

热环境下功能梯度梁力学特性分析

徐华栋 沈俊 李锋[†] 孙云厚 梅勇 赵雨 黄李杰

(中国人民解放军军事科学院 国防工程研究院, 北京 100850)

摘要 为探究轴向功能梯度梁在热环境下部分力学特性,利用 Gauss-Lobatto 节点与 Chebyshev 多项式建立功能梯度梁的轴向变形场,通过 Chebyshev 谱方法和 Lagrange 方程推导其轴向变形场在热环境下的离散控制方程,结合投影矩阵法对模型施加边界条件,并利用均匀 Timoshenko 材料的对比结果进行辅助验证,分析得到系统固有频率在不同温度场、材料梯度指数、固支条件的变化情况,同时研究了结构的热屈曲温度.结果表明:在相同条件下,系统的各阶固有频率随着温度的升高呈下降趋势,且一阶频率的减小幅度最大,四阶固有频率减小幅度最小;悬臂梁的固有频率变化趋势与材料软化趋势相同,且三阶频率减小幅度较一二阶频率更明显;通过调节材料梯度指数可以优化结构的各阶固有频率;随着材料梯度指数的增大,材料的热屈曲温度不断提高,但对于不同的功能梯度材料,表现出不同的热屈曲温度变化趋势.本文研究可为功能梯度材料的研究与工程应用提供支撑.

关键词 动力学特性, 模型离散, 功能梯度材料, 热环境, 有限元

中图分类号:O326;TB33

文献标志码:A

Mechanical Characteristics Analysis of Functional Graded Beams in Thermal Environment

Xu Huadong Shen Jun Li Feng[†] Sun Yunhou Mei Yong Zhao Yu Huang Lijie

(Defense Engineering Institute, Academy of Sciences of Chinese People's Liberation Army, Beijing 100850, China)

Abstract In order to explore the partial mechanical properties of functionally graded beams under thermal conditions, the axial deformation field of functionally graded beams was established by using Gauss-Lobatto node and Chebyshev polynomial. The discrete governing equation of the axial deformation field under thermal conditions was derived by Chebyshev spectrum method and Lagrange equation. By applying boundary conditions to the model with projection matrix method and using the comparison results of uniform Timoshenko materials for auxiliary verification, the changes of the natural frequency of the system under different temperature fields, material gradient index and anchorage conditions were analyzed. At the same time, the thermal buckling temperature of the structure was studied. The results show that under the same conditions, the natural frequencies of each order of the system decrease with the increase of temperature, and the first-order frequency decreases the most. The fourth order natural frequency decreases the least. The variation trend of natural frequency of cantilever beam is the same as that of material softening, and the decrease of the third-order frequency is more obvious than that of the first-order frequency. The natural frequencies of each order of the structure can be optimized by adjusting the material gradient index. With the increase of material gradient index, the thermal buckling temperature of

the material increases continuously, but for different functionally graded materials, the thermal buckling temperature changes show different trends. This study can provide support for the research and engineering application of functionally graded materials.

Key words dynamic characteristics, model dispersion, functionally gradient materials, thermal environment, finite element method

引言

功能梯度材料(FGMs)是一种部分物理特性(如密度、材料成分)沿厚度或轴向表现出阶梯变化的非均匀新型复合材料.FGMs区别于传统型复合材料,具有高刚度、热抗性^[1,2]等相关特殊属性;且FGMs可针对性地对各组成成分进行设计,改变材料属性,从而改变各成分组成的空间规律,进一步达到优化结构内部应力分布的目的^[3].功能梯度材料因其特殊属性,在高温环境下具有更优越性能,相较于常规复合材料,具有解决诸多关键问题的潜力.因此,目前在航空航天、核反应堆等特殊领域有着相对广泛的应用,并且引起国内外大量学者对其展开诸多分析与研究.

对于功能梯度梁,其材料属性通常沿厚度方向或轴向^[4]变化,目前主要采用微分求积法(Differential quadrature method, DQM)^[5]、Rayleigh-Ritz法^[6]、有限元方法和微分变化单元法(Differential transform element method, DTEM)^[7,8]、差分变换方法、低阶微分求积单元法^[9-11]及无网格法^[12]等方法对常温环境下沿轴向或厚度方向梯度变化的功能梯度 Euler-Bernoulli 梁及 Timoshenko 梁动力学特性进行了相关分析.赵阳、黄意新等^[13-15]使用 Chebyshev 谱方法对常温环境中均匀材料及功能梯度材料 Timoshenko 梁的动力学特性进行了研究,同时验证了该方法的正确性以及快速收敛性.

目前对于热环境下的功能梯度梁也进行了部分研究,李世荣等^[16]基于 Euler-Bernoulli 梁理论以及几何非线性理论,推导出在热载荷下,功能梯度材料梁材料属性沿厚度方向梯度变化的系统动力学方程;研究了在温度场影响下沿厚度方向材料梯度指数变化的功能梯度 Euler-Bernoulli 梁的热屈曲和振动特性.黄小林等^[17]结合广义 Kármán 型方程,采用双重 Fourier 级数展开法求解分析四边简支功能梯度材料板沿厚度方向的材料组分指

