

微机械频率梳动力学行为及应用研究综述^{*}

吴佳豪¹ 邵磊¹ 张文明^{2†}

(1. 上海交通大学 密西根学院, 上海 200240)

(2. 上海交通大学 机械与动力工程学院, 上海 200240)

摘要 光学频率梳在精确测量和时频标准领域有着重要作用. 随着技术进步, 传统的光学频率梳向着小型化、集成化方向发展出微型光学频率梳、微型光机械耦合频率梳等新型技术. 借鉴光子和声子之间的共性, 纯粹基于机械振动的微机械频率梳为传感器技术、量子信息通信和极端环境下的应用提供了新的可能性. 本文首先介绍了微机械频率梳的形成机理和数值仿真模型. 在此基础上, 本文主要阐述了微机械频率梳基于参数激励、内共振、碰撞效应、负耗散、负非线性摩擦等多种激发原理, 总结了国内外现有的研究现状. 此外, 本文还从实际应用的角度让读者进一步了解微机械频率梳在相关领域的广泛应用, 有助于了解微机械频率梳的自身特点和优势. 最后, 本文对未来发展方向进行了总结和展望.

关键词 微机械频率梳, 非线性振动, 幅频调制, 动力学行为, 精确测量

中图分类号: O322

文献标志码: A

Review on the Dynamic Behaviors of Micromechanical Frequency Combs and Their Applications^{*}

Wu Jiahao¹ Shao Lei¹ Zhang Wenming^{2†}

(1. University of Michigan-Shanghai Jiao Tong University Joint Institute, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract Optical frequency combs are pivotal in the realm of precise measurement and time-frequency standards. As technology advances, traditional optical frequency combs are trending towards miniaturization and integration, leading to the emergence of innovations such as micro-optical frequency combs and micro-optomechanical coupling frequency combs. Leveraging the similarities between photons and phonons, micromechanical frequency combs based solely on mechanical vibrations present novel opportunities for sensor technology, quantum information communication, and applications in extreme environments. This paper first introduces a numerical simulation model of micromechanical frequency combs. Based on it, it then elucidates the generation mechanisms of these combs, which include parametric excitation, internal resonance, contact and impact effects, negative dissipation, and negative nonlinear friction. Furthermore, from a perspective of practical application, this paper aims to enhance the reader's understanding of the extensive applications of micromechanical frequency combs in related fields, their distinctive characteristics and advantages, and provides a summary and outlook on future development directions.

Key words micromechanical frequency combs, nonlinear vibration, amplitude and frequency modulation, dynamic behavior, precision measurement

引言

频率梳这一概念最早在光学领域中被提出,光学频率梳(OFCs)是一种具有突破性意义的光源,其特征是频谱上展示出均匀等距间隔的谱线 Hall 和 Hänsch 在 20 世纪末首次提出了这一技术,并因其对精密测量和时间频率标准的重大贡献而获得 2005 年诺贝尔物理学奖^[1,2]. 光学频率梳作为一个桥梁,将太赫兹频段的光信号和兆赫兹频段的微波信号联系在一起,为光频率测量提供了更高的分辨率,实现了测量并控制光频率的目的^[3]. 早期的光学频率梳系统非常复杂,其构成需要超过 20 个振荡器和 50 个反馈电路来实现单次频率测量^[4],这大大限制了光学频率梳的测量能力. 直到 21 世纪初,单锁模激光器的发明彻底改变了这一复杂的测量系统^[5]. 通过采用 $f-2f$ 干涉法完成载波包络相位差的精确检测,实现了精确的光学测量^[6]. 光学频率梳已被应用在诸多领域,包括时间与频率的精密测量^[7,8],光原子钟^[9-13],X 射线和阿秒脉冲的产生^[14],天文光谱仪的校准^[15]等.

尽管光学频率梳已经被证明在精确测量和光谱学等领域具有很强的功能,但是传统光学频率梳还有其局限性. 整套光学频率梳系统通常要求具备一个超稳激光源、一个光学腔、一套信号反馈系统,这样大型昂贵且复杂的系统使得光学频率梳被限制在实验室中运行,无法满足商业应用的需求. 随着近二十年来集成光子学的发展,新一代基于集成芯片的微型光学频率梳已经问世,大大降低了传统光学频率梳的尺寸和复杂性^[16,17]. 微型光学频率梳的小型化和集成化为其在新领域的应用提供了可能,例如在自动驾驶中,微型光学频率梳可以提高激光雷达系统的精度和可靠性,从而使车辆更安全、更高效^[18]. 在电信领域,微型光学频率梳可以通过提供精确的定时和频率参考,在 5G 和 6G 等下一代通信网络的发展中发挥至关重要的作用^[19]. 在机器学习中,这些频率梳可以用于高速、高精度的数据处理和信号分析,推动人工智能和数据科学的进步^[20,21]. 尽管微型光学频率梳的诞生

使得商业化应用成为可能,但是它还有两大局限性^[22]. 首先,微型光学频率梳的带宽通常被限制在几十个纳米以内,且其信噪比较低,限制了整体性能. 其次,虽然微型光学频率梳解决了尺寸上的限制,但是对制造过程提出更严格的要求,使制造更加苛刻和复杂,如何克服这两大难题至关重要.

微型光机械频率梳成为克服上述难题的有力解决方案^[23]. 它可以提供更广泛的工作频率带宽,通过机械谐振器与光学系统的耦合实现对频率和相位的控制,增强了频率梳的稳定性^[24]. 基于克尔非线性的光机耦合微型频率梳实现方式多种多样,包括氟化钙谐振器^[25],氟化镁谐振器^[26],非线性光纤谐振器^[27],氮化硅环状谐振器^[28,29],高折射率硅一玻璃微环谐振器^[30],二氧化硅微环谐振器^[31]等. 除此之外,四波混频原理在研制微型光机械频率梳中也起到了重要作用^[32,33].

尽管微型光机械频率梳成功地拓宽了工作带宽,并引入了一种新的频率稳定方法^[34-37],但光学系统和机械谐振器之间的复杂耦合需要精确的制造工艺和复杂的控制系统,这既耗时又昂贵. 相比之下,仅依靠机械谐振器产生的微机械频率梳系统结构简单,降低了设计和制造的复杂性. 此外,微机械频率梳具有在较低频率范围内工作的能力,这对于雷达探测、加速度传感和精密机械测量等特定应用场景至关重要.

本文参考并回顾了前人的经典文献,整理综述了近十年来微机械频率梳领域的一些热点问题,重点关注微机械频率梳的理论计算、形成机理和潜在应用领域. 本文旨在让读者系统性地了解微机械频率梳的特色和优势,为微机械频率梳未来的进一步推广与发展提供帮助.

1 微机械频率梳数值计算

鉴于声子和光子的相似性,通过不同声子模式耦合形成的声子频率梳,也就是微机械频率梳,在近年来引起诸多科学家的广泛关注.

Cao 等人首次通过数值计算的方式证明了在非线性无色散关系系统中存在微机械频率梳^[38].

他们考察发现一维非线性系统中声子间产生强相互作用时,能量会被分成多个部分,导致两个或多个附加声子的激发.通过外部频率激励驱动,当激励频率匹配几个本征声子振动模态频率的和时会引起三波混频,从而产生微机械频率梳.

其声子驱动的哈密顿量可用下式(1)表示:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{P_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2 Q_i^2}{2} + f_i \cos(\omega_d t) Q_i \right] + \sum_{i,j,k} \frac{\alpha B_{ijk}}{2(N+1)} Q_i Q_j Q_k \quad (1)$$

式中第一项表示声子在单频激励下的线性运动,其中 Q_i (P_i) 表示声子的正则坐标(动量),式中第二项表示声子之间的非线性耦合作用.

基于林滋泰德-庞加莱法,声子 $Q_{i(j)}$ 的非线性耦合可以用下式(2)表示:

$$\dot{Q}_{i,j} = A_0^{i(j)} \cos(\tilde{\omega}_{i(j)} t) + \sum_{p \neq 0} A_p^{i(j)} \cos(\tilde{\omega}_{i(j)} + p \Delta \omega) t \quad (2)$$

其中 $A_p^{i(j)}$ 表示振幅, $\tilde{\omega}_{i(j)}$ 表示声子 $Q_{i(j)}$ 的归一化固有频率.

