

考虑足底压力反馈影响的人体平衡动力学分析^{*}

李威 张丽[†]

(南京航空航天大学 航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 南京 210016)

摘要 随着社会老龄化的加剧,老年人防跌倒成为一项重要的研究课题.在此背景下,基于时滞系统动力学开展人体平衡研究,有助于加深对人体平衡机理的理解,为开发防跌倒辅助设备提供理论支持.本文建立了考虑足底压力反馈影响的单自由度倒立摆时滞反馈控制模型,针对足底压力反馈时滞、位移反馈时滞、速度反馈时滞为 1:2:2 的情况,讨论了系统关于位置反馈增益与速度反馈增益、时滞与足部扭转刚度以及时滞与足部反馈增益的稳定区域图,并考虑几何非线性和控制力矩饱和性的影响,以时滞为分岔参数,采用多尺度法进行了 Hopf 分岔分析.结果表明随着足部扭转刚度或足部反馈增益增大,临界反应时滞减小,系统出现超临界 Hopf 分岔.

关键词 足底压力反馈, 稳定性, 时滞, Hopf 分岔

中图分类号:O313

文献标志码:A

Human Balance Dynamics Analysis Considering the Influence of Foot Pressure Feedback^{*}

Li Wei Zhang Li[†]

(State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract With the increasing prevalence of social aging, the prevention of falls in the elderly has become an important research topic. In this context, it is of great significance to explore the human balance mechanism based on time delay system dynamics for the purpose of improving the balance ability of the elderly and providing theoretical support for the development of fall prevention aid equipment. In this paper, with the influence of foot pressure feedback into consideration, a single-degree-of-freedom inverted pendulum with time-delay feedback control model is established. For the case of the foot pressure feedback delay, position feedback delay and velocity feedback delay with a ratio of 1:2:2, the stable region diagrams of position feedback gain versus velocity feedback gain, time delay versus foot torsional stiffness and time delay versus foot feedback gain are discussed. Considering the influence of geometric nonlinearity and control torque saturation, Hopf bifurcation analysis is carried out with respect to time delay by the method of multiple scales. The results show that with the increase of the foot torsional stiffness or the foot feedback gain, the critical time delay decreases and supercritical Hopf bifurcations appear.

Key words foot pressure feedback, stability, time delay, Hopf bifurcation

2023-11-15 收到第 1 稿,2023-12-12 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12272167),National Natural Science Foundation of China (12272167).

[†] 通信作者 E-mail:zhangli@nuaa.edu.cn

引言

维持自身身体的平衡是每个人日常活动中不可或缺的能力,然而步入中老年之后,随着年龄的增长,身体机能逐渐衰退,平衡能力随之降低。联合国世界卫生组织的数据表明,跌倒已成为非疾病因素中老年人严重意外伤害的主要原因^[1]。随着人口老龄化程度的加剧,老年人跌倒受伤成为世界各国必须面对的公共健康问题,开展人体平衡机理研究,逐渐成为一项重要的研究课题。

足部在人体站立平衡时发挥着至关重要的作用,研究表明^[2,3],在脚底施加随机噪声,有助于增强触觉感知,减少安静站立时身体的摇晃,从而改善人体的平衡能力。考虑足部影响的人体平衡研究中,目前大多数是通过压力板测量足底的压力分布数据、压力中心轨迹的变化,分析人体运动时身体的运动状况以及足部的结构和功能。例如,孟青云等^[4]通过研究青年人足底压力中心线的变化规律,发现了足底压力中心线与步态稳定性、平衡性的关联。Chiu等^[5]通过测量老年人足底压力中心特征,发现与年轻人相比,老年人的足部更倾向于内旋,并且显示出显著的内侧压力中心曲线,这表明老年人采用不同的策略来消除初始脚跟接触产生潜在跌倒风险的影响。Gibbons等^[6]研究了足部位置对前后和左右方向姿势摆动的影响,结果表明受试者自主选择足部放置方式有助于姿势的稳定。上述研究主要基于实验进行,从理论上建模分析足部对人体平衡影响的较少。

人体姿态控制系统通过整合视觉、前庭、本体感觉系统的输入信号对神经肌肉进行调控来实现人体平衡的维持。由于这些信号的传导以及肌肉从舒张到收缩产生力需要时间,即控制系统存在时间滞后(简称时滞),故时滞是人体平衡控制中必须考虑的因素。人体运动控制系统中的时滞主要由感觉、感知、传导以及执行四个部分组成^[7,8]。此外中枢神经系统处理来自不同感知器官的信号所需的时间不同^[9]。总体而言,视觉和听觉信号处理所需时间较长,约为150~250ms,因而成为人体反应时滞的主要来源,触觉感知输入信号时滞相对较小。目前关于人体平衡控制的研究大多基于单时滞进行研究,即未考虑不同感知信号的时滞对人体平衡控制的影响。一些文献针对人体采用的控制策略展

开了研究,试图从控制策略的角度探究人体平衡控制的机理,如比例微分控制^[9,10]、比例微分加速度控制^[11,12]、模型预测控制^[13]、间歇控制^[14-16]等,这些控制策略在一定程度上能解释人体平衡的部分特性。目前仍需从更多角度尝试解读中枢神经系统的控制策略。基于单时滞的研究也发现了人体平衡控制的许多特性,如感知死区^[17]、感知离散^[18]、肌肉力矩饱和^[12,19]等非线性因素对人体站立平衡均有影响。例如,对平衡稳定性不利的时滞、感知死区以及肌肉收缩可能产生的最大踝关节扭矩共同作用时却能提高系统的稳定性^[19]。从理论上开展两个及以上时滞组合对人体平衡稳定性影响的研究较少,文献[20]研究了肌骨运动时滞和控制器时滞同时存在时,多源时滞对人体平衡的影响。

