

粘弹性基底上功能梯度压电纳米梁波传播特性^{*}

刘娟^{1†} 王鑫特¹ 胡彪² 张波¹ 沈火明¹

(1. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

(2. 贵州工程应用技术学院, 土木建筑工程学院, 毕节 551700)

摘要 本文利用非局部应变梯度理论(NSGT)探究了含粘弹性基底的功能梯度压电(FGP)纳米梁的波传播特性. 基于 NSGT, 建立含粘弹性基底的 Euler 梁波传播模型及考虑剪切效应的 Timoshenko 梁模型, 利用哈密顿原理推导出波传播控制方程; 通过引入两种梁变形理论对应的波传播通解方程, 对运动方程组进行求解, 探讨了剪切效应、尺度参数、粘弹性参数、FG 指数等对波传播频率及相速度的影响. 研究表明: 尺度参数对波传播频率的影响与波数密切相关; 电压与梯度指数对两种梁波传播特性影响程度不同; 粘弹性基底参数对波传播频率有明显的影响, 且其影响程度与波数密切相关.

关键词 压电纳米梁, 波传播特性, 非局部应变梯度理论, 功能梯度

中图分类号: TB383; TB34

文献标志码: A

Wave Propagation Characteristics of Functionally Graded Piezoelectric Nanobeams on Viscoelastic Substrates^{*}

Liu Juan^{1†} Wang Xinte¹ Hu Biao² Zhang Bo¹ Shen Huoming¹

(1. School of Mechanics and Aeronautics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(2. School of Civil and Architectural Engineering, Guizhou Institute of Engineering and Application Technology, Bijie 551700, China)

Abstract This paper investigates the wave propagation characteristics of functionally graded piezoelectric (FGP) nanobeams on viscoelastic substrates using nonlocal strain gradient theory (NSGT). Based on NSGT, wave propagation model of Euler and Timoshenko beam model considering shear effect are established. Then the governing equations of wave propagation are derived by Hamilton principle. By introducing the general equations of wave propagation corresponding to two beam deformation theories, the equations of motion are solved. Moreover the effects of shear effect, scale parameter, viscoelastic parameter, and FG index on wave propagation frequency and phase velocity are discussed numerically. The results indicate that the effect of scale parameters on wave propagation frequency is closely related to wave number, and the influences of voltage and gradient index on the propagation characteristics for two kinds of beam waves are different. In addition, the viscoelastic base parameters have obvious influence on the wave propagation frequency, and the degree of influence is closely related to wave number.

Key words piezoelectric nanobeam, wave propagation characteristic, nonlocal strain gradient theory, functionally graded

2024-08-23 收到第 1 稿, 2024-10-09 收到修改稿.

^{*} 四川省自然科学基金(2022NSFSC2003, 2022NSFSC1938), 四川省自然科学基金面上项目(23NSFSC0849), Natural Science Foundation of Sichuan Province (2022NSFSC2003, 2022NSFSC1938), Natural Science General Foundation of Sichuan Province (23NSFSC0849).

[†] 通信作者 E-mail: 527312148@qq.com

引言

智能材料能够将一种能源转化为另一种能源,具有其它材料无法比拟的优异性能,包括自感知和自适应能力,在智能结构和系统中得到广泛应用,尤其在纳米技术、振动控制、传感器和致动器领域.其中压电材料作为一种独特的智能材料,因其具有机电耦合性强、功耗低、响应灵敏等特性,使其在传感器、微纳机器人和柔性电子器件等领域备受青睐,具有广泛的应用^[1-4].其中,功能梯度压电(Functionally Graded Piezoelectric, FGP)材料是采用先进的材料复合技术将两种或多种不同材料耦合而成的非均质材料^[5],具有良好的抗变形能力、机电转换性、耐腐蚀性及避免应力集中特性^[6-8],广泛应用于电力电子、机电一体化、电信、诊断设备和其它当代工业领域.

随着智能器件微型化发展,FGP 材料在纳米带、传感器、压力容器等工程领域中承载构件可以简化为特征尺度处于微纳米量级的梁、板、壳等结构.构件特征尺寸减小至纳米尺度,原子间的长程相互作用力显著增加,尺度效应不可忽视.研究发现,经典连续介质力学理论所预测的纳米结构振动频率与实际测量结果存在 10%~30% 的差异^[9].为有效研究小尺度效应对纳米结构力学特性的影响,研究者们提出了各种与尺度相关的理论来描述尺度效应现象,认为连续体中某一点的应变不是仅取决于该点处的应变,而是取决于连续体内所有物质点的应变.由 Eringen 等^[10]提出的非局部弹性理论(Nonlocal Elasticity Theory, NET)在纳米力学研究中扮演着重要角色,非局部连续力学将分子间作用力是长程力的思想引入到传统连续介质力学中,被证明能成功地预测软化效应^[11-13].含流体的双壁碳纳米管的非线性振动^[14]研究中发现 NET 无法预测材料可能存在的刚度硬化效应. Mindlin^[15]提出了应变梯度理论(Strain Gradient Theory, SGT),其中引入尺度参数来考虑高阶应变梯度或位错密度考虑对结构力学性能的影响. Lim 等人^[16]基于此提出了非局部应变梯度理论(NSGT),认为弹性体内的应力是由应变梯度高阶应力和非局部应力组成,实现了基于一种理论同时描述结构可能存在的刚度硬化和软化效应. Lim 将该理论应用于纳米梁和碳纳米管中的波传播分析中,揭示了

关于晶格动力学和波传播实验的一些新发现. Ma 等人^[17]基于此研究了磁电弹性纳米壳中的波传播特性.不少学者也利用非局部应变梯度理论探究了功能梯度压电纳米结构的动态特性^[18-21].研究表明 NSGT 在探究微纳尺度结构的振动、屈曲、震荡、稳定和波传播等力学行为领域有广泛的研究前景.