数和热环境对固有频率的影响.石先杰等^[18]利用边界弹簧技术施加约束条件,研究在热环境条件下功能梯度圆柱薄壳结构的振动特性,给出了幂律指数、边界势能、温度变化值对振动特性的影响规律.姚熊亮等^[19]基于经典壳体理论,推导了热环境下,流场中功能梯度圆柱壳的受迫振动方程,研究了不同温度分布方式、壳体材料参数以及周围流场参数对功能梯度圆柱壳声辐射特性的影响.朱江辉等^[20]基于 Reddy 的 3 阶剪切变形理论以及 Ven-Karman 理论建立出功能梯度材料板的非线性振动方程,得到了横向激励和热作用下板的共振和幅频响应方程.吴晓等^[21]基于弹性理论建立功能梯度板的静力方程,计算求证出中性面位置对圆板的非线性振动及屈曲有影响.毛丽娟和马连生等^[22]针对热环境下材料属性沿厚度变化的功能梯度梁的动力学特性问题进行了研究.高峰^[23]使用一阶非线性经典板(梁)理论以及物理中面的概念,建立出沿厚度方向变化的功能梯度材料梁和圆板系统动力学方程;采用解析法及打靶法对热载荷作用下功能梯度材料梁及圆板的静态响应进行了研究.Trinh 等^[24]基于线性应变位移,利用 Hamilton 方程,对热环境下功能梯度梁的振动及热屈曲特性进行了研究,分析了材料梯度指数、温度分布、长细比等参数对动力学特性的影响.

综上所述,目前针对功能梯度梁的研究成果主要是针对常温下沿厚度或轴向梯度变化的结构,包括板、梁壳等多种形状梯度材料,但关于梁结构在热环境条件下的轴向梯度变化的研究尚不多见.因此本文利用 Gauss-Lobatto 节点与 Chebyshev 多项式建立功能梯度梁在轴向上的理论模型,通过 Lagrange 方程推导其轴向变形场在热环境下的离散控制方程,结合投影矩阵法对模型施加边界条件,然后利用均匀 Timoshenko 材料的对比结果辅助验证,从而分析功能梯度梁在热环境中轴向上的部分特性,并且得到系统固有频率在不同温度场、材料梯度指数、固支条件的变化情况,同时研究了

结构的热屈曲温度。

1 动力学建模及离散化

1.1 系统动能与势能

如图1所示的轴向功能梯度梁,其长度为 l ,梁的材料属性沿其轴向连续变化,包括剪切模量 G 、横截面积 A ,梁的横截面中性轴的面积转动惯量 I 、弹性模量 E 以及密度 ρ (参数均为轴向坐标的函数)。

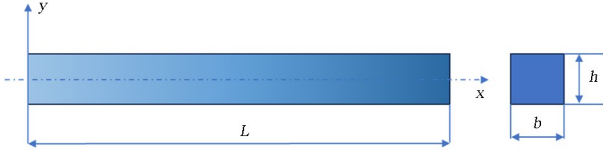


图1 轴向功能梯度梁
Fig. 1 An axially FGM beam

基于 Timoshenko 梁理论,考虑剪切变形和转动惯量对于热环境条件下的 Timoshenko 梁的影响,根据文献[8]和本文所研究的对象,可得其轴向应变可表示为:

$$\epsilon_x = -y \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \theta \Delta T \quad (1)$$

梁的横向位移 ν 、剪切角 γ 和转角 α 之间的相互关系为:

$$\frac{\partial \nu(x, t)}{\partial x} = \alpha(x, t) + \gamma(x, t) \quad (2)$$

根据文献[25]可得 Timoshenko 梁的动能为:

$$P = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho I \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3)$$

势能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(-y \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \theta \Delta T \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \kappa GA \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} - \alpha \right)^2 dx \quad (4)$$

其中:

ν —梁在轴向位置 x 和时间 t 的横向振动位移;

κ —梁的截面剪切系数,不同截面形状取值不同。

Lagrangian 函数 $L = T - U$ 为

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho A \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^l \left[EI \left(-y \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \theta \Delta T \right)^2 + \kappa GA \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} - \alpha \right)^2 \right] dx \quad (5)$$

1.2 离散动力学方程

利用文献[11]中的改进 Chebyshev 谱方法对轴向功能梯度梁在热环境条件下的变形场进行离散,然后根据第二类 Lagrange 方程推导系统动力学方程。

根据 Chebyshev 谱方法,对于任意在定义域 $x \in [-1, 1]$ 上连续可导且平方可积的函数 $y(x)$,可利用切比雪夫多项式进行逼近

$$y_N(x) \approx \sum_{k=0}^{N-1} a_k P_k(x) \quad (6)$$

式中 N 为采用的多项式项数, $T_k(x)$ 为第 k 项切比雪夫多项式。基于下述式(5)的函数公式逼近方法,函数 $y(x)$ 在 Gauss-Lobatto 节点上的值均为已知时,可以根据已知节点值得到函数在 n 阶的导数逼近

$$\mathbf{y}^{(n)} = \mathbf{F}_B \mathbf{D}^{(n)} \mathbf{F}_B^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{Q}_n \mathbf{y} \quad (7)$$

式中 $\mathbf{Q}_n$ 为 n 阶 Chebyshev 微分矩阵。此外,对于两个连续可导且平方可积的函数 $g(x)$ 和 $f(x)$,其定义域为 $[l_1, l_2]$,这两个函数的内积可表示为

$$\int_{l_1}^{l_2} f(x) g(x) dx = \mathbf{f}^T \mathbf{V} \mathbf{g} \quad (8)$$

式中 $\mathbf{V}$ 为 $N \times N$ 阶 Chebyshev 内积矩阵, $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 分别为函数 $f(x)$ 和 $g(s)$ 的 Gauss-Lobatto 节点值列向量。此外,函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 关于函数 $h(x)$ 的加权内积可表示为

$$\int_{l_1}^{l_2} f(x) g(x) h(x) dx = \mathbf{f}^T \mathbf{V}_h \mathbf{g} \quad (9)$$