如图1所示,10个声子模态在受到外部激励的情况下,模态1和模态10被激发进入非线性共振区,其能级至少比其他声子模态高10倍.通过观察模态1和模态10的频谱,可以发现代表微机械频率梳的均匀等距梳齿谱线.梳齿间隔可以表示为 $\Delta \omega = \omega_d - \omega_1 - \omega_{10}$,其中 ω_d 为外部激励频率, ω_1 和 ω_{10} 分别为模态1和模态10的谐振频率.由此可见,微机械频率梳的产生强烈依赖于驱动频率和模态谐振频率.当外部驱动频率精确地调谐到三个声子模态频率之和时,三个声子模态可以同时被激

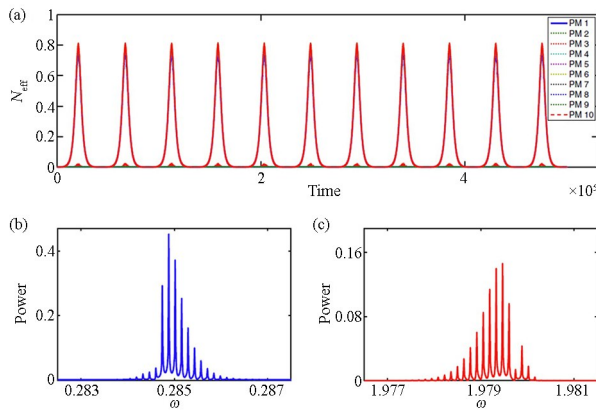


图1 基于声子模态共振产生的微机械频率梳:

(a) 时域信号; (b) 模态1频域图; (c) 模态10频域图

Fig. 1 Micro mechanical frequency combs generated by the resonance of phonon modes; (a) Temporal domain signal;

(b) Spectrum of phonon mode 1; (c) Spectrum of phonon mode 10

发,产生大振幅的快速振荡.在频谱上展示出具有相同梳齿间隔的三组微机械频率梳.通过调节外部驱动信号的频率和强度可以实现定量控制微机械频率梳的梳齿间隔和工作带宽,证明了微机械频率梳的可控性,为后续实验研究提供了坚实的理论基础.

2 基于参数激励的微机械频率梳

参数激励是对系统参数进行调制,在特定条件下可引起共振效应.具体来说,亚谐波自参激是使用一个外部激励频率激发起一个特定模态时,以接近两倍周期参数调制自发激励起另一个振动模态.

在2017年, Ganesan 等人首次通过实验现象报道了基于亚谐波自参激的微机械频率梳^[39].他们使用了表面沉积 AlN 薄膜的 SOI 晶圆实现了如图2所示的三波混频,其中面内模态的谐振频率 ω_1 约是面外模态的谐振频率 ω_2 的两倍.调整激励频率 ω_d 到接近 ω_1 时,面内和面外两个模态通过自参激同时被激励起来.当激励幅值较小时,频谱上仅能观察到两根单独的谐振峰.

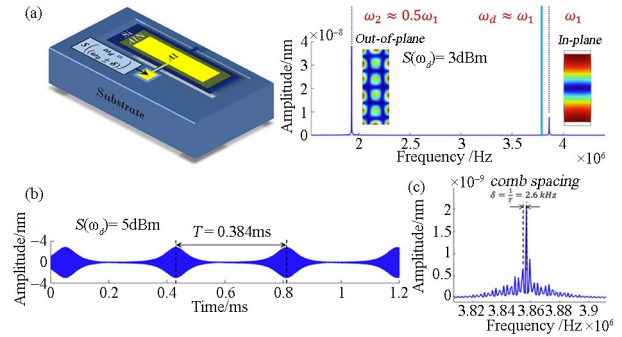


图2 基于参数激励产生的微机械频率梳:

(a) 参数激励原理; (b) 时域信号; (c) 频域信号

Fig. 2 Micro mechanical frequency combs generated by parametric excitation; (a) Parametric excitation principle;

(b) Temporal domain signal; (c) Spectrum signal

其非线性耦合系统的动力学方程模型可用式(3)和式(4)来表示:

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1 - 2\zeta_1 \omega_1 \dot{Q}_1 + f_d \cos(\omega_d t) + \alpha_{11} Q_1^2 + \beta_{111} Q_1^3 + \beta_{122} Q_1 Q_2^2 \quad (3)$$

$$\ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 - 2\zeta_2 \omega_2 \dot{Q}_2 + \alpha_{12} Q_1 Q_2 + \alpha_{22} Q_2^2 + \beta_{112} Q_1^2 Q_2 \quad (4)$$

其中 f_d 和 ω_d 表示激励信号的振幅和频率, α_{ij} 和 β_{ijk} 表示二次和三次非线性耦合系数, $\zeta_{i=1,2}$ 表示阻尼系数.

当激励幅值足够大时, ω_1 、 ω_2 和 ω_d 通过耦合

构成三波混频. 振幅在时域图上展现出呈周期性变化的包络. 包络的周期约为 0.384ms , 与频谱上出现的微机械频率梳的梳齿间隔 2.6kHz 相对应. 当激励幅值进一步增大时, 微机械频率梳区间被拓宽, 证明其工作带宽和激励幅值直接相关. 这项开创性的工作实现了首次基于 MEMS 谐振器的微机械频率梳的产生. 在此项工作的基础之上, Ganesan 等人还对基于参数激励的微机械频率梳进行了更深入的研究, 包括四波混频微机械频率梳^[40,41], 多模微机械频率梳共存现象^[42,43], 微机械频率梳存在条件^[44,45], 以及微机械频率梳的可调性^[46,47].

此外, Singh 等人在利用微机械频率梳控制机械非线性方面也取得了一些进展^[48]. 他们通过将氮化硅(SiN_x)和石墨烯机械谐振器耦合在一起形成强非线性响应. 通过以两种主要振动模式的谐振频率之和作为参数激励频率, 当振动响应超过阈值时, 可以在频谱上观察到微机械频率梳现象. 由于氮化硅谐振器的 Duffing 常数随器件尺寸、质量和品质因子的变化而变化, 这使得它们难以直接测量. 然而微机械频率梳的梳齿间隔和谱线强度为估计有效 Duffing 常数提供了可能, 该方法为非线性系数的量化提供了一种新的思路, 增强了对此类系统力学非线性的理解和控制.

Han 等人介绍了一种非线性多模超导电声系统, 他们利用四波混频产生微机械频率梳^[49]. 该系统由一个便于参数放大的超导衔尾蛇谐振器和一个体声波谐振器组成. 这两个谐振腔通过压电效应耦合, 其耦合强度可通过改变外加偏置磁场来调节. 这种强耦合使多模力学中的非线性相互作用成为可能, 从而通过足够的参数增益产生相干混合微机械频率梳. 该频率梳的四波混频过程随着磁场强度的增加而扩展. 每根梳齿谱线的相位明确, 证明了微机械频率梳的相干性. 这一进展为多模系统的主动控制提供了一种新的方法, 显著提高了微机械频率梳在各种应用中实现精确频率控制的潜力.

同时, Yang 等人对微机械频率梳的不对称性进行了研究^[50], Chiout 等人研究了二硫化钼通过强参数耦合引起的微机械频率梳在量子信息处理和热声信息传输方面的应用^[51], Wang 等人首次实现了不等间距的微机械频率梳, 使其具有更好的可调性^[52].

3 基于内共振的微机械频率梳

内共振在微机械频率梳的形成和控制中起着至关重要的作用. 内共振是指机械系统的两个或多个振动模式通过非线性相互作用耦合, 当不同模式的谐振频率呈现整数频率比相关时, 模式之间会有能量传递, 导致复杂的非线性动力学行为.

