设, 并求解基底的边值问题, 可以得到法向力 T_z 的表达式为

$$\begin{aligned} T_z &= g \bar{E}_s k w, \\ g &= \frac{(3 - 4\nu_s) \cosh(2kH) + 5 - 12\nu_s + 8\nu_s^2 + 2(kH)^2}{(6 - 8\nu_s) \sinh(2kH) - 4kH} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\bar{E}_s = E_s / (1 - \nu_s^2)$, E_s 为基底的杨氏模量, ν_s 为基底泊松比, H 为基底的厚度. 根据文献^[8], 当基底被假设为半无限大弹性体时, $g = 1/2$, 波数 $k = 1/h (3\bar{E}_s / \bar{E}_f)^{1/3}$.

对于控制方程(1), 本文采用 Galerkin 截断方法, 将偏微分方程离散为常微分方程, 然后通过高精度、高数值稳定性的辛 Runge-Kutta 方法求解.

将公式(2)~(4)代入公式(1)中, 可以得到受温度影响下薄膜非线性振动的控制方程为

$$\begin{aligned} m \cos(kx) \ddot{A} + \frac{\bar{E}_f h k^3 \cos(kx) \cos(2kx)}{4} A^3 + \\ [-\bar{E}_f h \epsilon_{\text{pre}} k^2 \cos(kx) - N k^2 \cos(kx) + \\ g \bar{E}_s k \cos(kx) + \frac{h^3 \bar{E}_f k^4}{12} \cos(kx)] A = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

对方程(5)两边同乘 $\cos(kx)$, 在 $(0, 2\pi/k)$ 区间进行积分, 得到

$$m \ddot{A} + \left(k g \bar{E}_s + \frac{\bar{E}_f k^4 h^3}{12} - \bar{E}_f k^2 h \epsilon_{\text{pre}} - k^2 N \right) A +$$

$$\frac{\bar{E}_f h k^4}{8} A^3 = 0 \quad (6)$$

即

$$a_1 \ddot{A} + a_2 A + a_3 A^3 - k^2 N A = 0 \quad (7)$$

其中, $a_1 = m$, $a_2 = k g \bar{E}_s + \bar{E}_f k^4 h^3 / 12 - \bar{E}_f k^2 h \epsilon_{\text{pre}}$,

$$a_3 = \bar{E}_f h k^4 / 8.$$

为方便起见, 引入无量纲参数

$$W = \frac{A}{h}, \tau = t \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} \quad (8)$$

可以得到无量纲化的振动控制方程

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + \frac{a_3 h^2}{a_2} W^3 + \left(1 - \frac{k^2 N}{h a_2} \right) W = 0 \quad (9)$$

2 辛 Runge-Kutta 方法

由于难以求得非线性微分方程(9)的解析解, 本文将采用辛 Runge-Kutta 方法对其进行求解. 非线性系统(9)的动能为

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{W}^2 \quad (10)$$

势能为

$$U = \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 N}{2 a_2 h} \right) W^2 + \frac{a_3 h^2}{4 a_2} W^4 \quad (11)$$

Hamilton 函数 $H = E_k + U$ 为

$$\begin{aligned} H(W, \dot{W}) &= \frac{1}{2} \dot{W}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 N}{2 a_2 h} \right) W^2 + \\ &\frac{a_3 h^2}{4 a_2} W^4 \end{aligned} \quad (12)$$

引入 $\dot{W} = P$, 此时, Hamilton 系统为

$$\begin{aligned} H(W, P) &= \frac{1}{2} P^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 N}{2 a_2 h} \right) W^2 + \\ &\frac{a_3 h^2}{4 a_2} W^4 \end{aligned} \quad (13)$$

根据方程(13)得到系统的动力学方程组

$$\begin{cases} \dot{W} = \frac{\partial H}{\partial P} = P \\ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial W} = -\frac{a_3 h^2}{a_2} W^3 + \left(\frac{k^2 N}{a_2 h} - 1 \right) W \end{cases} \quad (14)$$

方程组(14)为 Hamilton 正则方程, 且

$$\frac{dH(W, P)}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial P} \frac{dP}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial W} \frac{dW}{d\tau} = 0$$

即方程组(14)满足能量守恒定律.