式中 $\mathbf{V}_h$ 是关于函数 $h(x)$ 的 $N \times N$ 阶 Chebyshev 加权内积对角矩阵,令

$$\begin{aligned} f(x) &= E(x) I(x), g(x) = \kappa G(x) A(x), \\ m(x) &= \rho(x) A(x), s(x) = \rho(x) I(x). \end{aligned} \quad (10)$$

结合式(7)和式(9),可将式(3)中动能和式(4)中的势能表示为:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{V}_f \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\alpha} - 2\theta \Delta T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{V}_g \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\alpha}) + \\ &\quad \frac{1}{2} (\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{V}_g \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\nu} - 2\boldsymbol{\nu}^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{V}_g \mathbf{Q}_1 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{V}_g \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$P = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\nu}}^T \mathbf{Q}_1^T \mathbf{V}_m \dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{V}_s \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \quad (12)$$

式中: $\boldsymbol{\nu}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 分别代表位移 ν 和转角 α 在 N 个 Gauss-Lobatto 节点上的值, $\mathbf{V}_f$ 、 $\mathbf{V}_g$ 、 $\mathbf{V}_m$ 和 $\mathbf{V}_s$ 分别

代表关于函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 、 $m(x)$ 和 $s(x)$ 的加权内积.

考虑式(11)和式(12),利用拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

(13)

由上述可以得到未限定边界条件的轴向功能梯度 Timoshenko 梁自由振动的离散控制方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}$$

(14)

式中:

$$\boldsymbol{q}=\begin{bmatrix} \nu \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \rho AV_m & \\ & \rho IV_s \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{K}_T=\begin{bmatrix} \kappa GA\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{V}_g\boldsymbol{Q}_1-F_T\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{V}_g\boldsymbol{Q}_1 & -\kappa GA\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{V}_g \\ -\kappa GAV_g^T\boldsymbol{Q}_1 & EI\boldsymbol{Q}_1^T\boldsymbol{V}_f\boldsymbol{Q}_1+\kappa GAV_g^T \end{bmatrix}$$

(15)

式(15)中 F_T 为结构的热内力,对于均匀材料 $F_T=\theta\Delta TE_TA$. 对于功能梯度材料公式中 θ , E_T 是取采样点处的热膨胀系数及材料弹性模量,将热内力施加在采样点处. 在此基础之上,通过投影矩阵法对上述所得出的离散系统施加各类边界条件^[26],以便在后续过程中可快速计算不同边界条件下系统的固有频率数值解.

1.3 边界条件

采用文献[8]的边界条件设定,利用投影矩阵法向式(14)施加边界条件,具体的边界表达式如表 1 所示,其中上标“ $\prime$ ”为对变量 x 的偏导数, $\boldsymbol{e}_i$ 为第 i 个元素为 1 其余元素均为 0 的 N 维行向量. 对于表中各类线性边界条件可以表示成如下形式:

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0}$$

(16)

式中矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数 $\boldsymbol{M}$ 代表了边界条件的个数.

表 1 各类边界条件及其数学表达式
Table 1 Formulas of boundary conditions

Boundary conditions	Continuous form condition ($x=0$ 或 $x=L$)	Discrete form condition ($i=N$ 或 $i=1$)
Hinged(P)	$\nu=0, \alpha'=0$	$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{v}=0, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\alpha}$
Clamped(C)	$\nu=0, \alpha=0$	$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{v}=0, \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{\alpha}=0$
Free(F)	$\alpha'=0, \alpha-\nu'=0$	$\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{\alpha}=0, \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{v})=0$

2 数值算例

基于 Chebyshev 谱方法推导出在热环境中的系统动力学方程,获得高温环境中均匀材料 Timoshenko 梁的固有频率数值解,同时利用文献[8]中

采用的有限元仿真计算得出仿真结果,并将二者计算结果进行对比,验证该方法的正确性和快速收敛性. 在此基础上进一步分析材料属性、温度、边界条件等因素对系统动力学特性的影响.

本文研究的功能梯度梁的材料属性会沿轴向呈现出指数变化,由文献中给出的公式可知,如果梁的材料是由 Al_2O_3 和 SUS304 两种材料组成,其规律可表示为:

$$R(x)=R_z+(R_a-R_z)\left(\frac{x}{l}\right)^n$$

(17)

其中:

R — ρ 、 E 、 G 等材料属性;
 z 、 a —分别表示材料 Al_2O_3 和 SUS304;

对于 Al_2O_3 的 E_z 可取 385GPa, ρ_z 取 3960kg/m³, SUS304 的 E_a 取 193GPa, ρ_a 取 7930kg/m³. 梯度梁的材料属性随不同的材料梯度指数变化规律如图 2 所示.