压电纳米梁结构在许多基于压电纳米线或纳米带的纳米器件中起着重要作用,其力学行为研究对纳米器件设计至关重要^[22].大量学者针对梁结构的力学特性做了很多的研究. Simsek 和 Yurtcu^[23]基于 NET 和 Euler-Bernoulli 梁理论建立了 FGP 纳米梁的非局部模型,研究了非局部参数、几何性质、材料组分对静态弯曲和屈曲响应的影响.随后 Rahmani 和 Pedram^[24]采用考虑剪切效应的 Timoshenko 梁理论,建立了非局部 FGP 梁模型,探讨了梯度指数、尺度参数和长厚比对纳米梁振动特性的影响.同时,研究发现安置在粘弹性地基上的 FGP 结构具有出色的抗疲劳、阻尼提高和降噪效果^[25-27],极大地满足了工程设计对减噪、减震的要求.其中 Winkler-Pasternak 模型是工程实践中应用最广泛的模型^[28].

本文基本 NSGT,分别建立了含 Winkler-Pasternak 粘弹性基底的 Euler-Bernoulli 梁及考虑剪切效应的 Timoshenko 梁波传播模型.其中 FGP 材料由 PZT-4 相和 PZT-5H 相组成,利用 Hamilton 原理推导梁在自由空间中谐波传播的运动微分方程,通过引入两种梁位移场下对应的谐波解,求解得到两种 FGP 纳米梁波传播模型中的频散关系,对剪切效应、尺度参数、粘弹性参数、FG 指数等对波传播频率及相速度的影响进行了参数化分析.

1 功能梯度压电纳米梁的动力学建模

1.1 非局部应变梯度压电材料本构理论

Lim 等引入了两个可表征两种尺度效应的尺度参数建立了 NSGT,该理论下的本构方程表达为^[16]:

$$t_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} - \frac{d\sigma_{ij}^{(1)}}{dx} \quad (1)$$

式中, $\sigma_{ij}^{(0)}$ 表示经典非局部应力, $\sigma_{ij}^{(1)}$ 表示高阶非局部应力.

由于本构方程中涉及空间积分,解决非局部问题在数学上相当困难.根据 Eringen 在 NET 中推

导思路,可以得到在电场影响下的简化应力与非局部应力之间的关系式:

$$\sigma_{ij}^{(0)} = \int_0^L \{ \alpha_0 (|x - x'|, e_0 a) [c_{ijkl} \epsilon'_{kl}(x') - e_{kij} E_k(x')] \} dx' \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = l^2 \int_0^L \{ \alpha_1 (|x - x'|, e_1 a) [c_{ijkl} \epsilon'_{kl,x}(x') - e_{kij} E_k(x')] \} dx' \quad (3)$$

式中, c_{ijkl} 表示弹性张量, ϵ' 表示 x' 处的应变张量, $e_0 a$ 和 $e_1 a$ 是表征非局部效应的非局部参数, l 是考虑高阶应变梯度效应的材料特征长度参数. 通过将方程(2)、方程(3)代入式(1), 并假设 $e_0 = e_1$, 可以获得基于 NSGT 的一般本构方程:

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = (1 - \eta \nabla^2) \begin{Bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{24} & 0 \\ \tilde{e}_{15} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$$(1 - \mu \nabla^2) \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = (1 - \eta \nabla^2) \begin{Bmatrix} \tilde{e}_{15} \gamma_{xz} + \tilde{s}_{11} E_x \\ \tilde{e}_{24} \gamma_{yz} + \tilde{s}_{22} E_y \\ \tilde{e}_{31} \epsilon_{xx} + \tilde{e}_{32} \epsilon_{yy} + \tilde{s}_{33} E_z \end{Bmatrix} \quad (8)$$

式中, $\mu = (ea)^2$ 表示非局部参数, $\eta = l^2$ 表示长度尺度参数, D_i 表示电位移.

1.2 纳米梁材料特性方程

本文提出了一种由 PZT-4 和 PZT-5H 两种压电陶瓷材料组成的沉积在粘弹性基底上的无限长 FGP 纳米梁模型, 其中纳米梁极化方向为厚度方向, 如下图 1 所示. 纳米梁的厚度为 h , 受到外部均匀电压 V_0 的影响, 任意点在 x 和 z 轴方向上的位移分别表示为 $U(x, y, z, t)$ 和 $W(x, y, z, t)$.

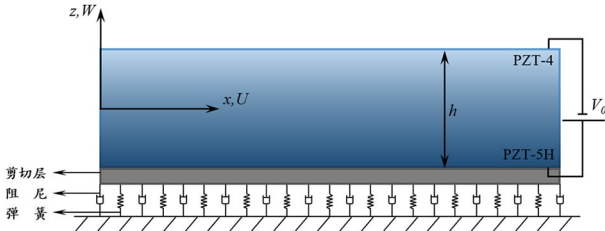


图 1 含粘弹性基底的 FGP 纳米梁示意图

Fig. 1 Geometric diagram of FGP nanobeam with viscoelastic substrates

FGP 纳米梁的材料属性为:

$$P(z) = (P_4 - P_{5H}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + P_{5H} \quad (9)$$

$$\sigma_{ij} - (e_0 a)^2 \nabla^2 \sigma_{ij} = (1 - l^2 \nabla^2) (c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k) \quad (4)$$

式中, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 表示拉普拉斯算子. 式(4)中的 $l^2 \nabla^2$ 可以看作是对经典本构方程的修正. 令 $e_0 = e_1 = e$ 并保留高阶项 ∇^2 , 可得在电场影响下的 FGP 材料的本构关系为:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma_{ij} = (1 - \eta \nabla^2) (c_{ijkl} \epsilon_{kl} - e_{kij} E_k) \quad (5)$$

$$(1 - \mu \nabla^2) D_i = (1 - \eta \nabla^2) (e_{ikl} \epsilon_{kl} + s_{ik} E_k) \quad (6)$$