在 2018 年, Czaplewski 等人展示了在外部单频激励下的谐振器振幅周期性调制, 实现了基于内共振的微机械频率梳^[53]. 如图 3 所示, 他们使用两端固置的单晶硅细梁, 其前二阶振动模式分别是 $62\,973\text{Hz}$ 的面内振动模式和 $192\,960\text{Hz}$ 的面外扭转模式. 两个模式频率比约为 $1:3$, 满足发生内共振的整数频率比条件. 当振动模式被以三分之一扭转模式谐振频率的外部激励驱动且激励振幅足够时, 两个模式之间发生内共振, 引起鞍点分岔, 导致振幅的周期性调制, 调制周期约为 2s , 比激励信号的周期大 5 个数量级. 在对应的频谱上可以观测到梳齿间隔为 0.5Hz 的微机械频率梳, 与周期调制相匹配. 通过对鞍点分岔的深入研究, 他们发现该分岔是由稳定解和不稳定解共同引起的. 当极限环上不存在稳定解时, 局部时间尺度会受到影响, 导致周期性振幅调制. 当驱动频率与分岔点频率之差改变时, 微机械频率梳的梳齿间距也会随之改变, 体现出微机械频率梳的可调性. 在此研究工作的基础上, 他们还提出了一种基于连续主动反馈控制的方法, 实现对具有非线性动力学行为的复杂系统的控制, 令其振动可以到指定响应分支^[54]. 在鞍点分

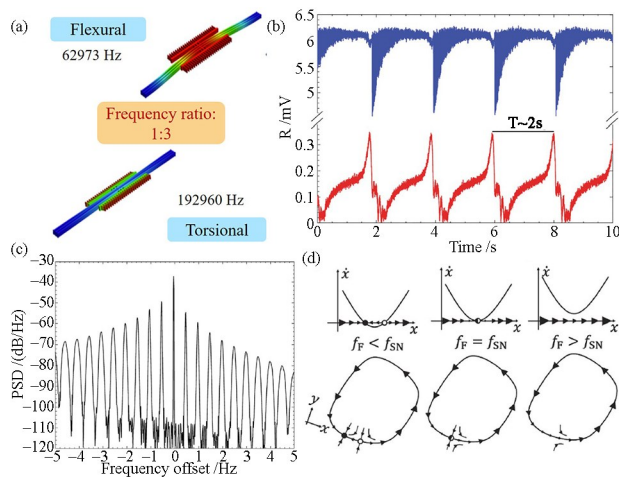


图 3 基于内共振产生的微机械频率梳:

(a) 模态仿真; (b) 时域信号; (c) 频域信号; (d) 分岔分析

Fig. 3 Micro mechanical frequency combs generated by internal resonance: (a) Modal simulation; (b) Temporal domain signal;

(c) Spectrum signal; (d) Bifurcation analysis

岔发生时,整体系统会根据激励频率的增加或减少而分岔成两个不同的分支回路.在这个特定的激励频率下,两个分支之间的随机切换是不可避免的.然而,通过在系统到达分岔点之前施加时间和幅值适当的控制脉冲信号,可以将系统的振动响应引导进所需的支路.微机械频率梳的存在能够预测和确定这些控制脉冲的最佳时间和幅值,从而促进系统控制的鲁棒性,为复杂多模系统的高级控制奠定了基础.

以下还将介绍一些其他值得关注的基于内共振的微机械频率梳.如图4(a)所示,Kubena等人使用石英谐振器形成微机械频率梳,根据其受温度变化影响产生的频漂,使得频率梳齿间距发生变化,为微机械频率梳在环境传感中的实际应用提供了机会^[55].如图4(b)所示,Wang等人提出了首个由两个谐振器组成的通过1:3内共振产生微机械频率梳的谐振系统,通过调节激励频率和耦合电压可以精确控制梳间距和频率带宽,表明微机械频率梳的可调性有了显著的进步^[56].如图4(c)所示,Gobat等人研究了基于1:2内共振的Neimark-Sacker分岔引起的微机械频率梳,研究了不同的分岔原理^[57],他们的数值模型准确地描述了谐振器振动周期和准周期状态的主要特征,为通过内共振产生微机械频率梳提供了更深入的动力学理论.如

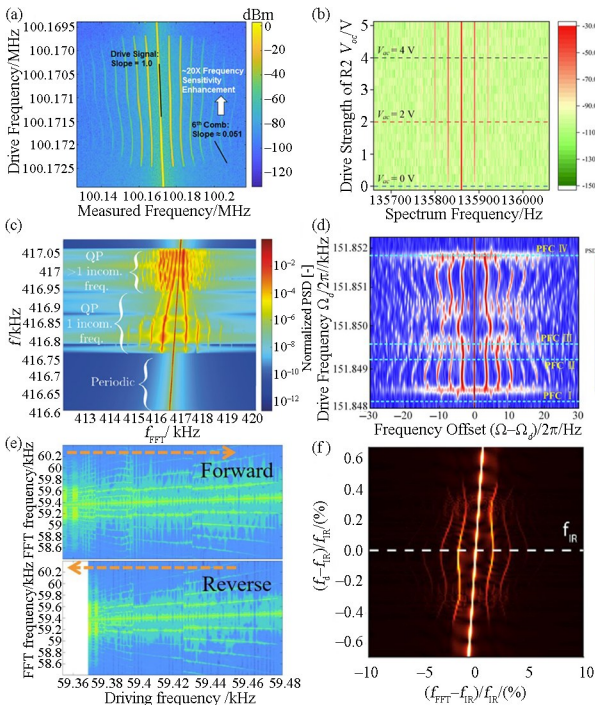


图4 多个基于内共振产生的微机械频率梳
Fig. 4 Various micro mechanical frequency combs generated by internal resonance

图4(d)所示,Sun等人对1:2内共振产生微机械频率梳的演化机制进行了全面的研究,重点关注两种振动模式之间的相干能量传递^[58],他们还对倍周期分岔区域进行了理论计算和预测.如图4(e)所示,Wu等人利用多次倍周期分岔和循环折叠分岔提出了基于1:3内共振产生的宽泛可调谐微机械频率梳,其梳齿间距的可调性跨越了一个数量级^[59].如图4(f)所示,Keskekler等人制备了石墨烯谐振器,观测到基于Neimark-Sacker分岔的共振峰的分裂,通过静电力打破薄膜面外对称性,调整谐振频率产生基于1:2内共振的微机械频率梳^[60].

4 基于碰撞效应的微机械频率梳

微机械频率梳的形成通常需要非线性动力学的参与.对于线性谐振器而言,通过碰撞效应引入非线性是形成微机械频率梳的有效途径.当物体相互碰撞时,能量会在相互作用的物体之间传递,引起周期解向准周期解的过渡^[61].

在2018年,Guerrieri等人制备了在硅片上沉积氮化铝的压电谐振器.通过谐振器的碰撞效应,他们揭示了以周期调制为特征的准周期解的出现,得到了微机械频率梳^[62].整体的实验装置如图5所示,振动结构由受外界激励驱动的梳齿电容谐振器组成.谐振器上端放置了一个由上部框架支撑的横梁.当谐振器受到较小的外界激励在竖直方向振动时,其振动响应表现为一个线性谐振器.当激励信号幅值增加到足够大时,谐振器振动碰撞到上方

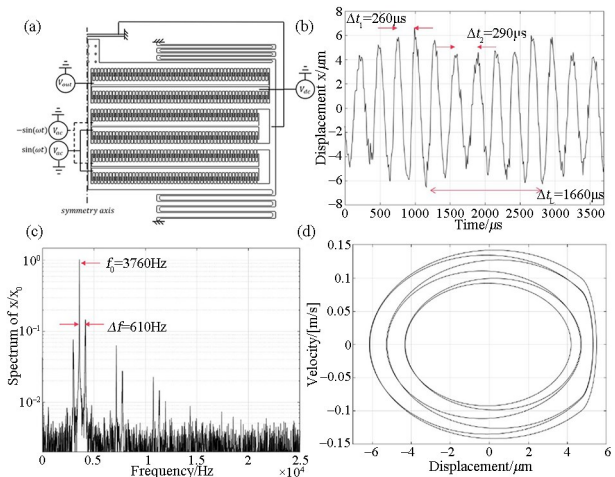


图5 基于碰撞效应产生的微机械频率梳:
(a) 谐振器结构;(b) 时域信号;(c) 频域信号;(d) 相图
Fig. 5 Micro mechanical frequency combs generated by contact and impact effect; (a) Resonator structure; (b) Temporal domain signal; (c) Spectrum signal; (d) Phase space diagram

的固置横梁,引入了强非线性,在幅频曲线上表现为刚度硬化响应。

其人为引入非线性的无量纲运动方程可用下式(5)来表示:

$$x'' + \frac{1}{Q}x' + H(x) = \beta \sin(\eta\tau) \quad (5)$$

其中 $H(x)$ 表示碰撞是否发生,可用下式(6)来表示:

$$H(x) = \begin{cases} xi & fx \leq x_0 \\ \tilde{\omega}^2 x + (1 - \tilde{\omega}^2)x_0 i & fx > x_0 \end{cases} \quad (6)$$

其中无量纲时间常数 $\tau = \omega_0 t$, $\tilde{\omega}^2$ 为刚度系数比, Q 为品质因子, $\eta = \omega/\omega_0$ 为激励频率和谐振频率比。