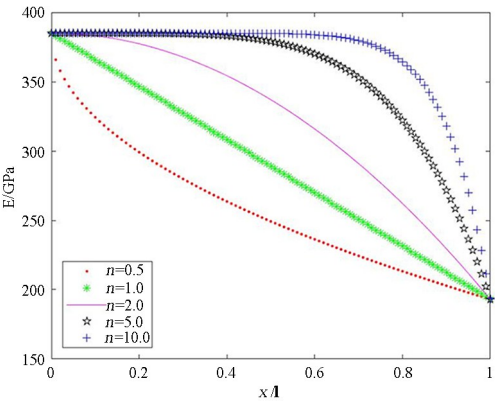


图 2 不同材料梯度指数时弹性模量沿轴向变化规律
Fig. 2 Young's modulus with respect to different n

热载荷对结构体模态影响方式有两种,一种由于温度升高导致结构材料热膨胀,引起材料分子内部连接变弱,从而改变结构的物理性质;另一种则由于温度会在结构体内部引起热应力,引起结构变形和应力集中,从而改变结构物理性质. 因此,需要综合考虑材料热膨胀及热应力对结构刚度的影响,根据文献[27]中所研究的热环境对 FGMs 材料参数的影响,并给出了材料参数随着温度 T 变化计算方式:

$$P_i(T)=P_0(P_{-1}T^{-1}+1+P_1T+P_2T^2+P_3T^3)$$

(18)

式中: P_0 、 P_{-1} 、 P_1 、 P_2 、 P_3 为材料参数随温度变化的相关系数(见表 2),其中 $T=T_0+\Delta T$, $T_0=300\text{K}$.

表 2 陶瓷和金属材料的温度相关系数
Table 2 Temperature-dependent coefficients for ceramics and metal materials

Materials	Property(Unit)	$P_{(-1)}$	P_0	P_1	P_2	P_3
Ti-6Al-4V	$E(\text{Pa})$	0	122.56e9	$-4.586\text{e-}4$	0	0
	ν	0	0.2884	$1.121\text{e-}4$	0	0
	$\theta(\text{K}^{-1})$	0	$7.5788\text{e-}6$	$6.638\text{e-}4$	$-3.147\text{e-}6$	0
	$\rho(\text{kg/m}^3)$	0	4429	0	0	0
ZrO_2	$E(\text{Pa})$	0	244.27e9	$-1.371\text{e-}3$	$1.214\text{e-}6$	$-3.681\text{e-}10$
	ν	0	0.2882	$1.33\text{e-}4$	0	0
	$\theta(\text{K}^{-1})$	0	$12.766\text{e-}6$	$-1.491\text{e-}3$	$1.006\text{e-}5$	$-6.778\text{e-}11$
	$\rho(\text{kg/m}^3)$	0	3000	0	0	0
Al_2O_3	$E(\text{Pa})$	0	349.55e9	$-3.853\text{e-}4$	$4.027\text{e-}7$	$-1.673\text{e-}10$
	ν	0	0.26	0	0	0
	$\theta(\text{K}^{-1})$	0	$6.8269\text{e-}6$	$1.8381\text{e-}4$	0	0
	$\rho(\text{kg/m}^3)$	0	3800	0	0	0
Si_3N_4	$E(\text{Pa})$	0	348.43e9	$-3.07\text{e-}4$	$2.16\text{e-}7$	$-8.946\text{e-}11$
	ν	0	0.24	0	0	0
	$\theta(\text{K}^{-1})$	0	$5.8723\text{e-}6$	$9.095\text{e-}4$	0	0
	$\rho(\text{kg/m}^3)$	0	2370	0	0	0
SUS304	$E(\text{Pa})$	0	201.04e9	$3.079\text{e-}4$	0	0
	ν	0	0.3262	$-2.002\text{e-}4$	$3.797\text{e-}7$	0
	$\theta(\text{K}^{-1})$	0	$12.33\text{e-}6$	$8.086\text{e-}4$	0	0
	$\rho(\text{kg/m}^3)$	0	8166	0	0	0

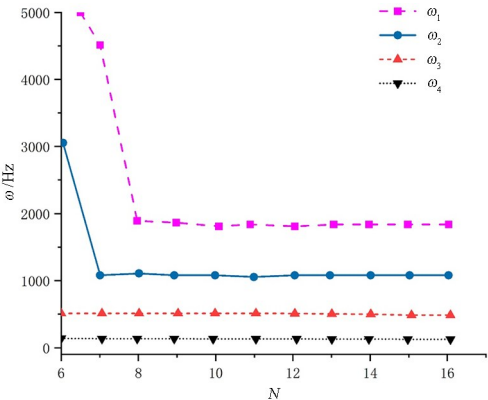


图 3 热环境下均匀 Timoshenko 梁固有频率收敛性分析
Fig. 3 Convergence analysis of natural frequencies of Timoshenko beam in thermal environment

设梁的长度为 $l=1.5\text{m}$, 半径为 $r=0.02\text{m}$, 采用 Ti-6Al-4V 材料的各项参数, 采用 Chebyshev 多项式计算在 400K 温度中两端固支(C-C)边界条件下均匀 Timoshenko 梁的前四阶频率, 结果如图 3 所示. 从图 3 中可以看出随着 Chebyshev 多项式的阶数 N 的逐渐增大, 前四阶固有频率均逐渐收敛到稳定值, 故而得出该方法具有快速的收敛性; 对于前四阶频率的计算, 取 $N=12$ 即可满足计算精

度要求.
对于功能梯度梁, 材料一选择 Al_2O_3 , 材料二选择 SUS304; 热环境下, 功能梯度材料 Timoshenko 梁的前四阶频率, 如图 4 所示. 图 4 为在 400K 温度场两端固支边界下, 材料梯度指数 $n=1$ 时, Chebyshev 谱方法计算结果的收敛性. 和均匀材料类似, 取 $N=12$ 时均符合前四阶频率收敛性要求, 满足计算精度.