基于上述本构关系, 可得到在电场的影响下, 微分形式的 FGP 纳米结构本构方程可以定义如下:

根据式(9), 可得 FGP 纳米梁的各项材料参数为^[29]:

$$c_{ij}(z) = (c_{ij}^4 - c_{ij}^{5H}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + c_{ij}^{5H} \quad (10)$$

$$e_{ij}(z) = (e_{ij}^4 - e_{ij}^{5H}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + e_{ij}^{5H} \quad (11)$$

$$s_{ij}(z) = (s_{ij}^4 - s_{ij}^{5H}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + s_{ij}^{5H} \quad (12)$$

$$\rho(z) = (\rho^4 - \rho^{5H}) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^N + \rho^{5H} \quad (13)$$

式中, 材料的弹性常数、压电常数、介电常数及材料密度分别表示为: c_{ij} 、 e_{ij} 、 s_{ij} 和 ρ_{ij} .

为满足 Maxwell 方程, FGP 纳米梁厚度分布的电势定义为^[30]:

$$\tilde{\Phi}(x, z, t) = -\cos(\beta z) \Phi(x, t) + \frac{2zV_0}{h} \quad (14)$$

式中, $\beta = \pi/h$ 为线性常数, $\Phi(x, t)$ 表示中平面电势变化, V_0 为初始外部电压. 根据电势方程, 可求得空间任意点轴向及纵向上的电场分量为^[31]:

$$E_x = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} = \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (15)$$

$$E_z = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} = -\frac{\pi}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \Phi - \frac{2V_0}{h} \quad (16)$$

1.3 功能梯度压电纳米梁波传播模型

1.3.1 非局部 Euler-Bernoulli 梁波传播模型

根据 Euler-Bernoulli 梁位移场,梁中任意点位移分量为:

$$\begin{cases} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{cases} = \begin{cases} -z \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \\ W(x, t) \end{cases} \quad (17)$$

式中, $W(x, t)$ 表示梁中平面上的点沿 z 轴方向上的位移. 因此应变及位移间关系为:

$$\epsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad (18)$$

为得到控制方程,应用如下 Hamilton 原理:

$$\int_0^t (\delta \Pi_K - \delta \Pi_S + \delta \Pi_F) dt = 0 \quad (19)$$

式中, Π_S , Π_K 和 Π_F 和分别表示应变能、动能和外力做功.

FGP 复合纳米梁的应变能可表示为:

$$\begin{aligned} \Pi_S &= \int_A (\sigma_{xx} \epsilon_{xx} - D_x E_x - D_z E_z) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left(-\sigma_{xx} z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - D_x E_x - D_z E_z \right) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(-M_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) dx - \frac{1}{2} \int_A \left[D_x \cos(\beta z) \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \right. \\ &\quad \left. D_z \left(\beta \sin(\beta z) \Phi + \frac{2V_0}{h} \right) \right] dA \end{aligned} \quad (20)$$

动能表示为:

$$\Pi_K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_0 \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (21)$$

由外部均匀电压变化所做的功 Π_{F_1} 可以通过以下公式获得:

$$\Pi_{F_1} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[N_{Ex} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (22)$$

另外,粘弹性地基所做的功 Π_{F_2} 可表示为:

$$\Pi_{F_2} = \frac{1}{2} \int_A \left[k_w W^2 + k_p \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + k_d \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] dA \quad (23)$$

式中, k_w 是 Winkler 参数, k_p 是 Pasternak 参数, k_d 表示粘性介质的阻尼系数.

将应变能、动能及功的表达式(20)~(23)代入式(19),即得到控制方程:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + (k_p - N_{Ex}) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - k_d \frac{\partial W}{\partial t} - k_w W = I_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (24)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \left[\cos(\beta z) \frac{\partial D_x}{\partial x} + D_z \beta \sin(\beta z) \right] dz = 0 \quad (25)$$

将微分形式的 FGP 结构的本构方程(7)、方程(8)在厚度方向积分后,得到力与力矩方程为:

$$\Gamma_\mu M_x = \Gamma_\eta \left(-D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + E_{31} \Phi \right) \quad (26)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} [\Gamma_\mu D_x \cos(\beta z)] dz = \Gamma_\eta \left(E_{15} \frac{\partial W}{\partial x} + X_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \quad (27)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} [\Gamma_\mu D_z \beta \sin(\beta z)] dz = \Gamma_\eta \left(\frac{F_{32}}{R} W - X_{33} \Phi \right) \quad (28)$$

将上述力与力矩方程代入控制方程(24)、方程(25),即得到波传播运动方程为:

$$\begin{aligned} &\Gamma_\eta \left(E_{31} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \right) \\ &= \Gamma_\mu \left[k_w W + (N_{Ex} - k_p) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial W}{\partial t} + I_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Gamma_\eta \left(-E_{31} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + X_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - X_{33} \Phi \right) = 0 \quad (30)$$

在 Euler-Bernoulli 梁几何假设下,对自由空间中 FGP 纳米梁,波传播通解可假设为:

$$\begin{cases} W(x, \theta, t) \\ \Phi(x, \theta, t) \end{cases} = \begin{cases} W_m \\ \Phi_m \end{cases} \exp[i(kx - \omega t)] \quad (31)$$