整体碰撞系统的耗散较低,有利于振动幅度的调制,从而产生呈包络状的时域信号响应。相邻包络之间的周期约为 $1660\mu s$,每个包络信号下包含了 6 个周期性的振动信号。通过分析对应的频谱,他们观察到梳齿间隔为 610Hz 的微机械频率梳,恰好与 $1660\mu s$ 的包络周期相对应。在相图中可以看到六个环两两一组被分成三组,对应了碰撞过程中的三次碰撞,每一次碰撞都会对谐振器振动幅值和频率产生一定的调制作用,这就解释了振动信号周期性的变化原因。通过改变外界激励信号幅值和碰撞距离等初条件,碰撞效应可以改变微机械频率梳的梳齿间隔和工作带宽。从学术角度来看,碰撞效应提供了一种简单有效的调幅和调频方法,为生成微机械频率梳提供了新的路径。然而,对于这项技术的长期稳定性和可靠性的担忧仍然存在,因为基于碰撞效应的系统在长时间内振动容易受到损坏,需要进一步的研究来解决系统寿命问题,优化系统的实际应用性能。

5 基于负耗散系统的微机械频率梳

普遍而言,谐振器振动过程中耗散为正,对于非线性器件,当振幅较大时,耗散会变得更为显著,导致能量损失增加。然而,在 Van der Pol 模型中,非线性耗散前的符号决定了耗散是增加还是减少能量。通过构造一个负耗散的系统,可以得到极限环的周期运动,并通过 Hopf 分岔引起自振荡,进一步产生微机械频率梳^[63]。

Mahboob 等人发现当高阶周期性极限环运动和混沌运动将要合并时,在频谱上会出现多根稳定的谱线响应,也就是微机械频率梳^[64]。他们的研究

中使用的谐振器有两个模态,分别称为基础模态和混合模态。通过小幅驱动基础模态并大幅泵浦驱动混合模态,他们实现了两个模态之间的耦合,其耦合强度取决于泵浦幅值。固定泵浦幅值大小 50mV_{rms} 不变,对泵浦激励频率进行扫频,可以观察到谐振器的幅频响应曲线如图 6 所示,归一化后在 $0\sim 30\text{Hz}$ 的宽带范围内由稳定振荡过渡到多稳定振荡。这一现象可归因于负耗散的条件。随后,他们进一步研究了包括泵浦振幅和泵浦频率在内的产生该多稳定振荡的条件。可以看出当泵浦幅值达到 38mV_{rms} 后,频谱上才能观测到单独的谐振峰谱线。当泵浦幅值继续增大到超过 42mV_{rms} 后,弥补了系统的本征损耗,负耗散条件被满足,这时在频谱上可以观测到多根稳定的谱线,也就是产生了微机械频率梳。继续增大泵浦幅值可以看出泵浦振幅越大,频率梳根数越多,梳齿间隔越大。另一方面,通过固定泵浦幅值为 50mV_{rms} 不变,将归一化后的泵浦频率调整到 $-15\text{Hz}\sim 35\text{Hz}$ 的范围内,可以控制微机械频率梳的梳齿间隔在 $5\text{Hz}\sim 0.5\text{Hz}$ 之间连续变化。图 6 中还展示了振荡幅度经过多个周期放大的不稳定极限环最终发展为一个具有混沌特征的极限环过程。基于负耗散技术的微机械频率梳可以显著提高谐振器的品质因子,为谐振器开辟新的应用领域。

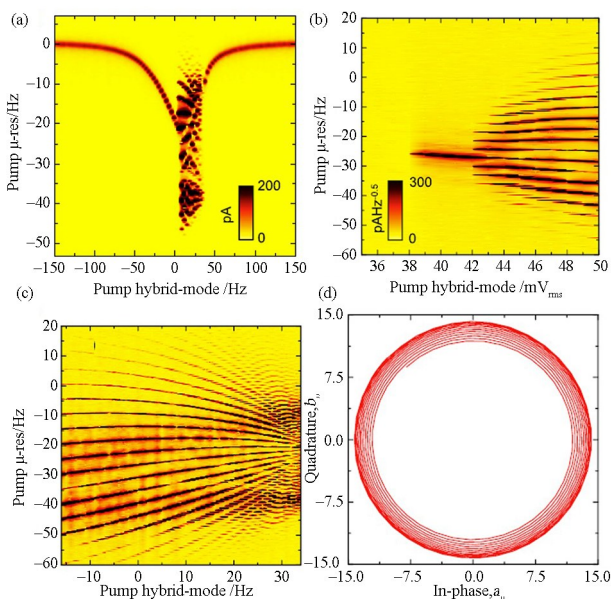


图 6 基于负耗散产生的微机械频率梳: (a) 耦合现象; (b) 频率梳随激励电压变化; (c) 频率梳随激励频率变化; (d) 相图
Fig. 6 Micro mechanical frequency combs generated by negative dissipation; (a) Modal coupling; (b) Micro mechanical frequency combs changed with driving amplitude; (c) Micro mechanical frequency combs changed with driving frequency; (d) Phase space diagram

研究人员在纳米机械系统中提出了由共振驱动引起非线性摩擦的新机制^[65], 摩擦力与驱动响应高度相关, 在一定参数范围内呈现负值. 通过改变外部激励信号的振幅和频率, 谐振器的振动从简单的正弦运动转变为明显更复杂的非正弦运动. 当受到恰当强度的激励时, 这种自持续振荡会引起以激励频率为中心的多个等间隔的峰值, 也就是微机械频率梳的产生. 这一现象发生的原因是外部激励定性地改变了谐振器响应的幅度和相位, 导致稳定振动转变为不稳定振动.

近年来对微机械频率梳的研究得到了一个普遍的结论, 即至少需要两个具有能量传递的耦合模式才能在频谱上形成频率梳这样的梳状结构. 直到2022年, 科学家 Ochs 等人利用负非线性摩擦力证明了微机械频率梳可以由单频振动模式引起^[66]. 他们在研究中使用了纳米尺度的悬空弦状谐振器, 该谐振器在-24dBm 的外界激励下表现出强烈的非线性振动响应, 如图 7 所示. 增大外界激励幅值到-3dBm 时, 可以观察到频谱上出现额外的等间隔峰, 也就是形成了微机械频率梳. 随着激励幅值的进一步增大, 频率梳梳齿线的强度显著增大, 产生的梳齿线数量也更多. 通过研究振动的相轨迹可以发现, 在激励幅值为-3dBm 时, 谐振器的振动仍然保持稳定, 相轨迹局限于一个椭圆的中心, 表明热噪声起主导作用. 当激励幅值增加到-1dBm 时, 系统振动被推入一个极限环, 表示系统的振动是自持续的. 其相轨迹偏离椭圆形状, 表明现在谐振器的负非线性摩擦在激励频率处引起了非正弦振动. 在更大的激励幅值 8dBm 处可以观察到更大且更非椭圆形的极限环, 对应了数量更多强度更大的微机械频率梳. 当激励振幅固定为 0dBm 时, 对激励频率进行调谐会使得微机械频率梳现象更为复杂. 当调谐小于-210Hz 时, 系统振动保持稳定, 在频谱上只观察到一个单独的谐振峰. 随着调谐的继续增加, 如果谐振器振动沿着刚度硬化曲线保留在大振幅的上分支上, 那么微机械频率梳开始出现, 在图 7 中用黑色数据点表示. 如果谐振器振动落在小振幅的下分支上, 那么就不会观察到微机械频率梳, 在图 7 中用紫色数据点表示. 这项基于负非线性摩擦的技术标志着使用单频振动模式引发微机械频率梳的第一个实例, 揭示了受外部激励的系统中保守和耗散非线性之间相互作用的新维度.

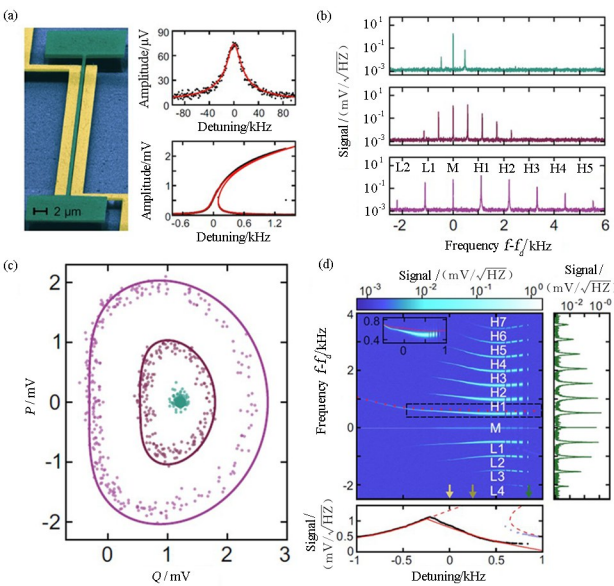


图 7 基于负非线性摩擦产生的微机械频率梳: (a) 谐振器频响曲线; (b) 频域信号; (c) 相图; (d) 频率梳随激励频率变化
Fig. 7 Micro mechanical frequency combs generated by negative nonlinear friction: (a) Amplitude-frequency curve of the resonator; (b) Spectrum signal; (c) Phase space diagram; (d) Micro mechanical frequency combs changed with driving frequency

6 其他机理形成的微机械频率梳

上述产生微机械频率梳的机理大多基于 MEMS 谐振器的非线性效应. 除了微观层面的微机械频率梳, 科学家们还研究了宏观层面的生成机理, 例如基于液体中气泡团的微机械频率梳和基于电路振荡器的微机械频率梳.