本文的目的是建立考虑足底压力反馈的倒立摆模型,从理论上分析时滞、足部扭转刚度以及足底反馈增益对人体平衡稳定的影响,探讨足部压力反馈时滞、位置反馈时滞与速度反馈时滞为1:2:2时人体平衡的动力学特性。本文其余部分结构如下。第一节建立了考虑足底压力反馈的单自由度人体静态站立倒立摆模型,对线性化模型进行稳定性分析;第二节利用多尺度法对单自由度模型进行Hopf分岔分析,得到了分岔周期运动解振幅与分岔参数的表达式;第三节对解析结果进行讨论,并利用DDE-BIFTOOL进行数值验证;第四节为本文的结论部分。

1 稳定性分析

1.1 动力学方程

人体静态站立平衡的力学模型采用如图1所示的倒立摆模型。人体躯干的质量为 m ,足跟至人体质心 C 的距离为 l ,躯干关于踝关节 A 的转动惯量为 J_A ,相对铅锤方向的摆角为 φ ,脚踝刚度为 k_t 。由于脚踝处被动阻尼的贡献通常很小,因此忽略脚踝阻尼^[21]。本模型考虑了足底接触对人体站立平衡的影响,足部关于踝关节 A 的转动惯量为 J_t ,脚掌相对于水平方向的转角为 θ ,脚掌处接触力关于踝关节的转动效应通过扭转刚度为 k_t 的扭簧描述,其大小可以综合衡量脚掌处弹性和压力中心位置的变化。 Q 为中枢神经系统调节踝关节肌肉收缩产生的主动控制扭矩。

由动量矩定理,可得系统的动力学方程

$$J_A \ddot{\varphi} + k_t(\varphi - \theta) - mgl \sin \varphi = -Q \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\theta} - k_t(\varphi - \theta) + k_f \theta = 0 \quad (2)$$

由于脚的质量与躯干质量相比很小,因此忽略脚部的惯性,即 $J_1 = 0$. 联立方程(1)和(2),消去 θ , 可得描述人体静态站立平衡的单自由度动力学方程

$$J_A \ddot{\varphi} + k_t(1 - r_0)\varphi - mgl \sin \varphi = -Q \quad (3)$$

其中 $r_0 = k_t / (k_f + k_t)$, 脚底接触力关于脚踝 A 的力矩为

$$M_f(t) = k_f r_0 \varphi(t) \quad (4)$$

考虑到踝关节肌肉提供的力矩存在极限^[12], 采用如下饱和主动控制力矩模型:

$$Q = \alpha \tanh \left[\frac{1}{\alpha} (K_p \varphi_{\tau_1} + K_d \dot{\varphi}_{\tau_2} + K_f M_{f\tau_3}) \right] \quad (5)$$

其中, φ_{τ_1} , $\dot{\varphi}_{\tau_2}$, $M_{f\tau_3}$ 分别为 $\varphi(t - \tau_1)$, $\dot{\varphi}(t - \tau_2)$, $M_f(t - \tau_3)$ 的简写形式, α 代表踝关节主动力矩极限, K_p , K_d 和 K_f 分别为比例增益、微分增益和关于足部力的反馈增益. 位置和速度时滞反馈信号由视觉系统和前庭系统提供, 足底反馈信号则由位于足底的机械感受器提供. 由于足底压力反馈信号的时滞要小于位置和速度反馈信号的时滞^[13,22], 本文考虑位置反馈信号与速度反馈信号对应的时滞相同, 而足部反馈信号的时滞为前者的二分之一, 即 $\tau_1 = \tau_2 = 2\tau_3 = 2\tau$.

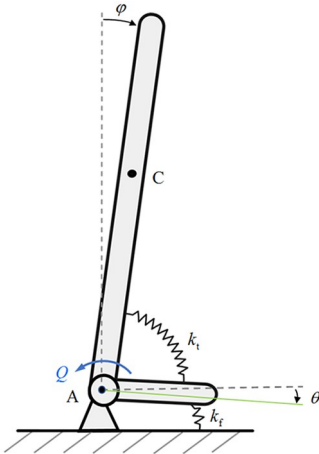


图1 考虑足底接触的人体平衡倒立摆模型

Fig. 1 Inverted pendulum human balancing model considering foot plantar contact

1.2 线性分析

考虑小幅度人体平衡摆动, $\sin \varphi \approx \varphi$, 可得方程(3)的线性化方程

$$J_A \ddot{\varphi} + (k_t - k_f r_0)\varphi - mgl \varphi$$

$$= -K_p \varphi(t - 2\tau) - K_d \dot{\varphi}(t - 2\tau) - K_f M_f(t - \tau) \quad (6)$$

对惯性项的系数进行归一化处理, 可得

$$\ddot{\varphi} - (a + b)\varphi = -P\varphi_{\tau_1} - D\dot{\varphi}_{\tau_2} - FM_{f\tau_3} \quad (7)$$

方程(7)中的新系统参数为

$$a = \frac{mgl - k_t}{J_A}, b = \frac{k_t^2}{J_A(k_f + k_t)}$$

$$P = \frac{K_p}{J_A}, D = \frac{K_d}{J_A}, F = \frac{K_f}{J_A}$$

根据文献[23], 大部分人的参数 $a > 0$, 说明在没有主动控制的情况下, 脚踝的被动刚度不足以维持人体的直立平衡.