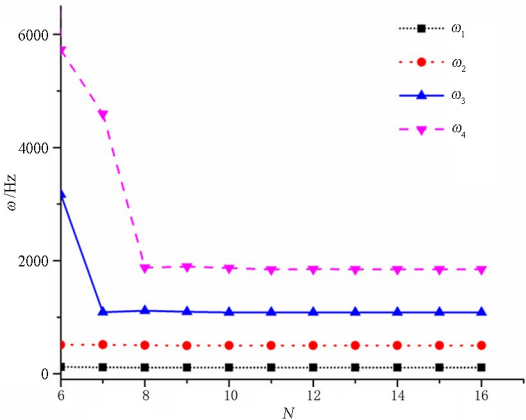


图 4 热环境下 FGB 梁固有频率收敛性分析
Fig. 4 Convergence analysis of FGB beam natural frequency in thermal environment

表 3 热环境下均匀 Timoshenko 梁与功能梯度 Timoshenko 梁的固有频率 (Hz)

Table 3 Natural frequencies of uniform Timoshenko beams and functionally graded Timoshenko beams in thermal environment(Hz)

Temperature	Boundary	Inherent Frequency	Uniform Timoshenko Beam			Functionally Graded Timoshenko Beam		
			N = 16	Abaqus	Error	N = 16	Abaqus	Error
300K	C-C	ω_1	172.53	171.12	0.82%	232.00	230.61	0.60%
		ω_2	470.55	469.12	0.30%	636.20	634.81	0.22%
		ω_3	909.73	907.89	0.20%	1232.84	1230.12	0.22%
		ω_4	1478.39	1476.21	0.15%	2005.38	2003.91	0.07%
	P-P	ω_1	76.58	74.20	3.21%	103.46	102.91	0.53%
		ω_2	304.49	301.89	0.86%	413.40	411.80	0.39%
		ω_3	678.42	676.91	0.22%	921.92	920.89	0.11%
		ω_4	1190.42	1187.32	0.24%	1617.60	1614.83	0.17%
	C-F	ω_1	27.31	26.42	3.37%	35.39	34.92	1.92%
		ω_2	170.19	169.20	0.58%	227.65	224.32	1.48%
		ω_3	472.27	470.91	0.29%	638.58	635.62	0.46%
		ω_4	913.72	910.40	0.37%	1239.51	1237.43	0.17%
350K	C-C	ω_1	136.98	134.21	2.06%	187.50	185.50	0.87%
		ω_2	421.66	420.01	0.39%	577.23	575.21	0.35%
		ω_3	851.71	849.20	0.30%	1167.44	1164.31	0.27%
		ω_4	1410.53	1408.20	0.17%	1934.16	1932.30	0.10%
	P-P	ω_1	0	0	0	0	0	0%
		ω_2	240.26	237.89	1%	334.75	331.62	0.95%
		ω_3	612.50	610.20	0.38%	844.96	841.25	0.44%
		ω_4	1118.02	1115.93	0.19%	1538.52	1535.37	0.21%
	C-F	ω_1	26.95	25.92	3.96%	35.43	34.87	1.61%
		ω_2	167.91	165.32	1.57%	226.70	223.92	1.24%
		ω_3	465.95	462.82	0.68%	636.02	634.21	0.29%
		ω_4	901.47	899.21	0.25%	1234.59	1231.98	0.21%
400K	C-C	ω_1	74.66	73.11	2.13%	111.82	109.01	2.58%
		ω_2	356.27	354.98	0.36%	498.73	497.71	0.20%
		ω_3	780.10	777.40	0.35%	1086.23	1083.81	0.22%
		ω_4	1329.83	1326.90	0.22%	1847.99	1845.98	0.11%
	P-P	ω_1	0	0	0	0	0	0
		ω_2	129.76	127.89	1.46%	209.81	207.52	1.11%
		ω_3	526.16	523.78	0.46%	745.42	743.72	0.23%
		ω_4	1029.64	1025.89	0.37%	1441.26	1440.32	0.07%
	C-F	ω_1	26.58	25.61	3.77%	35.28	34.79	1.41%
		ω_2	165.60	163.25	1.44%	225.73	223.43	1.03%
		ω_3	459.53	457.21	0.51%	633.26	630.93	0.37%
		ω_4	889.06	886.32	0.31%	1229.23	1225.80	0.28%
450K	C-C	ω_1	0	0	0	0	0	0
		ω_2	262.22	260.00	0.85%	388.60	385.91	0.70%
		ω_3	691.15	687.91	0.47%	985.667	982.72	0.30%
		ω_4	1234.20	1231.01	0.26%	1745.00	1743.92	0.06%
	P-P	ω_1	0	0	0	0	0	0
		ω_2	0	0	0	0	0	0
		ω_3	407.30	405.89	0.35%	613.50	611.08	0.40%
		ω_4	920.86	916.93	0.43%	1322.33	1320.92	0.11%
	C-F	ω_1	26.20	24.91	5.17%	35.13	33.87	3.73%
		ω_2	163.26	162.61	0.40%	224.69	221.83	1.29%
		ω_3	453.02	451.90	0.25%	630.27	629.80	0.07%
		ω_4	876.45	874.21	0.26%	1223.36	1219.31	0.33%

果,从表 3 中可以得出使用该方法求解出的结构频率与 Abaqus 有限元分析软件中的结果误差很小,吻合度很高.验证了本方法在温度场中求解均匀材料与功能梯度材料 Timoshenko 梁结构频率的正确性.