式中, W_m 表示纳米梁任意点处沿着 x 方向波传播的位移幅值, Φ_m 表示电势幅值, i 为虚数单位, k 表示波沿着 x 方向传播时产生的波数. 将通解方程(31)代入运动微分方程(29)、方程(30)中,即得到 FGP 纳米梁的波传播特征方程为:

$$(\mathbf{L}_{BE} + \omega \mathbf{K}_{BE} - \omega^2 \mathbf{H}_{BE}) \begin{Bmatrix} W_m \\ \Phi_m \end{Bmatrix} = 0 \quad (32)$$

式中, $\mathbf{L}_{BE}$, $\mathbf{K}_{BE}$ 与 $\mathbf{H}_{BE}$ 分别为波传播通解方程中的刚度系数矩阵、载荷系数矩阵以及质量系数矩阵. 角频率 ω 值可由系数矩阵的行列式等于零求得:

$$|\mathbf{L}_{BE} + \omega \mathbf{K}_{BE} - \omega^2 \mathbf{H}_{BE}| = 0 \quad (33)$$

1.3.2 非局部 Timoshenko 梁波传播模型

基于 Timoshenko 梁位移场,可得纳米梁中任意点的位移分量及对应的应变分量如下:

$$\begin{cases} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{cases} = \begin{cases} z \phi_x(x, t) \\ W(x, t) \end{cases} \quad (34)$$

$$\epsilon_{xx} = z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \phi_x + \frac{\partial W}{\partial x} \quad (35)$$

故 Timoshenko 梁的运动方程为：

$$\Gamma_\eta \kappa_s \left[A_{44} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) - E_{15} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) \right] \\ = \Gamma_\mu \left[k_w W + (N_{Ex} - k_p) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_d \frac{\partial W}{\partial t} + I_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] \quad (36)$$

$$\Gamma_\eta \left[D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} - \kappa_s A_{55} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \phi_x \right) + \right. \\ \left. (E_{31} + \kappa_s E_{15}) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = \Gamma_\mu I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \quad (37)$$

$$\Gamma_\eta \left[E_{31} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + E_{15} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. X_{11} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - X_{33} \Phi \right] = 0 \quad (38)$$

式中， $\kappa_s = 5/6$ 是剪切力校正系数，用于补偿恒定剪切应力假设造成的误差。

Timoshenko 梁谐波通解可假设为：

$$\begin{Bmatrix} W(x, \theta, t) \\ \phi_x(x, \theta, t) \\ \Phi(x, \theta, t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_m \\ \phi_{xm} \\ \Phi_m \end{Bmatrix} \exp[i(kx - \omega t)] \quad (39)$$

式中 ϕ_{xm} 表示纳米梁任意点沿着 x 轴方向的转角幅值。同理可求得角频率 ω 。

2 模型求解与分析

纳米梁由压电陶瓷中的 PZT-4 和 PZT-5H 材料组成，其材料参数如表 1^[32]。本文中除非特别指定，否则使用以下参数： $\mu = 1 \text{ nm}^2$ 、 $\eta = 2 \text{ nm}^2$ 、 $h = 10 \text{ nm}$ 、 $V = 1 \text{ V}$ 、 $N = 2$ 、 $k_w = 10 \text{ GPa/nm}$ 、 $k_p = 1 \text{ kN/m}$ 、 $k_d = 1 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ 。

表 1 FGP 纳米梁的材料参数^[32]
Table 1 Material properties of FGP nanobeam^[32]

材料属性	PZT-4	PZT-5H
弹性常数/GPa	$c_{11}=132, c_{12}=71, c_{13}=73, c_{22}=132,$ $c_{23}=73, c_{33}=115, c_{66}=30.5$	$c_{11}=126, c_{12}=79.1, c_{13}=83.9, c_{22}=139,$ $c_{23}=83.9, c_{33}=117, c_{66}=23.5$
压电常数/ $\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$	$e_{31}=-4.1, e_{32}=-4.1, e_{33}=14.1, e_{15}=e_{24}=10.5$	$e_{31}=-6.5, e_{32}=-6.5, e_{33}=23.3, e_{15}=e_{24}=17$
介电常数/ $10^{-9} \text{ C} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$	$s_{11}=5.841, s_{22}=5.841, s_{33}=7.124$	$s_{11}=15.05, s_{22}=15.05, s_{33}=13.02$
密度/ $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$	$\rho=7.5$	$\rho=7.5$

2.1 模型有效性验证

为验证理论模型正确性，用 ZnO 和 LiNbO3 的材料参数分别代替 FGP 纳米梁中 PZT-4 及 PZT-5H，得到在不同非局部参数 μ 影响下，相速度 C 与波数 k 的关系如图 2 所示。通过与 Ebrahimi 等的研究结果^[33]进行比较，验证了所提出模型

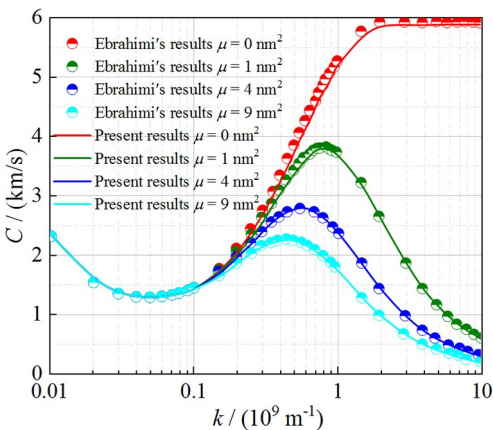


图 2 不同非局部参数下，波数对纳米梁相速度的影响
Fig. 2 The influence of wave number on the phase velocity of nanobeam under different nonlocal parameters