滞后型时滞微分方程(7)的特征方程可表示为

$$D(\lambda) = \lambda^2 - a - b + P e^{-2\lambda\tau} + D\lambda e^{-2\lambda\tau} + Fk_f r_0 e^{-\lambda\tau} \quad (8)$$

为了方便后续计算, 将特征方程两边乘以 $e^{\lambda\tau}$, 可得

$$e^{\lambda\tau} D(\lambda) = (\lambda^2 - a - b)e^{\lambda\tau} + (P + D\lambda)e^{-\lambda\tau} + Fk_f r_0 \quad (9)$$

此时方程的指数项只含 $e^{\lambda\tau}$ 或 $e^{-\lambda\tau}$. 当系统存在一对纯虚根 $\pm i\omega_c$ 时, 将 $\lambda = i\omega_c$ 代入方程(9)中并分离实部和虚部, 可得

$$D\omega_c \sin \omega_c \tau - (\omega_c^2 - P + a + b) \cos \omega_c \tau + Fk_f r_0 = 0 \quad (10)$$

$$D\omega_c \cos \omega_c \tau - (\omega_c^2 + P + a + b) \sin \omega_c \tau = 0 \quad (11)$$

当 $\omega = 0$ 时, 由式(10)和式(11)可得静态稳定边界

$$P = a + b - Fk_f r_0, D \in \mathbb{R} \quad (12)$$

当 $\omega \neq 0$ 时, 由式(10)和式(11)可得

$$P = (\omega^2 + a + b) \cos 2\omega\tau - Fk_f r_0 \cos \omega\tau \quad (13)$$

$$D = \frac{(\omega^2 + a + b) \sin 2\omega\tau - Fk_f r_0 \sin \omega\tau}{\omega} \quad (14)$$

根据方程式(12)~式(14), 可确定系统关于位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D 的稳定区域图. 当 $\omega \neq 0$ 时, 速度反馈增益 P 和位移反馈增益 D 均为 ω 的函数, 式(13)和式(14)构成以 ω 为参数变量的参数方程, 可绘制稳定区域的右边界曲线; 当 $\omega = 0$ 时, 根据式(12)可知位置反馈增益 P 为常数, 速度反馈增益 D 为变化参数, 可绘制左边界. 两条边界曲线围成的区域是关于位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D 的稳定区域图.

参考文献[16], 本文选取的人体参数如表1所

表 1 人体参数^[16]
Table 1 Human body parameters

τ/s	k_t/Nm	mg/N	l/m	$J_A/kg \cdot m^2$	a/s^{-2}
0.1	471	600	1	60	2.15

示.图 2 为足部增益 F 为 $0.0083kg^{-1}m^{-2}$ 时,不同足部扭转刚度对应的关于位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D 的稳定区域图.随着足底扭转刚度 k_t 增大, (P, D) 稳定区域逐渐向左下方移动,对应的稳定区域面积随足底扭转刚度有所增大.这表明增大足底扭转刚度可能会使人体中枢神经系统采用较小的控制增益来维持人体的直立平衡.根据文献[24],人体在进行手指一杆平衡任务时,会采用稳定区域边界附近的控制增益来减少能量的消耗.因此,本文后续计算采用的控制增益参数均为 $P = 10s^{-2}$, $D = 3s^{-1}$, 对应的足底扭转刚度为 $k_t = 500Nm$, 足部反馈增益 $F = 0.0083kg^{-1}m^{-2}$, 在图 2 中用点 M 表示.图 3 为足底扭转刚度为 $500Nm$

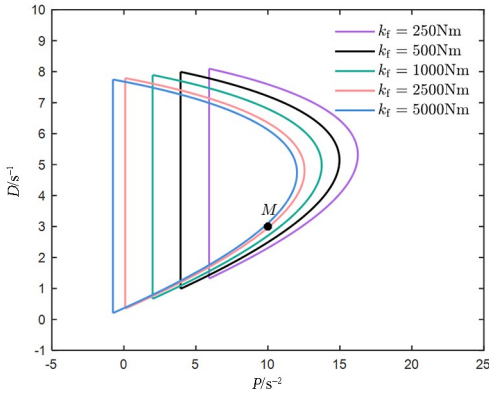


图 2 不同足部扭转刚度 k_t 对应的 (P, D) 稳定区域图
(足部增益 $F = 0.0083kg^{-1}m^{-2}$)

Fig. 2 (P, D) stability chart for different foot torsional stiffness with foot feedback gain $F = 0.0083kg^{-1}m^{-2}$

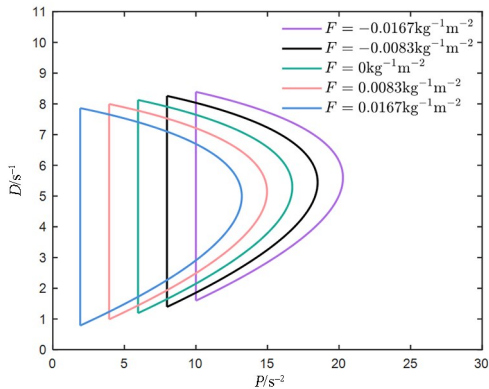


图 3 不同足部增益 F 对应的 (P, D) 稳定区域图
(足部扭转刚度 $k_t = 500Nm$)

Fig. 3 (P, D) stability chart for different foot feedback gain with foot torsional stiffness $k_t = 500Nm$

时,不同足部反馈增益 F 对应的关于位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D 的稳定区域图.随着足部反馈增益 F 增大,关于比例增益和微分增益的稳定区域逐渐向左下方移动,结果与图 2 类似.

在人体平衡研究中,还非常关注反应时滞对稳定性的影响.由式(10)和式(11)可得

$$\cos\omega_c\tau = \frac{(\omega_c^2 + P + a + b)Fr_0k_f}{\omega_c^4 - (D^2 - 2a - 2b)\omega_c^2 - P^2 + (a + b)^2} \quad (15)$$

$$\sin\omega_c\tau = \frac{DFr_0k_f\omega_c}{\omega_c^4 - (D^2 - 2a - 2b)\omega_c^2 - P^2 + (a + b)^2} \quad (16)$$

消去式中的谐波项,可得关于频率的八次代数方程

$$F(\omega_c) = \omega_c^8 + \alpha_1\omega_c^6 + \alpha_2\omega_c^4 + \alpha_3\omega_c^2 + \alpha_4 \quad (17)$$

其中

$$\alpha_1 = -2D^2 + 4a + 4b$$

$$\alpha_2 = D^4 - 4(a + b)D^2 - F^2r_0^2k_f^2 - 2P^2 + 6(a + b)^2$$

$$\alpha_3 = 2(6b^2 - F^2r_0^2k_f^2 - 2D^2b - 2P^2)a + 2(6b - D^2)a^2 + 4a^3 - 2(F^2r_0^2k_f^2 + 2P^2)b - 2D^2b^2 + 4b^3 + (2P^2 - F^2r_0^2k_f^2)D^2 - 2PF^2r_0^2k_f^2$$

$$\alpha_4 = -(P + a + b)^2[F^2r_0^2k_f^2 - (P - a - b)^2]$$

人体姿势晃动的临界频率 ω_c 是 $F(\omega_c)$ 的一个正根.根据方程(15)可以得到临界时滞与其他参数的函数关系

$$\tau_c = \begin{cases} \frac{1}{\omega_c} [\arccos(C_r) + 2k\pi], & \sin(\omega_c\tau) \geq 0 \\ \frac{1}{\omega_c} [2(k+1)\pi - \arccos(C_r)], & \sin(\omega_c\tau) < 0 \end{cases} \quad (18)$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$, C_r 为式(15)等号右边的表达式.