2.1 温度的影响

热环境中温度的变化引起热应力和材料的软化效应(材料热膨胀)是影响结构动力学特性的主要因素.基于此,对于分析不同温度下的结构动力学特性是十分有必要的.以 $\text{ZrO}_2\text{--SUS304}$ 及 $\text{ZrO}_2\text{--Ti-6AL-4V}$ 为例在材料梯度指数 $n=1$ 时,两端固支条件下,分析不同温度下的固有频率如表 4.从表 4 中可以看到,随着温度的升高,各阶固有频率均相应减小,且一阶频率减小幅度最大,四阶固有频率减小幅度最小;从表 4 中对比可以看到在 $n=1$ 时, $\text{ZrO}_2\text{--SUS304}$ 的热屈曲温度要低于 $\text{ZrO}_2\text{--Ti-6AL-4V}$ 的热屈曲温度,这是因为 Ti-6AL-4V 与 SUS304 相比耐热性更强,材料不容易软化.

表 4 不同温度下 FGB 前四阶固有频率(Hz)					
Table 4 The first four dimensionless natural frequencies for the FGB with different temperature(Hz)					
Materials	Temperature	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$\text{ZrO}_2\text{--SUS304}$	300K	204.88	562.78	1091.52	1776.34
	320K	186.57	536.94	1060.87	1740.77
	340K	164.37	507.72	1027.25	1702.37
	360K	136.22	474.41	990.28	1660.87
	380K	96.79	435.97	949.53	1615.98
$\text{ZrO}_2\text{--Ti-6AL-4V}$	400K	0.00	390.78	904.44	1567.37
	300K	212.37	580.39	1122.95	1825.33
	320K	198.23	558.92	1095.42	1790.99
	340K	181.83	535.29	1065.98	1754.91
	360K	162.38	509.11	1034.36	1716.88
	380K	138.46	479.86	1000.29	1676.67
	400K	106.87	446.81	963.40	1634.03
	420K	55.30	408.93	923.29	1588.67
	450K	0.00	339.05	855.87	1514.80

从表 3 中两端固支结构和图 5 中悬臂结构的一阶固有频率的变化情况.可得出对于悬臂结构,热应力在固定端处对结构产生影响较大,而对于远离固定端的区域而言,热应力的影响很小,并且不

存在热屈曲的现象.而对于两端简支(P-P)结构的热屈曲温度要低于两端固支结构,这是由于简支的边界限制比固支弱.采用 $\text{ZrO}_2\text{--Ti-6AL-4V}$ 功能梯度材料,在 $n=1$ 时,分析悬臂条件下轴向功能梯度材料的前三阶固有频率,从图 5 中可以看到,在只考虑材料软化现象时,各阶固有频率均呈减小趋势,且三阶固有频率减小趋势最明显.

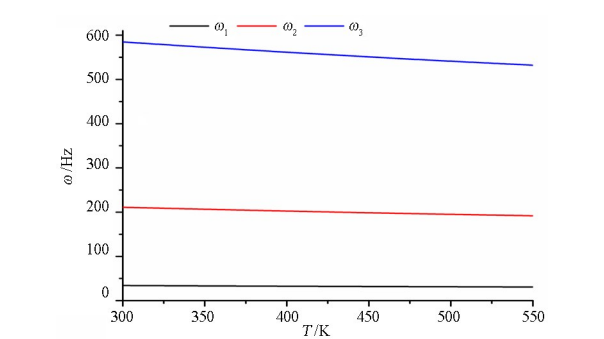


图 5 热环境下前 3 阶固有频率 C-F (Hz)
Fig. 5 The first three dimensionless natural frequencies for FGB in thermal environment C-F (Hz)

2.2 材料梯度指数效应

材料属性的梯度变化为结构提供了特殊的性能,通过调节材料梯度指数可以优化结构热力学特性以及调节力学特性,因此对热环境下结构的设计具有很重要的意义.表 5 为 400K 温度且两端固支条件下不同材料梯度指数下 FGB 的前四阶固有频率,其中,材料一选择 Al_2O_3 ,材料二选择 SUS304.

表 5 不同下 FGB 的前四阶固有频率(Hz)				
Table 5 The first four natural frequencies of the FGB under different (Hz)				
Material Gradient Index	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
$n=0$	0.00	281.97	739.66	1319.42
$n=0.5$	40.22	415.69	951.00	1643.01
$n=1$	111.82	498.73	1086.23	1847.99
$n=2$	169.82	601.43	1250.80	2093.07
$n=3$	200.49	660.42	1343.95	2231.06
$n=4$	220.01	697.61	1403.62	2319.83
$n=5$	233.44	723.02	1445.32	2382.14
$n=6$	243.12	741.44	1476.21	2428.48
$n=7$	250.33	755.32	1500.04	2464.40
$n=8$	255.84	766.05	1518.98	2493.10
$n=9$	260.15	774.51	1534.34	2516.59
$n=10$	263.58	781.28	1547.01	2536.19
$n=20$	278.14	809.74	1604.04	2631.12

从表中可以看到,当 $n=0$ 时,材料已经达到热屈曲温度,即一阶固有频率降为零;随着材料梯度指数的不断增加,结构的前四阶固有频率不断增大,即通过调节材料梯度指数可以优化结构的热屈曲温度;这是因为材料梯度指数的增大, Al_2O_3 在结构中占有的比例增大,因此结构的耐热性更强。