对于方程(9), 引入状态向量

$$\boldsymbol{\eta} = (\mathbf{W} \quad \mathbf{P})^T, \quad (15)$$

方程组(14)写为一阶微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}(\tau) = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (16)$$

$$\text{其中, } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{W}} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \right)^T, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

基于 Hamilton 力学基本原理提出的辛算法在保持系统(16)的辛结构方面具有独特优势,可以高精度、高数值稳定性对系统进行数值求解,因此,本文运用辛 Runge-Kutta 算法对系统(16)进行数值计算。

二级辛 Runge-Kutta 方法的常见形式为

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^2 b_j f(t_n + c_j \Delta t, k_j) \\ k_i = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^2 a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t, k_j) \end{cases} \quad (17)$$

隐式二级辛 Runge-Kutta 方法系数可以设为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad [b_1 \quad b_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

3 数值算例

对于薄膜/基底结构,本文将分别采用二级辛 Runge-Kutta 方法和经典的四阶 Runge-Kutta 方法模拟计算薄膜/基底结构的动力学行为. 薄膜/基底结构的材料参数和几何参数为 $E_f = 200 \text{ GPa}$, $E_s = 2.5 \text{ MPa}$, $v_f = 0.27$, $v_s = 0.48$, $h = 10^{-6} \text{ m}$, $\Delta T = 100^\circ \text{C}$, $\epsilon_{\text{pre}} = 0.01$, $\alpha_x = 1.89 \times 10^{-5} \text{ }^\circ \text{C}^{-1}$.

图 2 分别采用二级辛 Runge-Kutta 方法和四阶 Runge-Kutta 方法计算了薄膜/基底结构的动能和势能随时间的变化图,其初始条件为 $W_0 = 0.2$, $P_0 = 0.3$ 步长取 0.2,时间跨度为 20 000.

薄膜/基底结构的 Hamilton 函数

$$\begin{aligned} H(\tau) &= E_k + U \\ &= \frac{1}{2} \dot{W}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{k^2 N}{2a_2 h} \right) W^2 + \frac{a_3 h^2}{4a_2} W^4 \end{aligned} \quad (19)$$

Hamilton 函数的相对误差

$$\Delta H(\tau) = \frac{|H(\tau) - H(0)|}{H(0)} \quad (20)$$

其中, $H(0)$ 为初始能量。

从图 2 可以发现:利用四阶 Runge-Kutta 方法求解得到的 Hamilton 能量会因为时间的增加逐渐变小,Hamilton 能量的相对误差随着时间的增加而急剧增长,说明经典的四阶 Runge-Kutta 方法随时间演化会产生能量散耗. 然而,利用辛 Runge-Kutta 方法求解的 Hamilton 能量和其相对误差都能保持得很好,说明二级辛 Runge-Kutta 方法具有很好的保能量性,间接反映了薄膜/基底结构的机械能守恒。

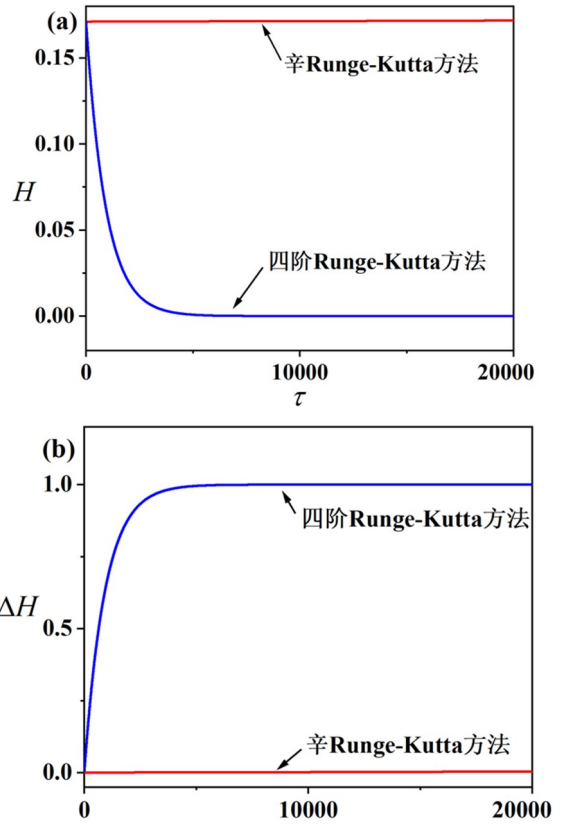


图 2 薄膜/基底结构的能量:(a) Hamilton 能量;

(b) Hamilton 能量的相对误差

Fig. 2 Energy of thin film/substrate structure;

(a) Hamilton energy; (b) The relative error of Hamilton energy

图 3 分别采用二级辛 Runge-Kutta 方法和四阶 Runge-Kutta 方法计算了薄膜/基底结构的振动位移—时间历程图,速度—时间历程图,以及相位图;其初始条件为 $W_0 = 0.2$, $P_0 = 0.3$,步长取 0.2,时间跨度为 20 000.