将特征方程(8)对时滞 τ 求导,代入 $\tau = \tau_c$ 及 $\lambda(\tau_c) = i\omega_c$ 可确定临界特征根穿越虚轴的趋势 γ :

$$\gamma = \text{Re} \left. \frac{d\lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_c} \quad (19)$$

根据稳定性切换定理,当 $\gamma < 0$ 时,系统有一对特征根从右半复平面穿过虚轴进入左半平面,即系统减少一对不稳定的特征根;当 $\gamma > 0$ 时,系统有一对特征根从左半复平面穿过虚轴进入右半平面,系统会增加一对不稳定的特征根.据此,可确定系统关于时滞的稳定区域.

选取表 1 所示人体参数,图 4 为足部反馈增益 $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$ 时,关于足部扭转刚度和临界时滞的稳定区域图[对应图 4 (b)]以及临界频率与足部扭转刚度的关系图[对应图 4 (a)]. 根据图 4 可知,当足部反馈增益 F 为 $0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$ 时,随着足底扭转刚度从 0 增大到 500Nm ,人体姿势晃动的频率增幅明显,从 0 增加至 0.5Hz 左右,扭转刚度超过 500Nm 之后,人体晃动频率缓慢增加. 临界时滞随足底扭转刚度的增大而减小,在 $0\sim 500\text{Nm}$ 内减小幅度较大,而后减小幅度趋于平缓.

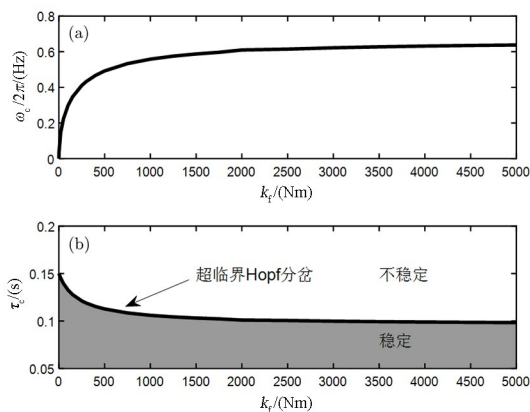


图 4 稳定区域图(足部反馈增益 $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$)
(a) 临界频率与足部扭转刚度关系 (b) (k_f, τ_c) 稳定区域图
Fig. 4 Stability charts with foot feedback gain $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$
(a) critical frequency versus foot torsional stiffness
(b) (k_f, τ_c) stability chart

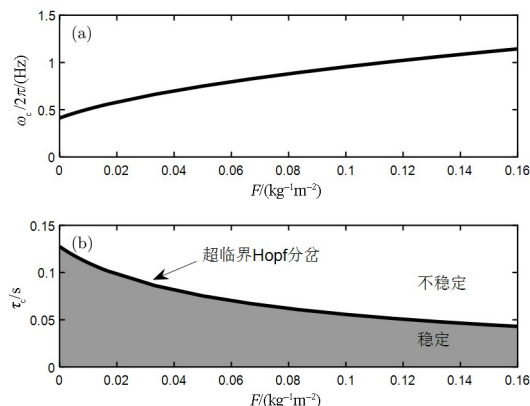


图 5 稳定区域图(足部扭转刚度 $k_f=500\text{Nm}$)
(a) 临界频率与足部反馈增益关系 (b) (k_f, τ_c) 稳定区域图
Fig. 5 Stability charts with foot torsional stiffness $k_f=500\text{Nm}$
(a) critical frequency versus foot feedback gain
(b) (k_f, τ_c) stability chart

选取表 1 所示人体参数,图 5 为足部扭转刚度 $k_f=500\text{Nm}$ 时,关于足部反馈增益和临界时滞的稳定区域图[对应图 5 (b)]以及临界频率与足部反馈增益的关系图[对应图 5 (a)]. 由图 5 可知,当足部反馈增益增大时,人体姿势晃动的临界频率不断增大,对应的临界时滞则逐渐减小. 由于增大足部

增益实际上是在增大足部反馈系数中扭转刚度的大小,因此,增大足部增益和扭转刚度对稳定区域、临界时滞以及临界频率的影响类似.

2 Hopf 分岔

根据 Hopf 分岔理论,当特征方程(8)出现一对纯虚根,而其它特征根均具有负实部时,系统会发生 Hopf 分岔. 时滞是影响人体站立平衡的重要参数,因此分析时滞对系统动力学行为的影响非常意义. 本文选择时滞为分岔参数

$$\tau = \tau_c + \mu \quad (20)$$

对于小角度扰动,非线性项可近似为

$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3, \quad \tanh \varphi \approx \varphi - \frac{1}{3} \varphi^3$$

$$\frac{1}{(\tau_c + \mu)^n} \approx \frac{1}{\tau_c^n} - \frac{n}{\tau_c^{n+1}} \mu \quad (21)$$

引入无量纲时间

$$T = t / \tau \quad (22)$$

将方程(20)~(22)代入控制方程(3)并简化,可得三次近似非线性方程,其形式如下

$$\ddot{\varphi}(T) + (\tau_c + \mu) D \dot{\varphi}(T-2) + (\tau_c^2 + 2\mu\tau_c) [P\varphi(T-2) - (a+b)\varphi(T) + F_r\varphi(T-1)] = \rho_g \varphi^3(T) + \sum_{i+j+k=3} p_{ijk} \varphi^i(T-2) \dot{\varphi}^j(T-2) \varphi^k(T-1) \quad (23)$$