2.3 临界屈曲温度

通过上节分析可以看到,通过调节材料梯度指数,可以优化结构的热屈曲温度,基于此,本节中分析在不同材料梯度指数下,四种材料的热屈曲温度的变化.从图 6 中可以看到, Al_2O_3 -SUS304 材料随梯度指数 n 的变化最明显,随着 n 的增大,材料的热屈曲温度也逐渐提高,最终临界温度收敛到 Al_2O_3 陶瓷梁的热屈曲温度; Si_3N_4 -SUS304 材料热屈曲温度变化趋势与 Al_2O_3 -SUS304 材料热屈曲温度相似,但 Si_3N_4 陶瓷的耐热性不如 Al_2O_3 陶瓷,因此热屈曲温度与 Al_2O_3 -SUS304 材料相比要低一些, ZrO_2 -Ti-6AL-4V 功能梯度材料随梯度指数 n 的变化平缓,这是因为 ZrO_2 与 Ti-6AL-4V 均为良好的耐热材料,且 Ti-6AL-4V 热膨胀系数 ZrO_2 材料差别不大, ZrO_2 -SUS304 材料随 n 值随先增大后平缓,是因为 SUS304 材料与 Ti-6AL-4V 材料相比弹性模量随温度变化程度大,且 ZrO_2 的材料的耐热性不如 Si_3N_4 陶瓷及 Al_2O_3 陶瓷材料。

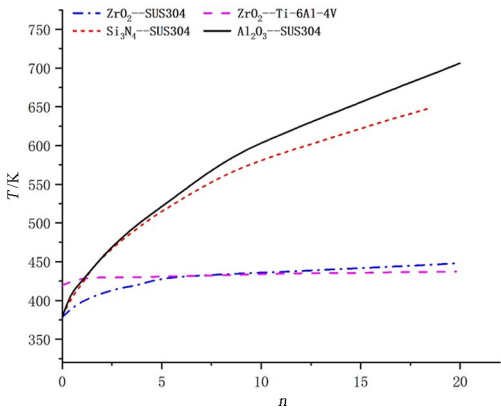


图 6 不同材料梯度指数对 FGB 热屈曲温度影响
Fig. 6 The effect of material parameters on the critical temperatures of FGBs

3 结论

本文基于 Chebyshev 谱方法,分析了热环境下轴向 Timoshenko 梁的动力学特性,研究了温度场、边界条件及材料梯度等因素对梁的固有频率的

影响规律.选用四种材料的功能梯度 Timoshenko 梁进行了数值计算,可以得到以下结论:

(1)对于两端固支边界条件,材料梯度指数随 n 值一定时,随着温度的升高,各阶固有频率均相应减小;对于悬臂结构,热应力在固定端处对结构产生影响较大,而对于远离固定端的区域而言,热应力的影响很小,且各阶固有频率均随材料软化而减小.

(2)两端固支边界条件下,环境温度一定时,随着材料梯度指数 n 值的增大,结构的前四阶固有频率均不断增大.

(3)调节材料梯度指数可以优化结构热力学特性以及调节动力学特性,对于上述四种材料,增大材料梯度指数随 n 值,可以提高结构的热屈曲温度;但对于不同的材料参数,所表现出的热屈曲温度变化趋势不同.

本文利用 Chebyshev 多项式和 Lagrange 方程对热环境下的轴向功能梯度 Timoshenko 梁的力学特性进行了研究,分析了边界条件、温度效应、材料梯度指数等因素对结构固有频率和热屈曲温度的影响,重点得出可通过增大 FGMs 的材料梯度指数来提高结构的热屈曲温度.相关结果可为热环境下的功能梯度梁的设计提供参考.

参考文献

[1] 韩杰才,徐丽,王保林,等. 梯度功能材料的研究进展及展望[J]. 固体火箭技术, 2004, 27(3): 207—215.
HAN J C, XU L, WANG B L, et al. Progress and prospects of functional gradient materials [J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2004, 27(3): 207—215. (in Chinese)
[2] 仲政,吴林志,陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528—541.
ZHONG Z, WU L Z, CHEN W Q. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(5): 528—541. (in Chinese)
[3] 徐刚年. 功能梯度梁的力学行为研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2010.
XU G N. Research on mechanical behavior functionally graded beam [D]. Lanzhou: Lanzhou University