的准确性以及程序的有效性。

2.2 数值结果与讨论

2.2.1 尺度参数的影响

图 3(a)、图 3(b)为两种位移场下，非局部参数 μ 和长度尺度参数 η 对纳米梁波传播频散特性的影响。在所有情况下，频率均随着波数的增加而增加。此外，频率 f 随着 μ 的增加而减小，说明非局部弹性应力场可以表征结构的刚度软化效应。相应地， η 的增加导致了 f 的增加，表明应变梯度应力场可以预测结构的刚度硬化效应，且波数越大，尺度参数对 f 的影响程度越大。通过两幅图对比，可以看出 Euler-Bernoulli 梁由于没有考虑剪切变形，得到的波传播频率高于 Timoshenko 梁，且这种差异性随着波数的增加而逐渐增加。

图 4 显示在不同波数 k 下，两个尺度参数间比值 μ/η 对 FGP 纳米梁波传播频率的影响。从图中可以看出，当 $\mu/\eta > 1$ 时，基于 NSGT 得到的频率都小于基于经典连续介质理论得到的频率，这是因

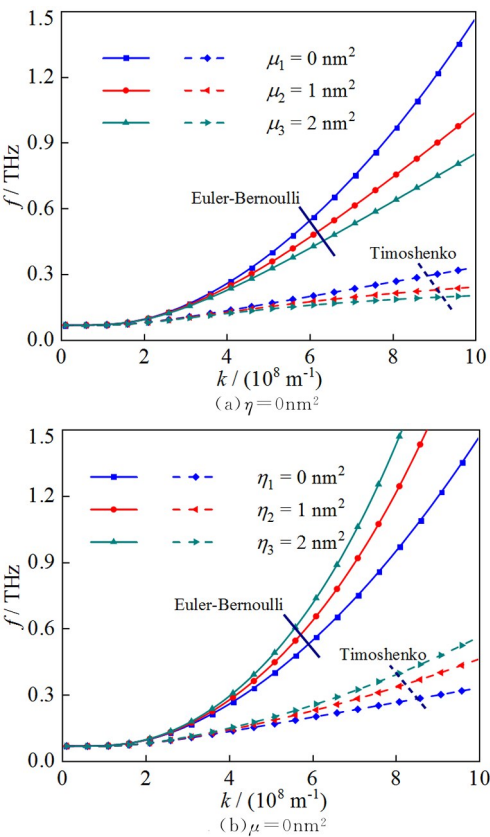


图 3 不同梁理论及尺度参数下,波数对纳米梁波传播特性的影响
Fig. 3 The influence of wave number on wave propagation characteristics of nanobeam under different beam theories and scale parameters

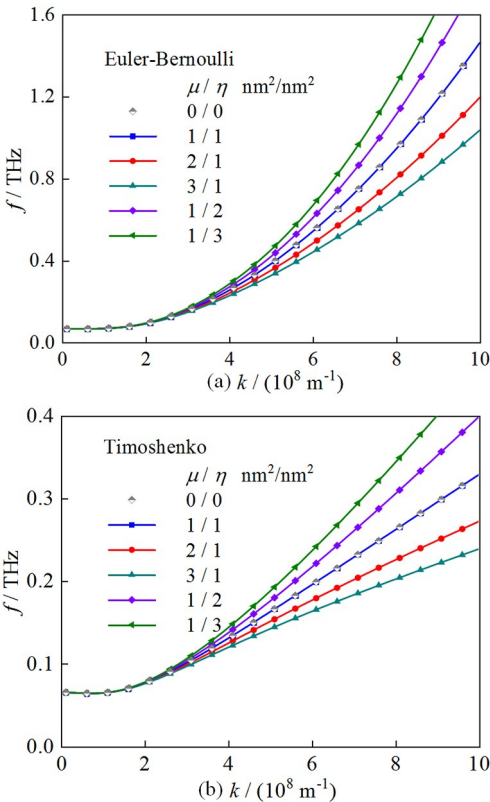


图 4 不同梁理论及尺度参数比值下,波数对纳米梁波传播特性的影响
Fig. 4 The influence of wave number on wave propagation characteristics of nanobeams under different beam theories and scale parameter ratios

为当非局部效应占主导地位时,会使得梁的刚度减弱,呈现出软化效应.相反地,当 $\mu/\eta < 1$ 时,NSGT 获得的频率都大于基于经典连续介质理论得到的频率,这是因为此时占主导地位的应变梯度效应使得梁的刚度增强,呈现硬化效应,特别地,当 $\mu/\eta = 1$ 时,NSGT 和经典连续介质理论得到的频率在数值上是等价的,说明此时非局部参数导致的刚度软化效应与长度尺度参数导致的硬化效应会相互抵消.此外,当固定其中一个尺度参数,改变另一个时,发现当波数较大时导致的频率变化大于波数较小时对应的频率变化,进一步表明尺度效应在波数较大时更加明显,而在波数较小时较为微弱.所以关于纳米梁尺度效应的频散特性研究不仅需要考 虑尺度效应的作用,也需要关注波数的影响.

2.2.2 电压、梯度指数的影响

图 5 所示为外部电压 V 的变化对波传播频率 f 及相速度 C 的影响示意图.由图表明正电压的增加导致了频率的减小,而负电压的增加导致了频率的增加.这是因为对 FGP 纳米梁分别施加正电压和负电压时,在纳米梁中会分别产生压力和拉力,进而导致纳米梁刚度分别减弱和增强.除此之外,