式中几何非线性项系数为 $\rho_g = -\tau_c^2 mgl / 6J_A$, 与肌肉饱和力矩(双曲正切函数)相关的非线性项系数为

$$p_{030} = \frac{J_A^2 D^3}{3\tau_c \alpha^2}, p_{003} = \frac{\tau_c^2 J_A^2 F_r^3}{3\alpha^2}, p_{102} = \frac{\tau_c^2 J_A^2 P F_r^2}{\alpha^2},$$

$$p_{012} = \frac{\tau_c J_A^2 D F_r^2}{\alpha^2}, p_{201} = \frac{\tau_c^2 J_A^2 P^2 F_r}{\alpha^2},$$

$$p_{111} = \frac{2\tau_c J_A^2 P D F_r}{\alpha^2}, p_{021} = \frac{J_A^2 D^2 F_r}{\alpha^2},$$

$$p_{300} = \frac{\tau_c^2 J_A^2 P^3}{3\alpha^2}, p_{210} = \frac{\tau_c J_A^2 P^2 D}{\alpha^2}, p_{120} = \frac{J_A^2 P D^2}{\alpha^2}$$

其中 $F_r = Fk_f r_0$.

对于小振幅振动情况,令

$$\varphi(T) = \sqrt{\epsilon} x(t) \quad \mu = \epsilon \mu_1 \quad (24)$$

其中 ϵ 是一个无量纲的参数, $0 < \epsilon \ll 1, \mu_1 = O(1)$ 为调谐参数. 方程(23)改写成如下形式

$$\ddot{x}(t) + \tau_c D \dot{x}(t-2) + \tau_c^2 [P x(t-2) - (a+b)x(t) + F_r x(t-1)] = \epsilon (-\mu_1 \{ D \dot{x}(t-2) +$$

$$2\tau_c[Px(t-2) - (a+b)x(t) + F_r x(t-1)] + \rho_g x(t)^3 + \sum_{i+j+k=3} p_{ijk} x^i(t-2) \dot{x}^j(t-2) x^k(t-1) \quad (25)$$

定义时间尺度

$$T_k = \epsilon^k t, \quad k=0,1,2,\dots$$

为了研究关于时滞参数的 Hopf 分岔,两个时间尺度的近似解可表示为

$$x(t) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (26)$$

引入微分算子

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\epsilon^2) = D_0 + \epsilon D_1 + O(\epsilon^2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + O(\epsilon^2) \quad (27)$$

时滞项可以表示成如下形式

$$x(t-\tau) = x_0(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) + \epsilon x_1(T_0 - \tau, T_1 - \epsilon\tau) + \dots = x_0(T_0 - \tau, T_1) + \epsilon[x_1(T_0 - \tau, T_1) - \tau D_1 x_0(T_0 - \tau, T_1)] + O(\epsilon^2) \quad (28)$$

将方程(26)~(28)代入方程(25)中,并以 ϵ 的幂次进行升序排列,可得一系列线性偏微分方程 $O(\epsilon^0)$:

$$D_0^2 x_0 - (a+b)\tau_c^2 x_0 + P\tau_c^2 x_{2\tau_0} + D\tau_c D_0 x_{2\tau_0} + F_r \tau_c^2 x_{1\tau_0} = 0$$

$O(\epsilon^1)$:

$$D_0^2 x_1 - (a+b)\tau_c^2 x_1 + P\tau_c^2 x_{2\tau_1} + D\tau_c D_0 x_{2\tau_1} + F_r \tau_c^2 x_{1\tau_1} = -\{DD_0 x_{2\tau_0} + 2[F_r x_{1\tau_0} + Px_{2\tau_0} - (a+b)x_0]\tau_c\}\mu_1 + p_{030}(D_0 x_{2\tau_0})^3 + (p_{012} x_{1\tau_0}^2 + p_{111} x_{1\tau_0} x_{2\tau_0} + p_{210} x_{2\tau_0}^2)D_0 x_{2\tau_0} + (p_{021} x_{1\tau_0} + p_{120} x_{2\tau_0})(D_0 x_{2\tau_0})^2 + (2P\tau_c^2 - D\tau_c)D_1 x_{2\tau_0} + 2\tau_c DD_0 D_1 x_{2\tau_0} - 2D_0 D_1 x_0 + F_r \tau_c^2 D_1 x_{1\tau_0} + p_{003} x_{1\tau_0}^3 + p_{102} x_{2\tau_0} x_{1\tau_0}^2 + p_{201} x_{2\tau_0}^2 x_{1\tau_0} + p_{300} x_{2\tau_0}^3 + \rho_g x_0^3 \quad (29)$$

假设方程(29)中 ϵ 零次幂方程解的一般形式如下

$$x_0 = R(T_1)e^{i\omega_c \tau_c T_0} + \overline{R}(T_1)e^{-i\omega_c \tau_c T_0}$$

$$x_{1\tau_0} = R(T_1)e^{i\omega_c \tau_c (T_0-1)} + \overline{R}(T_1)e^{-i\omega_c \tau_c (T_0-1)}$$

$$x_{2\tau_0} = R(T_1)e^{i\omega_c \tau_c (T_0-2)} + \overline{R}(T_1)e^{-i\omega_c \tau_c (T_0-2)} \quad (30)$$