由图 3 结果发现:采用二级辛 Runge-Kutta 方法得到的位移—时间图相对保持稳定;而利用四阶 Runge-Kutta 方法得到位移—时间历程图随着时间的增加而逐渐趋于零;速度—时间历程图呈现相同的行为. 进一步说明四阶 Runge-Kutta 方法本身存在算法阻尼。

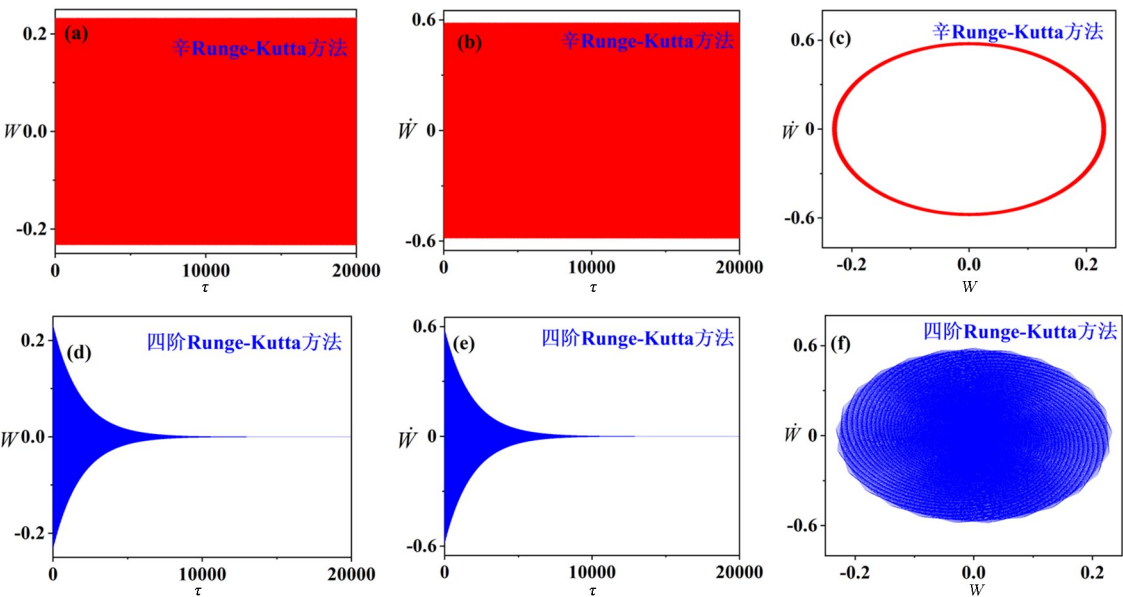


图 3 薄膜/基底结构的仿真结果: (a)、(d) 时间—位移图; (b)、(e) 时间—速度图; (c)、(f) 相位图
Fig. 3 Simulation results of thin film/substrate structure: (a)、(d) Time-displacement diagrams; (b)、(e) Time-velocity diagrams; (c)、(f) Displacement-velocity diagrams

观察图 3 中的相位图,可以发现:在相同步长下,利用二级辛 Runge-Kutta 方法求解的相空间随着时间的增加,面积保持不变,而利用四阶 Runge-Kutta 方法求解的相空间会因为时间的增加,导致相空间面积急剧增加,说明辛 Runge-Kutta 方法具有很好的保结构性。

采用二级辛 Runge-Kutta 方法,研究温度变化量以及预应变对薄膜/基底结构的动力学行为的影响,其中,薄膜/基底结构的材料参数和几何参数为 $E_f=200\text{GPa}$, $E_s=2.5\text{MPa}$, $\epsilon_{\text{pre}}=0.03$, $v_f=0.27$, $v_s=0.48$, $\alpha_x=1.89\times10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $h=10^{-6}\text{m}$. 初值条件 $W_0=0.2$, $P_0=0.3$, 步长取 0.01, 分别取 $\Delta T=0^{\circ}\text{C}$, $\Delta T=300^{\circ}\text{C}$, $\Delta T=600^{\circ}\text{C}$, 得到薄膜的位移响应时间历程图,如图 4 所示。可以发现:当取定预