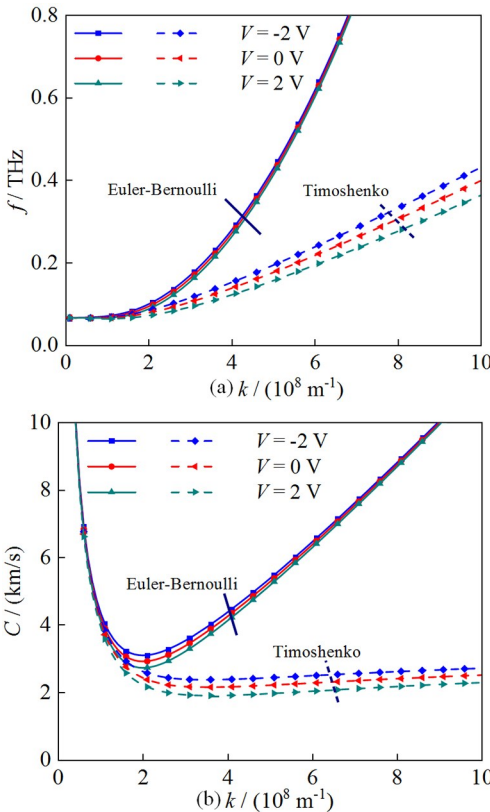


图 5 不同梁理论及电压下,波数对纳米梁波传播特性的影响:
(a) 频率; (b) 相速度
Fig. 5 The influence of wave number on wave propagation characteristics of nanobeams under different beam theories and voltages: (a) Frequency; (b) Phase velocity

可观察到在相同电压变化下,对 Timoshenko 梁波传播频率及相速度的影响程度大于 Euler-Bernoulli 梁对应的影响程度。

如图 6 可见梯度指数的增加降低了频率,这是因为 PZT-4 和 PZT-5H 组成的 FGP 纳米梁中, PZT-5H 的体积分数随着 FG 指数的增加而增加,而 PZT-5H 的弹性模量小于 PZT-4,所以 FG 指数的增加降低了纳米梁的弹性模量,导致了波传播频率降低。在相同的 N 值变化下,FG 指数对 Euler-Bernoulli 梁的波传播特性影响程度大于 Timoshenko 梁,这是电压与梯度指数对两种梁波传播特性影响程度的不同之处。因此综合图 5 和图 6,表明可通过改变外部电压和内部构成的 FG 指数来调控波在该结构中的传播频率。

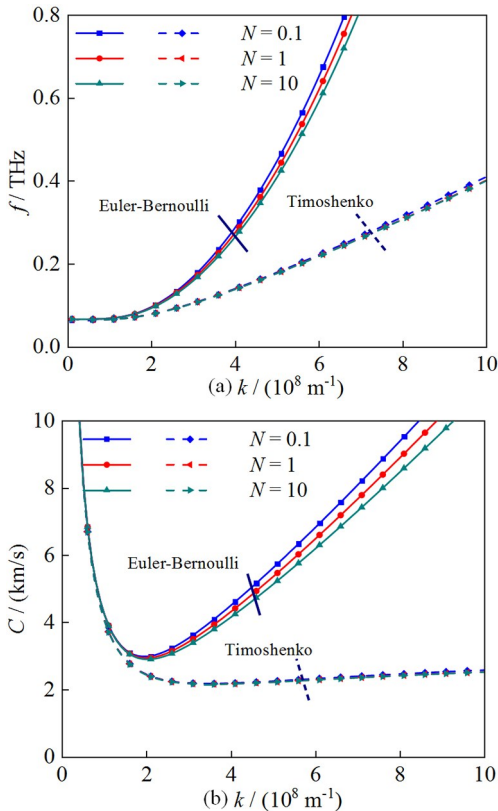


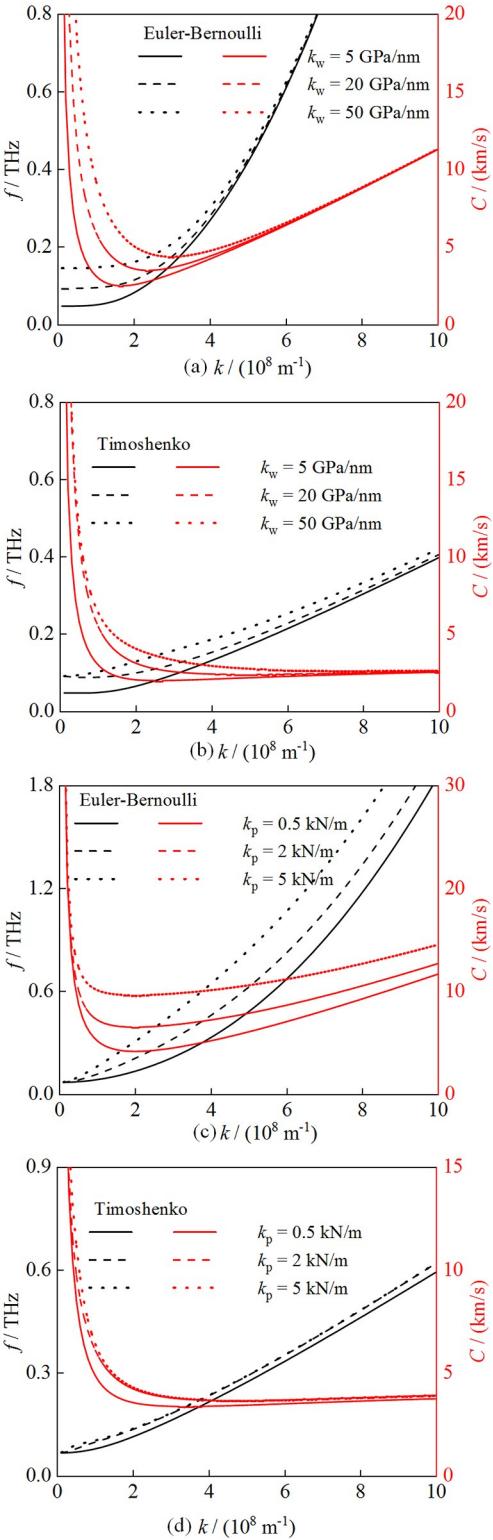
图 6 不同梁理论及梯度指数下,波数对纳米梁波传播特性的影响: (a)频率;(b)相速度