将方程(30)代入方程(29)的 ϵ 一次幂方程中,可得久期项

$$[2(a+b)\tau_c - (i\omega_c D + 2P)\tau_c]e^{-2i\omega_c \tau_c} - 2\tau_c F_r e^{-i\omega_c \tau_c} R(T_1)\mu_1 + \{[2P\tau_c + D(2i\omega_c \tau_c - 1)]\tau_c e^{-2i\omega_c \tau_c} + F_r \tau_c^2 e^{-i\omega_c \tau_c} - 2i\omega_c \tau_c \dot{R}(T_1) + \{3\rho_g + p_{102} - i\omega_c \tau_c p_{012} + (2\omega_c^2 \tau_c^2 p_{021} + 3p_{003} + 2p_{201})e^{-i\omega_c \tau_c} + [3i\tau_c^3 \omega_c^3 p_{030} + p_{120} \omega_c^2 \tau_c^2 + i\tau_c \omega_c (2p_{012} + p_{210}) + 2p_{102} + 3p_{300}]\tau_c e^{-2i\omega_c \tau_c} + (-p_{021} \omega_c^2 \tau_c^2 + ip_{111} \omega_c \tau_c + p_{201})e^{-3i\omega_c \tau_c}\}R^2(T_1)\overline{R}(T_1) = 0 \quad (31)$$

由方程(31)可以导出 $\dot{R}(T_1)$ 的表达式

$$\dot{R}(T_1) = \gamma R(T_1)\mu_1 + \Delta R^2(T_1)\overline{R}(T_1) \quad (32)$$

其中

$$\gamma = \frac{i\omega_c D - 2(a+b)e^{2i\omega_c \tau_c} + 2F_r e^{i\omega_c \tau_c} + 2P}{2(i\omega_c D + P)\tau_c - D - 2i\omega_c e^{2i\omega_c \tau_c} + F_r \tau_c e^{i\omega_c \tau_c}}$$

$$\Delta = \frac{\Delta_1}{(2(i\omega_c D + P)\tau_c - D - 2i\omega_c e^{2i\omega_c \tau_c} + F_r \tau_c e^{i\omega_c \tau_c})\tau_c}$$

$$\Delta_1 = (i\omega_c \tau_c p_{012} - p_{102} - 3\rho_g)e^{2i\omega_c \tau_c} - 3i\omega_c^3 \tau_c^3 p_{030} - 2p_{102} + (\omega_c^2 \tau_c^2 p_{021} - i\omega_c \tau_c p_{111} - p_{201})e^{-i\omega_c \tau_c} - \omega_c^2 \tau_c^2 p_{120} - 3p_{300} - (2\omega_c^2 \tau_c^2 p_{021} + 3p_{003} + 2p_{201})e^{i\omega_c \tau_c} - i\omega_c \tau_c (p_{210} + 2p_{012}) \quad (33)$$

结合式(24)的小参数假设,引入如下变换:

$$R(T_1) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rho(T_1) e^{i\psi(T_1)} \quad (34)$$

其中 $\rho(T_1)$ 为分岔解的振幅, $\psi(T_1)$ 为分岔解的相位. 将式(34)中代入式(32),分离实部虚部且转换为原来的时间尺度,可得

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \left[\text{Re}\gamma \cdot \mu + \frac{1}{4} \text{Re}\Delta \cdot \rho^2(t) \right] \rho(t) \quad (35)$$

$\text{Re}\gamma$ 的符号可确定特征根穿越虚轴的方向,通过庞加莱—李雅普诺夫常数 $\text{Re}\Delta$ 的符号可确定 Hopf 分岔的类型. 如果 $\text{Re}\Delta > 0$,则为亚临界 Hopf 分岔,对应的分岔周期运动不稳定;如果 $\text{Re}\Delta < 0$,则为超临界 Hopf 分岔,对应的分岔周期运动是稳定的. 稳态分岔周期运动的振幅为

$$\rho = 2\sqrt{-\frac{\text{Re}\gamma}{\text{Re}\Delta}}(\tau - \tau_c) \quad (36)$$

3 讨论

本节结合多尺度法所得的解析结果对该模型关于时滞的 Hopf 分岔进行分析,并使用 MAT-

LAB 程序工具包 DDE-BIFTOOL^[25] 对上述结果进行验证,以解释时滞、足部扭转刚度、足部反馈增益以及踝关节饱和力矩极限在人体站立平衡中的作用.讨论所选参数为表 1 参数以及图 2 中 M 点对应的位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D .

根据方程(32),可确定图 4 和图 5 中稳定边界均发生超临界 Hopf 分岔.表 2 为 $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$, $\alpha=15\text{Nm}$ 时,不同足部扭转刚度 k_f 所对应的临界时滞、临界频率以及 Hopf 分岔类型.

表 2 不同足部扭转刚度对 Hopf 分岔的影响					
Table 2 The influence of foot torsional stiffness on Hopf bifurcations					
k_f/Nm	τ_c/s	$\frac{\omega_c}{2\pi}/\text{Hz}$	$\text{Re}\gamma$	$\text{Re}\Delta$	类型
250	0.1212	0.411	2.358	-349.16	超临界
500	0.1127	0.492	2.315	-360.59	超临界
1000	0.1061	0.558	2.292	-372.92	超临界
2500	0.1006	0.615	2.278	-385.12	超临界
5000	0.0984	0.638	2.272	-390.52	超临界

当足部反馈增益 $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$,肌肉饱和力矩极限 $\alpha=15\text{Nm}$ 时,不同足部扭转刚度下分岔周期解振幅关于时滞的分岔图,如图 6 所示.结合图 2、图 4 以及表 2 可知,随着足部扭转刚度的增大,人体对应的临界反应时滞随之减小,稳定区域的面积和频率增大,说明 Hopf 分岔提前出现,且晃动频率增大,从而更容易发生跌倒,不利于人体平衡.为了延迟 Hopf 分岔的出现,可以选择通过调整鞋垫刚度以改变足部扭转刚度.

当足部扭转刚度 $k_f=500\text{Nm}$,肌肉饱和力矩极限 $\alpha=15\text{Nm}$ 时,不同足部增益下分岔周期解振幅关于时滞的分岔图,如图 7 所示.随着足部增益的增大,人体对应的临界反应时滞随之减小,与增大足部扭转刚度的影响类似.