一般来说, 声学非线性要比光学非线性强得多. 尤其是在液体中, 气泡团的振荡会引起显著的声学非线性^[67]. 液体密度较大, 分子间间距很小, 导致其难以被压缩. 相反的是液体中的气泡极易被压缩, 当声波在液体中传播达到气泡时, 气泡体积会由于其易压缩性质发生明显变化, 导致局部较大的声波前变形, 从而导致初始声谱的强烈变化, 从而有效地形成微机械频率梳^[68, 69].

在 2021 年, Nguyen 等人通过实验证明在低压单频超声波的作用下, 液体中气泡团的非线性振荡产生的信号由等间隔的谐振峰组成, 从而形成微机械频率梳^[70]. 这种微机械频率梳的形成机理来自超声波与气泡团在其谐振频率下的响应的相互作用. 该项研究的整体实验设备如图 8 所示, 在薄壁不锈钢水箱中装入蒸馏脱气水, 并将谐振频率为 42.6 ± 0.3 kHz 的普通压电陶瓷圆盘换能器从外部粘接在水箱底壁上. 气泡发生器产生的气泡受浮力作用向上运动, 受到超声波的压力后形成一簇气

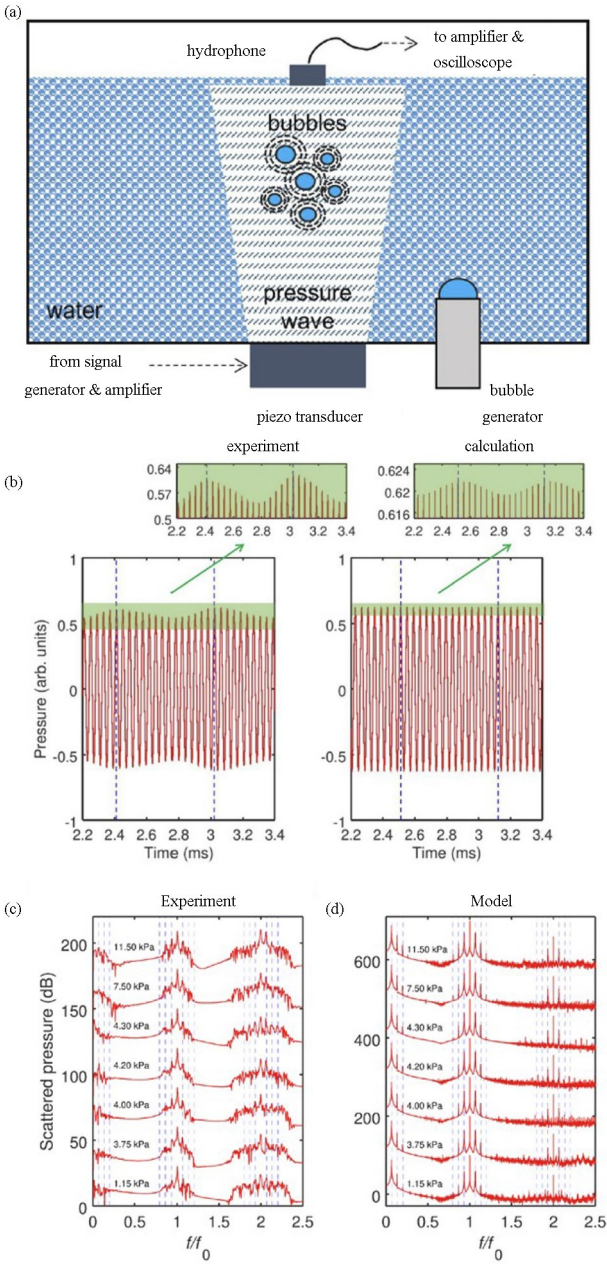


图 8 基于液体中气泡团产生的微机械频率梳:
(a) 气泡产生装置; (b) 时域信号; (c) 频域信号
Fig. 8 Micro mechanical frequency combs generated by gas bubble cluster in liquid: (a) The equipment to produce bubbles; (b) Temporal domain signal; (c) Spectrum signal

泡,通过水听器记录气泡的压力信号并对其进行分
析.通过观察时域压力信号可以看出,超声波产生的
压力和气泡自身振荡之间相互作用,导致气泡受到
的压力产生幅度调制.在频谱上可以看到,在谐波
和超谐波峰周围都出现了边带,这些边带也就是
气泡团受压产生的微机械频率梳.在后续的研究过
程中他们还发现,对于液体中由气泡组成的振荡系
统而言,更强的超声波压力可以防止气泡的碰撞和
合并,从而提高振荡的稳定性.通过降低超声波的
频率并提高其压力强度,可以获得根数更多强度更

高的微机械频率梳.这种新型的水下气泡团产生的
微机械频率梳在水下距离测量和通信领域都有其
应用空间,同时,周围的机械变形会影响气泡振荡
动力学,在测量生物组织和活性细胞的弹性特性方
面有突出作用.

在超导量子电路中,约瑟夫森结是一种无损的
非线性元件,通过嵌入电路的方式可以有效控制其
动态过程^[71].在强耦合状态下,其非线性特性在一
定的外部激励和调谐范围内可能使整体系统在相
图上没有稳定的不动点,非零激励频率的稳定性只
能以极限环的形式出现,在频谱上表现为离散的等
距梳状谱线,也就是微机械频率梳^[72,73].

在 2018 年, Khan 等人利用 LC 振荡器模拟
Kerr 振荡器的非线性系统,展示了频谱上有微机
械频率梳特征的自振荡区域^[74].电路示意图如图 9
所示,其中橙色的 LC 电路部分代表线性模态部
分,与绿色电路部分代表的非线性模态部分通过电
容实现耦合.通过调整外部激励幅值和激励频率,
他们能够识别图 9 所示的绿色阴影区域的稳定极
限环解,该解对应于不稳定的自振荡行为.图中还
揭示了微机械频率梳梳状结构产生的机理,在极
限环解区域之外,没有观察到微机械频率梳的存在.
在极限环解区域之内,系统的弱非线性确保了微机
械频率梳的生成.随着非线性的增加,极限环变宽
并最终消散,导致微机械频率梳消失.这项研究强
调了利用电路进行建模并理解非线性系统行为的

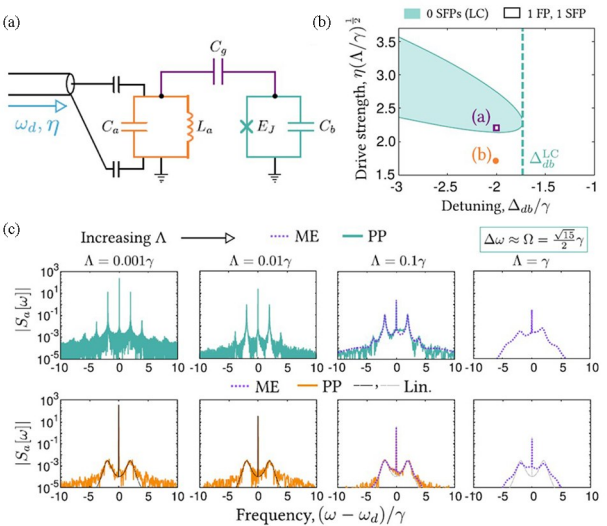


图 9 基于约瑟夫森结模拟电路产生的微机械频率梳:
(a) 电路设计; (b) 稳定性分析; (c) 电路频率梳
Fig. 9 Micro mechanical frequency combs generated by a Lumped-Element Josephson-Junction Circuit: (a) Circuit design; (b) Stability analysis; (c) Micro mechanical frequency combs based on circuits

潜力,为微机械频率梳在理论和实际应用中的进一步探索铺平了道路.