Fig. 6 The influence of wave number on wave propagation characteristics of nanobeams under different beam theories and gradient indexes: (a)Frequency; (b)Phase velocity

2.2.3 粘弹性基底的影响

图 7 为粘弹性基底的 Winkler 系数 k_w 、Pasternak 系数 k_p 及阻尼系数 k_d 对非局部 Euler-Bernoulli 梁和 Timoshenko 梁的波动特性影响。从图 7(a)~(d)中可看到,波传播频率 f 和相速度 C 随 Winkler 系数及 Pasternak 系数的增大而增大,

因为较大的弹簧系数和剪切系数会增大纳米梁的刚度。Winkler 系数对波传播频率及相速度的影响集中在 $k < 4 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$ 时,而当 $k > 4 \times 10^8 \text{ m}^{-1}$ 时,波传播特性对 Winkler 系数的敏感度会迅速下降,相反地 Pasternak 系数在波数越小时,对波传播的影响程度越大。而从图 7(e)、图 7(f)中可以看到波传播频率随着阻尼系数的增大而减小,这是因为阻



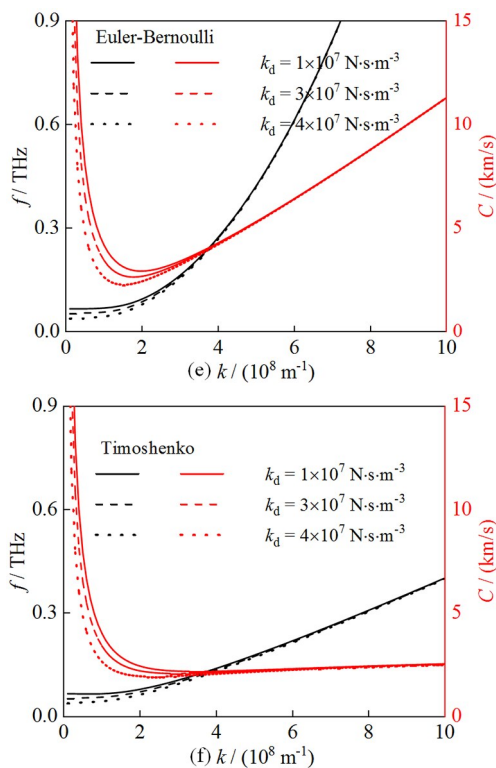


图 7 不同梁理论及粘弹性基底参数下,波数对纳米梁频率(左轴)及相速度(右轴)的影响:(a)、(b)Winkler 系数;(c)、(d)Pasternak 系数;(e)、(f)阻尼系数

Fig. 7 The influence of wave number on frequency (left axis) and phase velocity (right axis) of nanobeams under different beam theories and viscoelastic matrix parameters: (a)、(b)Winkler coefficient; (c)、(d)Pasternak coefficient; (e)、(f)Damping coefficient

尼介质对波传播有阻滞作用,阻尼系数越大,FGP 纳米梁的刚度越小,且在波数越小时,阻尼介质对波传播频率的影响越明显.显然,粘弹性基底参数对波传播频率有明显的影响,且其影响程度与波数密切相关.

3 结论

本文研究了尺度参数、FG 指数和粘弹性基底对 FGP 材料纳米梁波传播的影响.主要结论如下:

- (1) NSGT 框架下非局部参数与应变梯度参数的比值小于 1 时,纳米梁表现出刚度软化效应;当比值大于 1 时,纳米梁表现出刚度硬化效应,且随着比值及波数变大,对应的尺度效应越明显.
- (2) Euler-Bernoulli 梁的波传播频率高于 Timoshenko 梁.这是由于 Timoshenko 梁考虑的剪切变形导致了波传播频率的降低,且两种梁对应的频率数值差异随着波数的增加而逐渐增加.
- (3) 梯度指数越大,压电纳米梁的刚度越低,频率越小;施加正电压会降低刚度,而负电压的增加则有助于刚度增加.此外,梯度指数对 Euler-

Bernoulli 梁中波频率的影响程度大于 Timoshenko 梁,而电压对在两种梁波动特性的影响程度相反.

(4) 粘弹性基底会显著地影响波传播频率及相速度,在波数较小的情况下,Winkler 及阻尼参数对频率的影响更为显著,而在波数较大的情况下,Pasternak 参数的影响更为显著.

参考文献

- [1] GUL U, AYDOGDU M. Wave propagation in double walled carbon nanotubes by using doublet mechanics theory [J]. Physica E Low-Dimensional Systems and Nanostructures, 2017, 93: 345 — 357.
- [2] GAO Z Y, ZHU X J, FANG Y B, et al. Active monitoring and vibration control of smart structure aircraft based on FBG sensors and PZT actuators [J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 63: 101—109.
- [3] GUPTA V, SHARMA M, THAKUR N. Optimization criteria for optimal placement of piezoelectric sensors and actuators on a smart structure: a technical review [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2010, 21 (12): 1227 — 1243.
- [4] LI Y L, FU Y M, MAO Y Q. Analysis of delamination fatigue growth for delaminated piezoelectric elasto-plastic laminated beams under hygrothermal conditions [J]. Composite Structures, 2011, 93 (2): 889—901.
- [5] 夏巍, 冯浩成. 热过屈曲功能梯度壁板的气动弹性颤振[J]. 力学学报, 2016, 48(3): 609—614.
- XIA W, FENG H C. Aeroelastic flutter of post-buckled functionally graded panels [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 609—614. (in Chinese)
- [6] ZHANG N, ZHAO X, ZHENG S J, et al. Size-dependent static bending and free vibration analysis of porous functionally graded piezoelectric nanobeams [J]. Smart Material Structures, 2020, 29 (4): 045025.
- [7] VASHISHTH A K, BAREJA U. Analysis of Love waves propagation in a functionally graded porous piezoelectric composite structure [J]. Waves in Random and Complex Media, 2022: 1—32.