应变 $\epsilon_{\text{pre}}=0.03$ 时,随着温度变化量 ΔT 的增加,薄膜/基底结构振动的频率增加,振幅减小。

图 5 讨论了预应变对薄膜/基底结构动力学行为的影响,其中,薄膜/基底结构的材料参数和几何参数为 $E_f=200\text{GPa}$, $E_s=2.5\text{MPa}$, $v_f=0.27$, $v_s=0.48$, $\alpha_x=1.89\times10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, $\Delta T=100^{\circ}\text{C}$, $h=10^{-6}\text{m}$. 初值条件为 $W_0=0.2$, $P_0=0.3$, 步长取 0.01. 分别取 $\epsilon_{\text{pre}}=0.01$, $\epsilon_{\text{pre}}=0.05$, $\epsilon_{\text{pre}}=0.1$ 得到薄膜的位移响应时间历程图,如图 5 所示。由图 5 的数值结果可以发现:随着预应变的增加,系统的频率减小,振幅增加。因此,在采用线热膨胀系数为正数的材料时,减小预应变,可以减弱薄膜的振动幅度,降低温度变化量,可以减弱薄膜的振动频率,有助于柔性电子器件的正常工作。

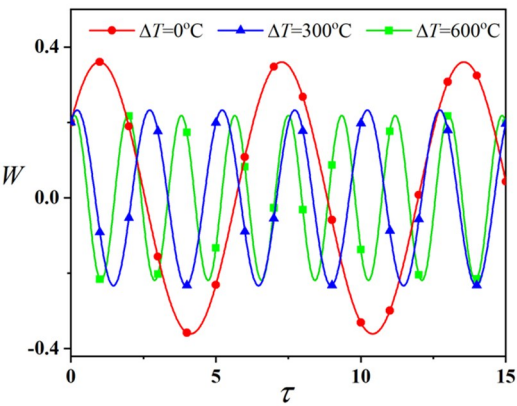


图 4 温度对时间历程图的影响
Fig. 4 Effect of temperature on time-displacement diagram

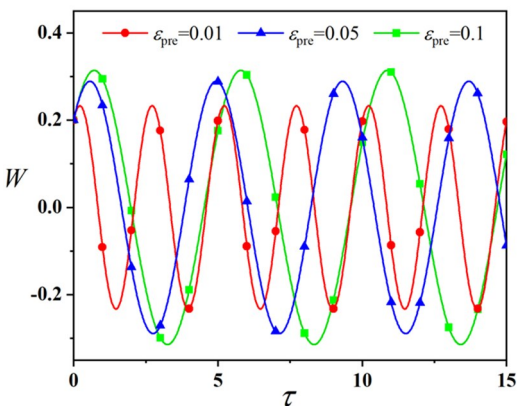


图 5 预应变对时间历程图的影响
Fig. 5 Effect of pre-strain on time-displacement diagram

4 结论

本文建立了温度场影响下的薄膜/基底结构非线性振动的控制方程,并采用 Galerkin 截断方法,将偏微分方程离散为常微分方程,其次,通过引入状态向量,将振动控制方程导入 Hamilton 体系,并运用辛 Runge-Kutta 方法进行求解.将辛 Runge-Kutta 方法和四阶 Runge-Kutta 方法的结果对比,可以得出结论:对于 Hamilton 系统,经典的 Runge-Kutta 方法随着时间演化会产生能量散耗;而辛 Runge-Kutta 方法具有良好的保结构,保能量特性,验证了辛 Runge-Kutta 方法的优势.

本文采用辛 Runge-Kutta 方法讨论了温度变化量以及预应变对薄膜/基底结构动力学行为的影响.通过数值模拟,发现薄膜的温度变化量,预应变可改变薄膜的动力学行为,改变薄膜的振动频率和振幅.本文的研究可为柔性电子器件领域中屈曲薄膜的动力学行为提供一定的理论依据.