7 微机械频率梳的应用

微机械频率梳的出现代表了精密测量和信号处理领域的重大进步. 尽管微机械频率梳的研究历史相对较短,到目前为止还不到十年时间,但鉴于其高精度、低功耗和对环境变化的鲁棒性,使其成为各种应用的理想选择. 再加上新兴市场对测量精度的需求不断增长,这些优势凸显了其日益增长的重要性.

7.1 无人驾驶车辆远场定位

随着无人驾驶汽车的快速发展,市场对于精确被动定位的要求越来越高. 2024 年, Hussein 等人提出了一种新的无需电池的解决方案,用于在 GPS 无法被使用的区域内进行车辆的远场定位^[75]. 如图 10 所示,他们展示了该技术的一个应用场景,其中三个预先定位的信标将发送电信号来驱动预先嵌入在无人驾驶车辆中的谐振器芯片. 芯片接收的输入信号具有不同的功率电平,对应于信号传输距离的远近. 这种信号功率的变化生成了具有不同梳齿间距的微机械频率梳,从而起到了测距的作用. 在 -11dBm 外界激励驱动强度下的实测频谱展示了以 418MHz 为中心的微机械频率梳. 通过调节输入信号的功率,中心两条梳齿线的频率单调变化,可以用于距离传感. 这一测距原理通过一个在大厅里飞行的无人机实验得到了验证. 实验结果如图 10 所示,测量距离与实际距离具有很强

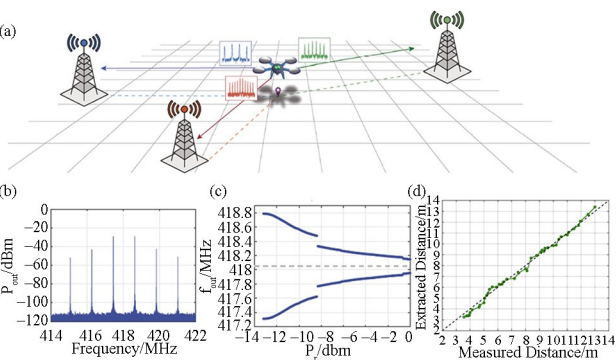


图 10 用于无人驾驶车辆远场定位的微机械频率梳:
(a) 定位场景;(b) 频率梳频谱;
(c) 频率梳间隔随激励电压变化;(d) 测距结果和实际比较
Fig. 10 Micro mechanical frequency combs used for far-field positioning for unmanned vehicles;(a) Far-field positioning application scenario;(b) Spectrum of micro mechanical frequency combs;(c) Comb spacing changes with the driving amplitude;(d) The comparison between measured distance and actual distance

的相关性,最大测量范围为 13 米,最大误差为 $\pm 57\text{cm}$. 此外,在排除无人机飞行引起的抖动误差后,对静态目标的测量误差仅为 $\pm 16\text{cm}$,超过了现有的所有无源无线定位技术. 这项远场定位技术展示了微机械频率梳在实时应用中精确测量距离的潜力,突出了它们在增强无人驾驶车辆导航和定位方面的实际用途.

7.2 水下距离精确测量

水下距离测量在定位和导航中发挥着重要作用,但现有水声系统产生的声波不具有锁相性,限制了测量精度仅为厘米级^[76,77]. 基于水声换能器的微机械频率梳的诞生可以提高其测量精度.

在 2019 年,科学家 Wu 等人提出了一种利用一系列水声换能器发射不同频段声波在水下产生微机械频率梳的创新方法^[78]. 所有声波的时域图如图 11 所示,其相对应的微机械频率梳工作带宽为 350kHz 到 399kHz . 每个声波的振动模式都以 1kHz 的梳齿间距被清楚地分辨出来. 为了验证水下测距的性能,他们应用了两个梳齿间距分别为 2kHz 和 2.3kHz 的微机械频率梳来测量距离. 如图 11 所示,可以清晰地观察到双梳信号的检测波形. 第一个脉冲序列的周期为 0.5ms ,而第二个脉冲序列的周期为 0.435ms ,两者都与它们对应的梳齿间距一致. 此外,在图中可以明显看到 3.33ms 的更大周期,这代表了一个更宽的测量范围. 通过调整接收换能器的位置,可以清晰地观察到不同频段两个重复频率,使得水下距离测量达到了 7m . 该技术利用双微机械频率梳的技术特点,为水下距离测量、导航和定位提供指导.

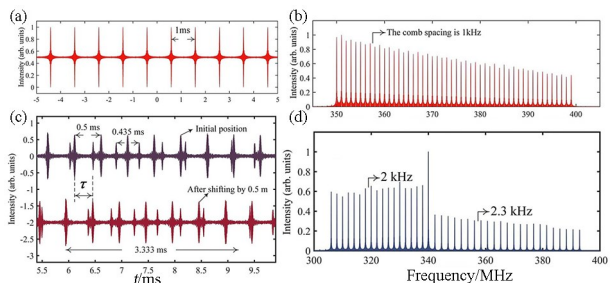


图 11 用于水下距离精确测量的微机械频率梳:(a) 时域信号;
(b) 频域信号;(c) 双频梳时域信号;(d) 双频数频域信号
Fig. 11 Micro mechanical frequency combs used for precise underwater distance measurement;(a) Temporal domain signal;(b) Spectrum signal;(c) Temporal domain signal of dual micro mechanical frequency combs;(d) Spectrum signal of dual micro mechanical frequency combs

7.3 真随机数生成器

在密码学领域,对真随机数的生成机制有很高的要求^[79,80]. 现有计算机生成的随机数大多是伪随机数,但可以通过热噪声驱动微机械频率梳的模式切换来生成真随机数.

在 2024 年,Chen 等人使用二自由度谐振器通过两种振动态之间的内共振耦合形成微机械频率梳^[81]. 如图 12 所示,通过精确控制谐振器在分岔边界处受到的激励频率,他们在谐振器中引起了器件的随机振动. 当激励频率低于分岔阈值时,频谱上只出现一个谐振峰,将这种情况记为“0”. 然而,当激励频率超过这个阈值时,器件振动模态间会发生内共振,导致频谱上出现微机械频率梳的特征,他们将这种情况记为“1”. 分岔边界处的激励频率切换是由谐振腔的热噪声驱动的,也就是说这是一个真正的随机事件. 随着时间的推移,通过连续激励和测量谐振器的振动,周期和准周期响应支路之间的随机跃迁形成了真随机数位序列. 他们通过微机械频率梳生成的随机数序列通过了 NIST 800-22 测试,验证了基于微机械频率梳的真随机数

生成器的有效性. 通过优化谐振器和数据采集设备,它可以满足各种恶劣环境下的硬件加密需求,克服了航空航天等领域的局限性.

8 结论

本文对微机械频率梳的起源、数值仿真、多种形成机理及已有的应用研究进行了综述. 光学频率梳是目前为止测量时间、频率等物理量最精确的工具. 微机械频率梳的出现为搭建小型化、低功耗、集成化的测试系统提供了可能. 尽管对微机械频率梳的研究还处于起步阶段,但它的研究价值和应用潜力是巨大的.

虽然微机械频率梳和光学频率梳的工作原理类似,但是两种技术之间存在一定的差异,这主要源于机械波和光波不同的工作频率以及模态耦合之间不同的相互作用. 在研究这些有关微机械频率梳的物理机制方面提出了许多挑战.

此外,从目前文献检索的内容来看,尽管微机械频率梳的形成原理有多种方式,但其工作带宽通常比光学频率梳要更窄,生成的梳齿根数要更少,未来需要研究特殊的技术来拓宽其工作频谱宽度. 对于一些实际应用来说,微机械频率梳的长期稳定性也是重要的考核指标,但对其调控和自锁频原理尚还缺失详细的研究. 同时,在微机械频率梳领域尚无有关孤子态下的消相差方法的探究.

综上所述,微机械频率梳这一研究领域正在迅速发展,其技术水平已接近进入科学和商业应用领域. 只有将拓宽工作带宽和长期稳定性的研究联合起来讨论,才能促进微机械频率梳的全面发展,拥有媲美光学频率梳的能力.

参考文献

[1] HALL J L. Nobel Lecture: defining and measuring optical frequencies [J]. Reviews of Modern Physics, 2006, 78(4): 1279–1295.

[2] HÄNSCH T W. Nobel Lecture: passion for precision [J]. Reviews of Modern Physics, 2006, 78(4): 1297–1309.