由图 6 和图 7 可知,对于固定的位置反馈增益 P 和速度反馈增益 D ,在时滞小于这组参数下的临界时滞时,平衡点稳定;在时滞略大于临界时滞时,平衡点失去稳定性,对应出现超临界 Hopf 分岔现象.此时系统受到外界小扰动后,直立位置附近会出现小幅度稳定振荡,即人体发生小幅度姿势摇摆,但仍能保持站立平衡而不会导致跌倒.

当足部扭转刚度 $k_f=500\text{Nm}$,足部增益 $F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$ 时,不同肌肉饱和力矩极限下分岔

周期解振幅关于时滞的分岔图,如图 8 所示.当踝关节肌肉饱和力矩极限增大时,系统分岔周期运动的振幅幅值会增大,这表明人体肌肉(主要是腿部肌肉)状态对人体平衡的影响;在肌肉正常活动状态下,腿部肌肉越强,人体在外部扰动下能容许的

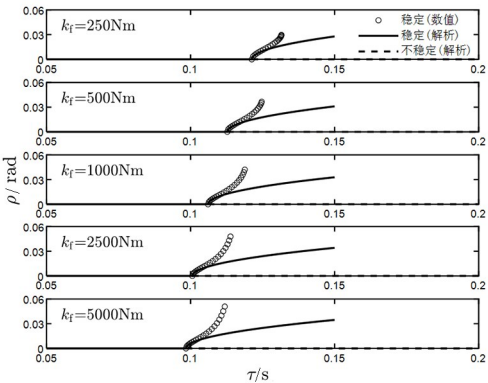


图 6 不同足部扭转刚度时分岔周期解振幅关于时滞的分岔图($F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$, $\alpha=15\text{Nm}$)

Fig. 6 The bifurcation diagrams of bifurcated oscillation amplitude versus time delay for different foot torsional stiffness ($F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$, $\alpha=15\text{Nm}$)

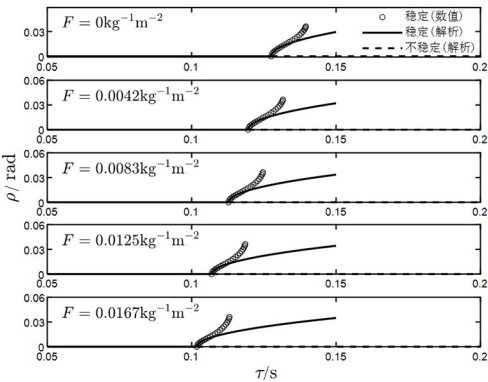


图 7 不同足部反馈增益时分岔周期解振幅关于时滞的分岔图($k_f=500\text{Nm}$, $\alpha=15\text{Nm}$)

Fig. 7 The bifurcation diagrams of bifurcated oscillation amplitude versus time delay for different foot feedback gains ($k_f=500\text{Nm}$, $\alpha=15\text{Nm}$)

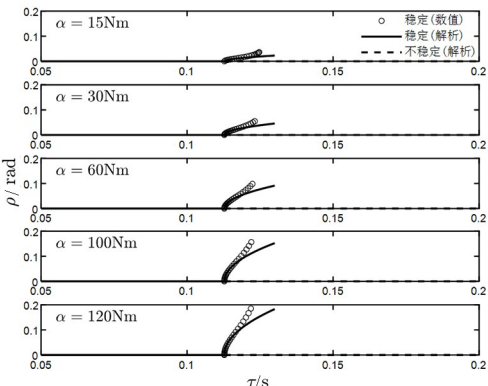


图 8 不同肌肉饱和力矩时分岔周期解振幅关于时滞的分岔图($F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$, $k_f=500\text{Nm}$)

Fig. 8 The bifurcation diagrams of bifurcated oscillation amplitude versus time delay for different muscle saturation torques ($F=0.0083\text{kg}^{-1}\text{m}^{-2}$, $k_f=500\text{Nm}$)

摇摆幅度就越大,人更不容易跌倒.然而,对于肌肉逐渐萎缩的老年人,这意味着即使比较小的外界扰动也很容易导致跌倒受伤.

图6~图8中实线对应由式(36)确定的多尺度法解析结果,圆圈对应DDE-BIFTOOL计算的数值结果.由图可知,在临界时滞附近时,数值结果与解析结果一致,验证了解析结果的正确性.本文Hopf分岔分析为平衡点附近的局部分岔分析,随着时滞的增大,解析解与数值解的差距会增大.

结合图6~图8可知,以足部反馈增益对应的时滞为分岔参数,考虑足底扭转刚度、足部反馈增益以及肌肉饱和力矩极限对人体平衡的影响,系统均出现了超临界Hopf分岔现象.足底扭转刚度和足部反馈增益改变了超临界Hopf出现的时间,而肌肉饱和极限改变了周期解振幅的大小.文献[12]中考虑了加速度信号对人体平衡的影响,发现随着加速度增益的增加,临界时滞增大,但分岔类型由超临界Hopf变为亚临界Hopf.本文考虑了足底力反馈,随着反馈增益增大,临界时滞减小,分岔类型是超临界Hopf分岔.这表明加速度反馈与足底力反馈对人体平衡的影响不同,后续需要综合考虑这两类反馈对人体平衡的影响.

在实际的人体平衡控制中,中枢神经系统会对各种影响人体平衡的因素(如控制增益、反应时滞、足底接触状况等)进行权衡,但这种权衡的机制仍有待进一步研究.考虑足底接触的影响相当于增加了感知输入,在一定程度上有利于人体平衡的稳定性,这表明人体极有可能结合多种感知器官的输入信号对人体平衡进行控制,从而维持人体在外界扰动下的平衡.

4 结论

在足部压力反馈时滞、位移反馈时滞、速度反馈时滞为1:2:2的情况下,本文考虑足底扭转刚度影响,开展了时滞反馈控制人体平衡动力学研究.关于线性稳定性的分析表明,当时滞不变,随着足底扭转刚度和足部反馈增益的增大,关于位置反馈增益和速度反馈增益的稳定区域逐渐向左下方移动,对应的稳定区域面积增大;当位置反馈增益和速度反馈增益不变,随着足底扭转刚度和足部反馈增益的增大,临界时滞减小,临界频率增大.关于时滞的Hopf分岔分析表明,考虑足底扭转刚度、

足部增益以及肌肉饱和极限对人体平衡的影响,系统均出现了超临界Hopf分岔现象,增大足部扭转刚度或足部反馈增益不利于人体平衡.