参考文献

- [1] 余森江,郭永杰,赵晓宇,等.粘性基底上溅射薄膜褶皱的边界效应研究[J].固体力学学报,2022,43(1):60–70.
YU S J, GUO Y J, ZHAO X Y, et al. Research on boundary effects of film wrinkles sputtered on viscous substrates [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2022, 43(1): 60–70. (in Chinese)
- [2] 常若菲,冯雪,陈伟球,等.可延展柔性无机电子器件的结构设计力学[J].科学通报,2015,60(22):2079–2090.
CHANG R F, FENG X, CHEN W Q, et al. Mechanics designs for stretchable inorganic electronics [J]. Chinese Science Bulletin, 2015, 60(22): 2079–2090. (in Chinese)
- [3] LIU J X, SHI F, SONG W Q, et al. Modeling of self-oscillating flexible circuits based on liquid crystal elastomers [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2024, 270: 109099.
- [4] HAJI HOSSEINLOO A, TURITSYN K. Energy harvesting via wrinkling instabilities [J]. Applied Physics Letters, 2017, 110(1): 013901.
- [5] BAE Y J, WEI Y W, BHUYAN P, et al. Soft and stretchable electromagnetic energy-harvesting devices with topographically wrinkled liquid-metal electrodes [J]. ACS Applied Polymer Materials, 2024, 6(3): 1992–2000.
- [6] KIM T H, LEE C S, KIM S, et al. Fully stretchable optoelectronic sensors based on colloidal quantum dots for sensing photoplethysmographic signals [J]. ACS Nano, 2017, 11(6): 5992–6003.
- [7] 周泽宇,胡开明,屠尔琪,等.车载环境下 MEMS 微镜长期可靠性及控制方法[J].动力学与控制学报,2024,22(2):23–52.
ZHOU Z Y, HU K M, TU E Q, et al. Long-term reliability and control methods of MEMS micromirror in automobile environment [J]. Journal of Dynamics and Control, 2024, 22(2): 23–52. (in Chinese)
- [8] HUANG Z Y, HONG W, SUO Z. Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate [J]. Journal of Mechanics Physics of Solids, 2005, 53(9): 2101–2118.
- [9] HUANG R. Kinetic wrinkling of an elastic film on a viscoelastic substrate [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, 53(1): 63–89.
- [10] SONG J, JIANG H, LIU Z J, et al. Buckling of a stiff thin film on a compliant substrate in large deformation [J]. International Journal of Solids and Structures, 2008, 45(10): 3107–3121.
- [11] JIANG H Q, KHANG D Y, SONG J Z, et al. Finite deformation mechanics in buckled thin films on compliant supports [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2007, 104(40): 15607–15612.
- [12] JIANG H Q, KHANG D Y, FEI H Y, et al. Finite width effect of thin-films buckling on compliant substrate: experimental and theoretical studies [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56(8): 2585–2598.
- [13] KIM D H, XIAO J L, SONG J Z, et al. Stretchable, curvilinear electronics based on inorganic materials [J]. Advanced Materials, 2010, 22(19): 2108–2124.
- [14] WANG S D, SONG J Z, KIM D H, et al. Local versus global buckling of thin films on elastomeric substrates [J]. Applied Physics Letters, 2008, 93(2): 023126.
- [15] LI H F, CAI S S, ZHANG Y C, et al. Local wrinkling versus global buckling of stiff film bonded to finite-thick substrate [J]. Extreme Mechanics Letters, 2019, 29: 100453.

[16] CHENG H Y, ZHANG Y H, HWANG K C, et al. Buckling of a stiff thin film on a pre-strained bi-layer substrate [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, 51(18): 3113—3118.

[17] WANG C J, ZHANG S, NIE S, et al. Buckling of a stiff thin film on a bi-layer compliant substrate of finite thickness [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 188/189: 133—140.

[18] BI H H, WANG B, SU C, et al. Buckling behaviour of a stiff thin film on a finite-thickness bi-layer substrate [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2021, 219/220: 177—187.

[19] ZHOU H L, QIN W Y, YU Q M, et al. Controlled buckling and postbuckling behaviors of thin film devices suspended on an elastomeric substrate with trapezoidal surface relief structures [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2019, 160: 96—102.

[20] OU Z C, YAO X H, ZHANG X Q, et al. Dynamic stability of flexible electronic structures under step loads [J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2016, 58: 247—255.

[21] WANG B, BI H H, OUYANG H J, et al. Dynamic behaviour of piezoelectric nanoribbons with wavy configurations on an elastomeric substrate [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, 182: 105787.

[22] BI H H, WANG B, OUYANG H J, et al. Stochastic response of a piezoelectric ribbon-substrate structure under Gaussian white noise [J]. *Acta Mechanica*, 2021, 232(9): 3687—3700.

[23] ZHOU J F, HU K M, LIN H Y, et al. Dynamic wrinkling instability of elastic films on viscoelastic substrates [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2024, 91(8): 081011.

[24] DONG Z Q, HU K M, LIN H Y, et al. Dynamic behaviors of delaminated nanofilms partly bonded on substrates with sub-nanoscale van der waals dynamic boundaries [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2024, 91(5): 051009.

[25] 高思禹, 毛晓晔, 丁虎, 等. 热环境中超临界黏弹性输流管道自由振动分析[J]. *动力学与控制学报*, 2023, 21(6): 39—46.

GAO S Y, MAO X Y, DING H, et al. Free vibration analysis on supercritical viscoelastic pipes conveying fluid in thermal environment [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(6): 39—46. (in Chinese)