[3] DIDDAMS S A, VAHALA K, UDEM T. Optical frequency combs: Coherently uniting the electromagnetic spectrum [J]. Science, 2020, 369(6501):

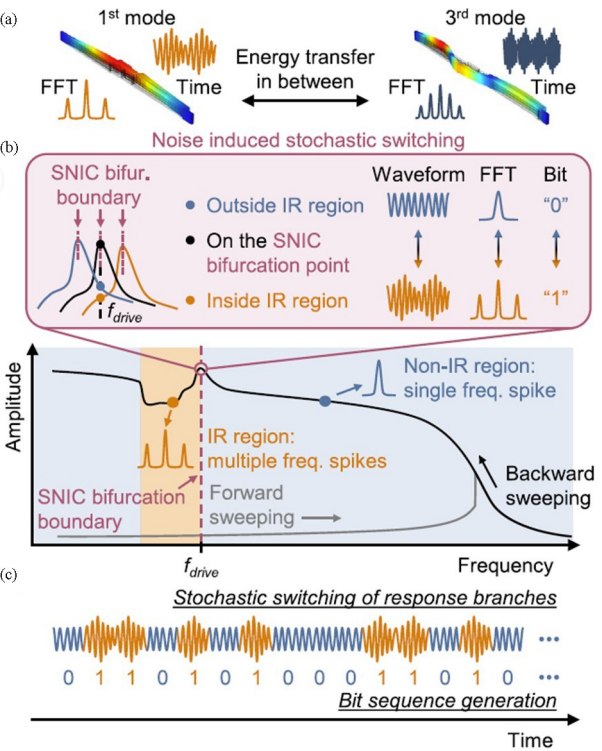


图 12 用于真随机数生成的微机械频率梳:(a)模态耦合示意图;(b)热噪声驱动激励频率进出内共振区;(c)真随机序列

Fig. 12 Micro mechanical frequency combs used for true random number generation:(a) Modal coupling diagram;(b) Switch inside and outside internal resonance region by thermal noise;(c) True stochastic bit sequence generation

- eaay3676.
- [4] FORTIER T, BAUMANN E. 20 years of developments in optical frequency comb technology and applications [J]. *Communications Physics*, 2019, 2: 153.
 - [5] JONES D J, DIDDAMS S A, RANKA J K, et al. Carrier-envelope phase control of femtosecond mode-locked lasers and direct optical frequency synthesis [J]. *Science*, 2000, 288(5466): 635–640.
 - [6] UDEM T, HOLZWARTH R, HÄNSCH T W. Optical frequency metrology [J]. *Nature*, 2002, 416: 233–237.
 - [7] DIDDAMS S A, JONES D J, YE J, et al. Direct link between microwave and optical frequencies with a 300 THz femtosecond laser comb [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(22): 5102–5105.
 - [8] REICHERT J, NIERING M, HOLZWARTH R, et al. Phase coherent vacuum-ultraviolet to radio frequency comparison with a mode-locked laser [J]. *Physical Review Letters*, 2000, 84(15): 3232–3235.
 - [9] MCGREW W F, ZHANG X, FASANO R J, et al. Atomic clock performance enabling geodesy below the centimetre level [J]. *Nature*, 2018, 564: 87–90.
 - [10] KIM J, COX J A, CHEN J, et al. Drift-free femtosecond timing synchronization of remote optical and microwave sources [J]. *Nature Photonics*, 2008, 2: 733–736.
 - [11] SCHULZ S, GRGURAŠ I, BEHRENS C, et al. Femtosecond all-optical synchronization of an X-ray free-electron laser [J]. *Nature Communications*, 2015, 6: 5938.
 - [12] DIDDAMS S A, UDEM T, BERGQUIST J C, et al. An optical clock based on a single trapped 199Hg^+ ion [J]. *Science*, 2001, 293(5531): 825–828.
 - [13] NEWMAN Z L, MAURICE V, DRAKE T, et al. Architecture for the photonic integration of an optical atomic clock [J]. *Optica*, 2019, 6(5): 680.
 - [14] KELLER U. Recent developments in compact ultrafast lasers [J]. *Nature*, 2003, 424: 831–838.
 - [15] MURPHY M T, UDEM T, HOLZWARTH R, et al. High-precision wavelength calibration of astronomical spectrographs with laser frequency combs [J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2007, 380(2): 839–847.
 - [16] GAETA A L, LIPSON M, KIPPENBERG T J. Photonic-chip-based frequency combs [J]. *Nature Photonics*, 2019, 13: 158–169.
 - [17] SPENCER D T, DRAKE T, BRILES T C, et al. An optical-frequency synthesizer using integrated photonics [J]. *Nature*, 2018, 557: 81–85.
 - [18] RIEMENSBERGER J, LUKASHCHUK A, KARPOV M, et al. Massively parallel coherent laser ranging using a soliton microcomb [J]. *Nature*, 2020, 581: 164–170.
 - [19] WANG B C, MORGAN J S, SUN K Y, et al. Towards high-power, high-coherence, integrated photonic mmWave platform with microcavity solitons [J]. *Light: Science & Applications*, 2021, 10: 4.
 - [20] FELDMANN J, YOUNGBLOOD N, KARPOV M, et al. Parallel convolutional processing using an integrated photonic tensor core [J]. *Nature*, 2021, 589: 52–58.
 - [21] XU X Y, TAN M X, CORCORAN B, et al. 11 TOPS photonic convolutional accelerator for optical neural networks [J]. *Nature*, 2021, 589: 44–51.
 - [22] CHANG L, LIU S T, BOWERS J E. Integrated optical frequency comb technologies [J]. *Nature Photonics*, 2022, 16: 95–108.
 - [23] CARLSON D R, HICKSTEIN D D, LIND A, et al. Photonic-chip supercontinuum with tailored spectra for counting optical frequencies [J]. *Physical Review Applied*, 2017, 8(1): 014027.
 - [24] KIPPENBERG T J, HOLZWARTH R, DIDDAMS S A. Microresonator-based optical frequency combs [J]. *Science*, 2011, 332(6029): 555–559.
 - [25] SAVCHENKOV A A, MATSKO A B, ILCHENKO V S, et al. Tunable optical frequency comb with a crystalline whispering gallery mode resonator [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(9): 093902.
 - [26] GRUDININ I S, HUET V, YU N, et al. High-contrast Kerr frequency combs [J]. *Optica*, 2017, 4(4): 434.
 - [27] BRAJE D, HOLLBERG L, DIDDAMS S. Brillouin-enhanced hyperparametric generation of an optical frequency comb in a monolithic highly nonlinear fiber cavity pumped by a cw laser [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(19): 193902.
 - [28] LEVY J S, GONDARENKO A, FOSTER M A, et al. CMOS-compatible multiple-wavelength oscillator for on-chip optical interconnects [J]. *Nature Photonics*, 2010, 4: 37–40.
 - [29] FERDOUS F, MIAO H X, LEAIRD D E, et al.