与以往研究的相比,本文针对考虑足底反馈的人体平衡动力学开展了研究,加深了对人体平衡动力学现象的理解,有助于从多感官输入信号方面解释人体平衡机理,研究结果可为防跌辅助装置的设计提供理论支持.本文的研究仍有待进一步的实验数据支持.

参考文献

- [1] WORLD HEALTH ORGANIZATION. Falls [EB/OL]. (2021-4-26) [2023-11-15]. <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/falls>.
- [2] COLLINS J J, IMHOFF T T, GRIGG P. Noise-enhanced tactile sensation [J]. *Nature*, 1996, 383: 770.
- [3] PRIPLATA A, NIEMI J, SALEN M, et al. Noise-enhanced human balance control [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(23): 238101.
- [4] 孟青云, 谈士力, 喻洪流, 等. 基于青年人足底压力测试的步态实验研究[J]. *生物医学工程学杂志*, 2014, 31(5): 984-988+1000.
MENG Q Y, TAN S L, YU H L, et al. Experimental research of gaits based on young plantar pressure test [J]. *Journal of Biomedical Engineering*, 2014, 31(5): 984-988+1000. (in Chinese)
- [5] CHIU M C, WU H C, CHANG L Y, et al. Center of pressure progression characteristics under the plantar region for elderly adults [J]. *Gait & Posture*, 2013, 37(3): 408-412.
- [6] GIBBONS C T, AMAZEEN P G, LIKENS A D. Effects of foot placement on postural sway in the anteroposterior and mediolateral directions [J]. *Motor Control*, 2019, 23(2): 149-170.
- [7] MEYER D E, OSMAN A M, IRWIN D E, et al. Modern mental chronometry [J]. *Biological Psychology*, 1988, 26(1/2/3): 3-67.
- [8] NIJHAWAN R. Visual prediction: psychophysics and neurophysiology of compensation for time delays [J]. *The Behavioral and Brain Sciences*, 2008, 31(2): 179-198.
- [9] STEPAN G. Delay effects in the human sensory system during balancing [J]. *Philosophical Transactions Series A, Mathematical, Physical, and Engi-*

- neering Sciences, 2009, 367(1891): 1195—1212.
- [10] HAJDU D, MILTON J, INSPERGER T. Extension of stability radius to neuromechanical systems with structured real perturbations [J]. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering: a Publication of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, 2016, 24(11): 1235—1242.
- [11] INSPERGER T, MILTON J, STEPAN G. Acceleration feedback improves balancing against reflex delay [J]. Journal of the Royal Society, Interface, 2013, 10(79): 20120763.
- [12] ZHANG L, STEPAN G, INSPERGER T. Saturation limits the contribution of acceleration feedback to balancing against reaction delay [J]. Journal of the Royal Society Interface, 2018, 15 (138): 20170771.
- [13] LI Y, LEVINE W S, LOEB G E. A two-joint human posture control model with realistic neural delays [J]. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, 2012, 20 (5): 738—748.
- [14] ASAI Y, TATEYAMA S, NOMURA T. Learning an intermittent control strategy for postural balancing using an EMG-based human-computer interface [J]. PLoS One, 2013, 8(5): e62956.
- [15] YOSHIKAWA N, SUZUKI Y, KIYONO K, et al. Intermittent feedback control strategy for stabilizing inverted pendulum on manually controlled cart as analogy to human stick balancing [J]. Frontiers in Computational Neuroscience, 2016, 10: 34.
- [16] ASAI Y, TASAKA Y, NOMURA K, et al. A model of postural control in quiet standing: robust compensation of delay-induced instability using intermittent activation of feedback control [J]. PLoS One, 2009, 4(7): e6169.
- [17] MILTON J G, INSPERGER T, COOK W, et al. Microchaos in human postural balance: sensory dead zones and sampled time-delayed feedback [J]. Physical Review E, 2018, 98(2): 022223.
- [18] GYEBROSZKI G, CSERNÁK G, MILTON J G, et al. The effects of sensory quantization and control torque saturation on human balance control [J]. Chaos, 2021, 31(3): 033145.
- [19] MILTON J, INSPERGER T. Acting together, destabilizing influences can stabilize human balance [J]. Philosophical Transactions Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, 2019, 377(2153): 20180126.
- [20] WANG H, LIU K, XIAO J. The affect of multi-source time delay to the human balance based on robust control model [J]. International Journal of Computer Science Issues, 2013, 10(1): 549.
- [21] VETTE A H, MASANI K, NAKAZAWA K, et al. Neural-mechanical feedback control scheme generates physiological ankle torque fluctuation during quiet stance [J]. IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering, 2010, 18(1): 86—95.
- [22] FALLON J B, BENT L R, MCNULTY P A, et al. Evidence for strong synaptic coupling between single tactile afferents from the sole of the foot and motoneurons supplying leg muscles [J]. Journal of Neurophysiology, 2005, 94(6): 3795—3804.
- [23] LORAM I D, LAKIE M. Direct measurement of human ankle stiffness during quiet standing: the intrinsic mechanical stiffness is insufficient for stability [J]. The Journal of Physiology, 2002, 545(3): 1041—1053.
- [24] MILTON J, MEYER R, ZHVANETSKY M, et al. Control at stability's edge minimizes energetic costs: expert stick balancing [J]. Journal of the Royal Society, Interface, 2016, 13 (119): 20160212.
- [25] ENGELBORGH S K, LUZYANINA T, SAMAEY G. DDE-BIFTOOL v. 2.00: a MATLAB package for bifurcation analysis of delay differential equations: Report TW330 [R]. Leuven, Belgium; Katholieke Universiteit Leuven, 2001.