- of Technology, 2010. (in Chinese)
- [4] 王明禄, 张能辉. 热载荷下粘弹性功能梯度材料薄板的准静态响应[J]. 固体力学学报, 2004, 25(4): 479—482.
- WANG M L, ZHANG N H. Quasi-static response of functionally graded visco-elastic plates under thermal loads [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004, 25(4): 479—482. (in Chinese)
- [5] 姚晓莎, 王忠民, 赵凤群. 轴向运动功能梯度梁的横向振动[J]. 机械工程学报, 2013, 49(23): 117—122.
- YAO X S, WANG Z M, ZHAO F Q. Transverse vibration of axially moving beam made of functionally graded materials [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(23): 117—122. (in Chinese)
- [6] PRADHAN K K, CHAKRAVERTY S. Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method [J]. Composites Part B: Engineering, 2013, 51: 175—184.
- [7] SHAHBA A, RAJASEKARAN S. Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(7): 3094—3111.
- [8] SHAHBA A, ATTARNEJAD R, MARVI M T, et al. Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions [J]. Composites Part B: Engineering, 2011, 42(4): 801—808.
- [9] RAJASEKARAN S. Differential transformation and differential quadrature methods for centrifugally stiffened axially functionally graded tapered beams [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2013, 74: 15—31.
- [10] RAJASEKARAN S. Free vibration of centrifugally stiffened axially functionally graded tapered Timoshenko beams using differential transformation and quadrature methods [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(6): 4440—4463.
- [11] ZHAO Y, HUANG Y X, GUO M Q. A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory [J]. Composite Structures, 2017, 168: 277—284.
- [12] 邵玉龙, 段庆林, 李锡夔, 等. 功能梯度材料的二阶一致无网格法[J]. 工程力学, 2017, 34(3): 15—21.
- SHAO Y L, DUAN Q L, LI X K, et al. Quadratically consistent meshfree method for functionally graded materials [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(3): 15—21. (in Chinese)
- [13] 黄意新. 一种基于 Chebyshev 多项式理论的结构力学计算方法[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
- HUANG Y X. A novel numerical method for structural mechanics based on Chebyshev polynomials theory [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017. (in Chinese)
- [14] 黄意新, 田浩, 赵阳. 弹性连接旋转柔性梁动力学分析[J]. 力学学报, 2016, 48(4): 963—971.
- HUANG Y X, TIAN H, ZHAO Y. Dynamic analysis of a rotating flexible beam with elastic boundary conditions [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(4): 963—971. (in Chinese)
- [15] 黄意新, 赵阳, 田浩, 等. 弹性支撑旋转 Timoshenko 梁动力学特性[J]. 噪声与振动控制, 2016, 36(3): 6—10+15.
- HUANG Y X, ZHAO Y, TIAN H, et al. Dynamic characteristics of a spinning Timoshenko beam with elastic supports [J]. Noise and Vibration Control, 2016, 36(3): 6—10+15. (in Chinese)
- [16] 李世荣, 苏厚德. 热环境中功能梯度材料 Euler 梁的自由振动[J]. 兰州理工大学学报, 2008, 34(4): 164—169.
- LI S R, SU H D. Free vibration of Euler beams with functionally graded material in thermal environment [J]. Journal of Lanzhou University of Technology, 2008, 34(4): 164—169. (in Chinese)
- [17] 黄小林, 沈惠申. 热环境下功能梯度材料板的自由振动和动力响应[J]. 工程力学, 2005, 22(3): 224—227+81.
- HUANG X L, SHEN H S. Free vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments [J]. Engineering Mechanics, 2005, 22(3): 224—227+81. (in Chinese)
- [18] 石先杰, 左朋. 热环境下功能梯度圆柱壳振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2023, 36(2): 526—533.
- SHI X J, ZUO P. Vibration analysis of functionally graded cylindrical shell under thermal environment [J]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 36(2): 526—533. (in Chinese)
- [19] 姚熊亮, 叶曦, 王献忠. 热环境中功能梯度圆柱壳声辐射特性研究[J]. 工程力学, 2013, 30(6): 334

—339+352.

YAO X L, YE X, WANG X Z. The acoustic radiation characteristics of functionally graded cylindrical shells in thermal environment [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(6): 334—339+352. (in Chinese)

[20] 朱江辉, 林华刚, 张雪莉, 等. 功能梯度材料板在热环境与横向载荷共同作用下的非线性振动分析[J]. 机械科学与技术, 2023, 42(10): 1735—1744.

ZHU J H, LIN H G, ZHANG X L, et al. Nonlinear vibration analysis of functionally graded materials plate in transverse load and thermal environment [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2023, 42(10): 1735—1744. (in Chinese)

[21] 吴晓, 黄翀, 杨立军, 等. 功能梯度材料圆板的非线性热振动及屈曲[J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(1): 52—57.

WU X, HUANG C, YANG L J, et al. Nonlinear thermal vibration and buckling of functionally graded circular plate [J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(1): 52—57. (in Chinese)

[22] 毛丽娟, 马连生. 非均匀热载荷作用下功能梯度梁的非线性静态响应[J]. 工程力学, 2017, 34(6): 1—8.

MAO L J, MA L S. Nonlinear static responses of FGM beams under non-uniform thermal loading [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(6): 1—8. (in Chinese)

[23] 高峰. 热载荷作用下功能梯度材料梁板结构的非线性力学分析[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2014.

GAO F. Nonlinear mechanical behavior of FGM circular plates and beams under thermal loading [D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2014. (in Chinese)

[24] TRINH L C, VO T P, THAI H T, et al. An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads [J]. Composites Part B: Engineering, 2016, 100: 152—163.

[25] HAN S M, BENAROYA H, WEI T. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 225(5): 935—988.

[26] 黄意新, 穆洲, 郭明全, 等. 复杂边界条件轴向功能梯度梁动力学分析[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2018, 50(10): 143—150.

HUANG Y X, MU Z, GUO M Q, et al. Dynamic analysis of axially functionally graded beams with complex boundary conditions [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2018, 50(10): 143—150. (in Chinese)

[27] REDDY J N, CHIN C D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates [J]. Journal of Thermal Stresses, 1998, 21(6): 593—626.

附录:

符号说明:

- A —梁的横截面积, m^2
- E —弹性模量, $\text{MPa}(\text{N}/\text{m}^2)$
- G —剪切模量, $\text{MPa}(\text{N}/\text{m}^2)$
- I —梁的横截面中性轴的面积转动惯量, $\text{kg}\cdot\text{m}^2$
- P —梁的动能, J
- $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ —材料参数随温度变化的相关系数
- ΔT —温度变化量, $^\circ\text{C}$
- U —势能, J
- V — $N\times N$ 阶 Chebyshev 内积矩阵
- x —梁的横向位置
- y —梁的纵向位置
- t —时间
- α —转角
- ϵ_x —轴向应变
- γ —剪切角
- κ —梁的截面剪切系数
- ν —梁在轴向位置 and 时间的横向振动位移
- θ —热膨胀系数
- ρ —密度