- Spectral line-by-line pulse shaping of on-chip microresonator frequency combs [J]. *Nature Photonics*, 2011, 5: 770—776.
- [30] RAZZARI L, DUCHESNE D, FERRERA M, et al. CMOS-compatible integrated optical hyper-parametric oscillator [J]. *Nature Photonics*, 2010, 4: 41—45.
- [31] DEL'HAYE P, SCHLIESSER A, ARCIZET O, et al. Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator [J]. *Nature*, 2007, 450: 1214—1217.
- [32] DEL'HAYE P, ARCIZET O, SCHLIESSER A, et al. Full stabilization of a microresonator-based optical frequency comb [J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(5): 053903.
- [33] JOHNSON A R, OKAWACHI Y, LEVY J S, et al. Chip-based frequency combs with sub-100 GHz repetition rates [J]. *Optics Letters*, 2012, 37(5): 875—877.
- [34] DEL'HAYE P, BEHA K, PAPP S B, et al. Self-injection locking and phase-locked states in microresonator-based optical frequency combs [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(4): 043905.
- [35] BEKKER C, KALRA R, BAKER C, et al. Injection locking of an electro-optomechanical device [J]. *Optica*, 2017, 4(10): 1196.
- [36] ARREGUI G, COLOMBANO M F, MAIRE J, et al. Injection locking in an optomechanical coherent phonon source [J]. *Nanophotonics*, 2021, 10(4): 1319—1327.
- [37] WANG Y, ZHANG M, SHEN Z, et al. Optomechanical frequency comb based on multiple nonlinear dynamics [J]. *Physical Review Letters*, 2024, 132(16): 163603.
- [38] CAO L S, QI D X, PENG R W, et al. Phononic frequency combs through nonlinear resonances [J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(7): 075505.
- [39] GANESAN A, DO C, SESHIA A. Phononic frequency comb via intrinsic three-wave mixing [J]. *Physical Review Letters*, 2017, 118(3): 033903.
- [40] GANESAN A, DO C, SESHIA A. Frequency transitions in phononic four-wave mixing [J]. *Applied Physics Letters*, 2017, 111(6): 064101.
- [41] GANESAN A, DO C, SESHIA A. Excitation of coupled phononic frequency combs via two-mode parametric three-wave mixing [J]. *Physical Review B*, 2018, 97(1): 014302.
- [42] GANESAN A, SESHIA A. Coexistence of multiple multimode nonlinear mixing regimes in a microelectromechanical device [J]. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(8): 084102.
- [43] GANESAN A, DO C, SESHIA A. Phononic frequency comb via three-mode parametric resonance [J]. *Applied Physics Letters*, 2018, 112(2): 021906.
- [44] QI Z, MENYUK C R, GORMAN J J, et al. Existence conditions for phononic frequency combs [J]. *Applied Physics Letters*, 2020, 117(18): 183503.
- [45] GANESAN A, DO C, SESHIA A. Observation of phononic frequency combs in a micromechanical resonator [C]//2017 Joint Conference of the European Frequency and Time Forum and IEEE International Frequency Control Symposium (EFTF/IFCS). New York: IEEE, 2017: 148—152.
- [46] PARK M, ANSARI A. Formation, evolution, and tuning of frequency combs in microelectromechanical resonators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2019, 28(3): 429—431.
- [47] GANESAN A, SESHIA A. Evidence for simultaneous growth and saturation mechanisms in phononic frequency combs [C]//2019 Joint Conference of the IEEE International Frequency Control Symposium and European Frequency and Time Forum (EFTF/IFC). New York: IEEE, 2019: 1—3.
- [48] SINGH R, SARKAR A, GURIA C, et al. Giant tunable mechanical nonlinearity in graphene-silicon nitride hybrid resonator [J]. *Nano Letters*, 2020, 20(6): 4659—4666.
- [49] HAN X, ZOU C L, FU W, et al. Superconducting cavity electromechanics: the realization of an acoustic frequency comb at microwave frequencies [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 129(10): 107701.
- [50] YANG Q Q, WANG X F, HUAN R H, et al. Asymmetric phononic frequency comb in a rhombic micromechanical resonator [J]. *Applied Physics Letters*, 2021, 118(22): 223502.
- [51] CHIOUT A, CORREIA F, ZHAO M Q, et al. Multi-order phononic frequency comb generation within a MoS₂ electromechanical resonator [J]. *Applied Physics Letters*, 2021, 119(17): 173102.
- [52] WANG X F, YANG Q Q, SHI Z, et al. Frequency comb in a parametrically modulated micro-resonator [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2022, 38(10): 521596.

- [53] CZAPLEWSKI D A, CHEN C Y, LOPEZ D, et al. Bifurcation generated mechanical frequency comb [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(24): 244302.
- [54] ERIKSSON A M, SHOSHANI O, LÓPEZ D, et al. Controllable branching of robust response patterns in nonlinear mechanical resonators [J]. *Nature Communications*, 2023, 14: 161.
- [55] KUBENA R L, WALL W S, KOEHL J, et al. Phononic comb generation in high-Q quartz resonators [J]. *Applied Physics Letters*, 2020, 116(5): 053501.
- [56] WANG X F, YANG Q Q, HUAN R H, et al. Frequency comb in 1 : 3 internal resonance of coupled micromechanical resonators [J]. *Applied Physics Letters*, 2022, 120(17): 173506.
- [57] GOBAT G, ZEGA V, FEDELI P, et al. Frequency combs in a MEMS resonator featuring 1 : 2 internal resonance; ab initio reduced order modelling and experimental validation [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2023, 111(4): 2991—3017.
- [58] SUN J K, YU S, ZHANG H M, et al. Generation and evolution of phononic frequency combs via coherent energy transfer between mechanical modes [J]. *Physical Review Applied*, 2023, 19: 014031.
- [59] WU J H, SONG P H, ZANG S K, et al. Widely-tunable MEMS phononic frequency combs by multi-stage bifurcations under a single-tone excitation [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2024, 33(3): 384—394.
- [60] KEŞKEKLER A, ARJMANDI-TASH H, STEENEKEN P G, et al. Symmetry-breaking-induced frequency combs in graphene resonators [J]. *Nano Letters*, 2022, 22(15): 6048—6054.
- [61] LIN T, LI W C, REN Z Y. The micromechanical resonant switch (“resoswitch”) [C]//Solid-State Sensors, Actuators, and Microsystems Workshop. [S.l: s.n], 2008.
- [62] GUERRIERI A, FRANGI A, FALORNI L. An investigation on the effects of contact in MEMS oscillators [J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2018, 27(6): 963—972.
- [63] BAKEMEIER L, ALVERMANN A, FEHSKE H. Route to chaos in optomechanics [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114(1): 013601.
- [64] MAHBOOB I, DUPUY R, NISHIGUCHI K, et al. Hopf and period-doubling bifurcations in an electromechanical resonator [J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 109(7): 073101.
- [65] DYKMAN M I, RASTELLI G, ROUKES M L, et al. Resonantly induced friction and frequency combs in driven nanomechanical systems [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 122(25): 254301.
- [66] OCHS J S, BONEBD K J, RASTELLI G, et al. Frequency comb from a single driven nonlinear nanomechanical mode [J]. *Physical Review X*, 2022, 12(4): 041019.
- [67] SUSLOV S A, OOI A, MANASSEH R. Nonlinear dynamic behavior of microscopic bubbles near a rigid wall [J]. *Physical Review E*, 2012, 85(6): 066309.
- [68] RUDENKO O V. Giant nonlinearities in structurally inhomogeneous media and the fundamentals of nonlinear acoustic diagnostic techniques [J]. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, 2006, 176(1): 77.
- [69] MAKSYMOW I S, GREENTREE A D. Coupling light and sound: giant nonlinearities from oscillating bubbles and droplets [J]. *Nanophotonics*, 2019, 8(3): 367—390.
- [70] NGUYEN B Q H, MAKSYMOW I S, SUSLOV S A. Acoustic frequency combs using gas bubble cluster oscillations in liquids: a proof of concept [J]. *Scientific Reports*, 2021, 11: 38.
- [71] DEVORET M H, SCHOELKOPF R J. Superconducting circuits for quantum information: an outlook [J]. *Science*, 2013, 339(6124): 1169—1174.
- [72] REED M D, DICARLO L, JOHNSON B R, et al. High-fidelity readout in circuit quantum electrodynamics using the Jaynes-Cummings nonlinearity [J]. *Physical Review Letters*, 2010, 105(17): 173601.
- [73] SUNDARESAN N M, LIU Y B, SADRI D, et al. Beyond strong coupling in a multimode cavity [J]. *Physical Review X*, 2015, 5(2): 021035.
- [74] KHAN S, TÜRECI H E. Frequency combs in a lumped-element josephson-junction circuit [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 120(15): 153601.
- [75] HUSSEIN H M E, KIM S, RINALDI M, et al. Passive frequency comb generation at radiofrequency for ranging applications [J]. *Nature Communications*, 2024, 15: 2844.
- [76] MCCAULEY R D, DAY R D, SWADLING K M, et al. Widely used marine seismic survey air Gun operations negatively impact zooplankton [J]. *Nature Ecology & Evolution*, 2017, 1: 195.

[77] MACKINTOSH A N, ANDERSON B M, LORREY A M, et al. Regional cooling caused recent New Zealand glacier advances in a period of global warming [J]. Nature Communications, 2017, 8: 14202.

[78] WU H Z, QIAN Z W, ZHANG H Y, et al. Precise underwater distance measurement by dual acoustic frequency combs [J]. Annalen Der Physik, 2019, 531(9): 1900283.

[79] HUANG C Y, SHEN W C, TSENG Y H, et al. A contact-resistive random-access-memory-based true random number generator [J]. IEEE Electron Device Letters, 2012, 33(8): 1108—1110.

[80] KIM M, HA U, LEE K J, et al. A 82-nW chaotic map true random number generator based on a sub-ranging SAR ADC [J]. IEEE Journal of Solid-State Circuits, 2017, 52(7): 1953—1965.

[81] CHEN T Y, LI W C. True random number generation in nonlinear internal-resonating MEMS resonators [J]. IEEE Electron Device Letters, 2024, 45(1): 116—119.