- [8] 陈明飞, 刘坤鹏, 靳国永, 等. 面内功能梯度三角形板等几何面内振动分析[J]. 应用数学和力学, 2020, 41(2): 156—170.
CHEN M F, LIU K P, JIN G Y, et al. Isogeometric in-plane vibration analysis of functionally graded triangular plates [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2020, 41(2): 156—170. (in Chinese)
- [9] FARAJPOUR A, GHAYESH M H, FAROKHI H. A review on the mechanics of nanostructures [J]. International Journal of Engineering Science, 2018, 133: 231—263.
- [10] ERINGEN A C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves [J]. Journal of Applied Physics, 1983, 54(9): 4703—4710.
- [11] WANG Y Q, LIANG C, ZU J W. Wave propagation in functionally graded cylindrical nanoshells based on nonlocal Flügge shell theory [J]. The European Physical Journal Plus, 2019, 134(5): 233.
- [12] GHORBANPOUR ARANI A, MOSALLAIE BAZOKI A A, KOLAHCHI R, et al. Pasternak foundation effect on the axial and torsional waves propagation in embedded DWCNTs using nonlocal elasticity cylindrical shell theory [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2011, 25(9): 2385—2391.
- [13] WANG Q, VARADAN V K. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes [J]. Smart Material Structures, 2007, 16(1): 178—190.
- [14] KUANG Y D, HE X Q, CHEN C Y, et al. Analysis of nonlinear vibrations of double-walled carbon nanotubes conveying fluid [J]. Computational Materials Science, 2009, 45(4): 875—880.
- [15] MINDLIN R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 1965, 1(4): 417—438.
- [16] LIM C W, ZHANG G, REDDY J N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation [J]. Journal of Mechanics Physics of Solids, 2015, 78: 298—313.
- [17] MA L H, KE L L, REDDY J N, et al. Wave propagation characteristics in magneto-electro-elastic nanoshells using nonlocal strain gradient theory [J]. Composite Structures, 2018, 199: 10—23.
- [18] SHARIFI Z, KHORDAD R, GHARAATI A, et al. An analytical study of vibration in functionally graded piezoelectric nanoplates: nonlocal strain gradient theory [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(12): 1723—1740.
- [19] 罗秋阳, 李成. 考虑非局部应变梯度效应的轴对称压电纳米圆板热—力—电耦合振动[J]. 振动工程学报, 2022, 35(5): 1118—1129.
LUO Q Y, LI C. Thermal-mechanical-electrical coupling vibration of axisymmetric piezoelectric circular nanoplates accounting for nonlocal strain gradient effects [J]. Journal of Vibration Engineering, 2022, 35(5): 1118—1129. (in Chinese)
- [20] Wang X Y, Luo Q Y, Li C, Xie Z Y. On the out-of-plane vibration of rotating circular nanoplates [J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2022, 39(1): 23—35.
- [21] 陈玲, 沈纪苹, 李成, 刘鑫培. 梯度型非局部高阶梁理论与非局部弯曲新解法, 力学学报, 2016, 48(1): 127—134.
Chen L, Shen J P, Li C, Liu X P. Gradient type of nonlocal higher-order beam theory and new solution methodology of nonlocal bending deflection [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(1): 127—134. (in Chinese)
- [22] ZHANG R Z, LIANG X, SHEN S P. A Timoshenko dielectric beam model with flexoelectric effect [J]. Meccanica, 2016, 51(5): 1181—1188.
- [23] ŞİMŞEK M, YURTCU H H. Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory [J]. Composite Structures, 2013, 97: 378—386.
- [24] RAHMANI O, PEDRAM O. Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory [J]. International Journal of Engineering Science, 2014, 77: 55—70.
- [25] EBRAHIMI F, HOSSEINI S H S. Investigation of flexoelectric effect on nonlinear forced vibration of piezoelectric/functionally graded porous nanocomposite resting on viscoelastic foundation [J]. The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 2020, 55(1/2): 53—68.
- [26] JANKOWSKI P, ZUR K K, KIM J, et al. On the bifurcation buckling and vibration of porous nano-

- beams [J]. *Composite Structures*, 2020, 250: 112632.
- [27] ZANNON M, ABU-RQAYIQ A, AL-BDOUR A. Free vibration frequency of thick FGM spherical shells based on a third-order shear deformation theory [J]. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2020, 13(4): 766—778.
- [28] MA J J, LIU F J, NIE M Q, et al. Nonlinear free vibration of a beam on Winkler foundation with consideration of soil mass motion of finite depth [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 92(2): 429—441.
- [29] EBRAHIMI F, BARATI M R. Hygrothermal effects on vibration characteristics of viscoelastic FG nanobeams based on nonlocal strain gradient theory [J]. *Composite Structures*, 2017, 159: 433—444.
- [30] KE L L, WANG Y S, YANG J, et al. Free vibration of size-dependent magneto-electro-elastic nanoplates based on the nonlocal theory [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2014, 30(4): 516—525.
- [31] WANG S, MAO J J, ZHANG W, et al. Nonlocal thermal buckling and postbuckling of functionally graded graphene nanoplatelet reinforced piezoelectric micro-plate [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, 43(3): 341—354.
- [32] WANG Y Q, LIU Y F, ZU J W. Analytical treatment of nonlocal vibration of multilayer functionally graded piezoelectric nanoscale shells incorporating thermal and electrical effect [J]. *The European Physical Journal Plus*, 2019, 134(2): 54.
- [33] EBRAHIMI F, SEYFI A. Wave propagation analysis of smart inhomogeneous piezoelectric nanosize beams rested on an elastic medium [J]. *Waves in Random and Complex Media*, 2022, 32(3): 1269—1288.