

# 基于代理模型优化的转接盘多约束参数化设计<sup>\*</sup>

任晨辉<sup>†</sup> 张永强 罗金汉 邢博

(中国航发商用航空发动机有限责任公司, 上海 200241)

**摘要** 通过截面尺寸参数化建立旋转转接盘有限元分析模型, 以其固有频率与局部最大应力为约束条件, 对转接盘进行轻量优化设计. 针对优化模型设计变量多、计算成本高等特点, 采用考虑空间约束条件的径向基函数代理模型拟合与全局随机优化算法相结合, 获取优化设计结果. 计算表明, 转接盘一阶固有频率、局部最大应力拟合误差满足许用值要求, 拟合模型  $R^2$  值分别为 0.979 与 0.938. 不同转速下优化解的频率与应力预报值与真实值相对偏差小于 10%, 绝对偏差值最大分别为 35.2 Hz 与 16.2 MPa, 证明所采用的优化流程可有效用于转接盘设计.

**关键词** 转接盘, 参数化设计, 代理模型优化, 径向基函数

中图分类号: V232.3

文献标志码: A

## Parametric Design of a Rotary Adapter under Multiple Response Constraints Based on Surrogate Model Optimization<sup>\*</sup>

Ren Chenhui<sup>†</sup> Zhang Yongqiang Luo Jinhan Xing Bo

(AECC Commercial Aircraft Engine Co. LTD., Shanghai 200241, China)

**Abstract** Finite element analysis models were established for a rotary adapter by parameterizing the cross-section outlines. With the natural frequency and local maximum stress as constraints, lightweight optimization design of the adapter plate was carried out. Based on the amount of variables and high calculation cost of the optimization model, the radial basis function surrogate model taking in account spatial constraints was combined with global random optimization algorithm. Results show that the fitting errors of the first natural frequency and local maximum stress of the adapter meet the requirements of allowable values, and the fitting  $R^2$  values are 0.979 and 0.938 respectively. The relative deviations between the predicted value of frequency and stress of the optimized solution and the true value at different speeds are less than 10%, and the maximum absolute deviation values are 35.2 Hz and 16.2 MPa, respectively. The optimization process adopted can be effectively used for the design of the adapter.

**Key words** rotary adapter, parametric design, surrogate model optimization, radial basis function

2023-11-04 收到第 1 稿, 2023-12-02 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 上海市“科技创新行动计划”启明星项目(22YF1453500), Shanghai Science and Technology Innovation Action Plan "Phosphor Project" (22YF1453500).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: renchenhui@hotmail.com

## 引言

对于航空发动机、燃气轮机等旋转机械,轮盘等转动部件的设计受到广泛关注,其应在满足性能要求条件下尽可能追求轻质化,以提高机械能效<sup>[1-3]</sup>,诸多学者因此开展了大量不同材料与构型的研究和试验<sup>[4]</sup>.其中旋转转接盘用于轴间转接或转轴与轴端部件转接应用广泛,例如在发动机轴端安装遥测系统可实现转子测试信号传输<sup>[5]</sup>,为结构设计提供重要支撑.目前对于转接盘的设计一般由经验出发结合试验或仿真考核,针对性地结构优化设计未见报道.

在大型结构工程应用上为了满足高效率、高精度的要求,基于动态代理模型的优化方法得到了越来越多的关注<sup>[6,7]</sup>.代理模型是按照相似性原理,对复杂物理性质中抽象形成的数学计算模型求解,使用数学方法能够简化原有物理问题,因而适用于优化等需要进行大量计算的场景.Wang等<sup>[8]</sup>提出了自适应响应面的代理模型方法,在全局收敛性和优化效率方面表现出了较大的优势.Jones等<sup>[9]</sup>基于Kriging模型提出了一种高效全局优化方法(Efficient Global Optimization, EGO).Viana等<sup>[10]</sup>在EGO概念的基础上提出了一种基于多模型的高效全局优化方法(Multiple Surrogate Efficient Global Optimization, MSEGO),每次可以补充多个样本点.曾峰等<sup>[11]</sup>利用最小化置信方法的全局搜索性和信赖域的局部搜索特性,提出了一种基于Kriging模型的动态代理模型,提高了全局收敛性和优化效率.Shi等<sup>[12]</sup>提出了一种基于兴趣采样区域的高效序列径向基函数(Radial Basis Function, RBF)代理模型方法,高效求解了一个卫星系统多学科优化设计问题.在这类型的研究中,大多数动态代理模型都是只对目标函数进行拟合,而未考虑优化问题的约束边界,另一方面,将轮盘常用的线型及拓扑优化设计方法<sup>[13,14]</sup>用于转接盘,设计和加工效率较低,转接盘结构相对简单因此采用参数优化更为方便.

本文以外圈连接转轴内圈安装独立部件的转接盘为例,首先将其子午面几何轮廓参数化,然后分别建立求解固有频率的动力学模型与受离心载荷作用的静力学模型,并基于径向基函数拟合建立代理模型,最后以最小质量为目标函数,对转接盘

几何形状进行优化设计.

## 1 转接盘设计模型

转接盘参数化构型如图1所示,在其外圈设置安装边连接转轴(安装边一般为螺栓连接,开有通孔或螺纹孔,本文所提的转接盘设计主要针对其子午面几何轮廓,安装边局部方案可在其基础上进行二次设计,因此为方便起见,本文模型安装边处未开孔,内圈同理),内圈设置安装边用于连接具有一定质量的独立部件,内安装边设置止口用于装配定心.

参数化构型的设计变量包括角度 $\alpha$ 、距离 $d_1$ 、距离 $d_2$ 与厚度 $t$ ,给定参数为内圈半径 $r$ 、外圈半径 $R$ 、内圈安装边宽度 $w_1$ 、外圈安装边宽度 $w_2$ 、内圈止口宽度 $w_3$ 及止口高度 $h$ .此外,内圈独立部件假设为集中质量 $m$ ,重心位于旋转盘中轴线,距内安装面高度 $H_m$ ,均为已知参数.

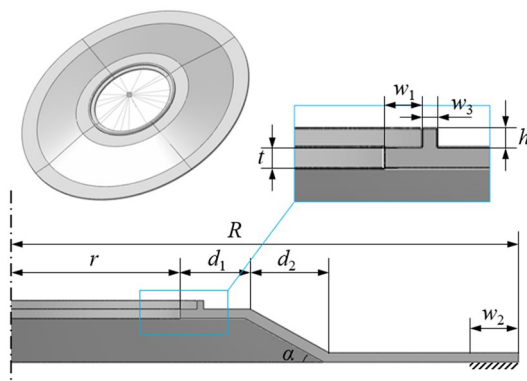


图1 转接盘参数化构型

Fig. 1 Parametric configuration of a rotary adapter

转接盘在旋转工况下,主要考虑两方面的强度裕度,分别是其固有频率避开转动频率的共振裕度,以及离心载荷下局部应力对材料许用值的裕度,因此在设计转接盘时需对这两种工况分别进行考核<sup>[3,4]</sup>.采用有限元分析,两种工况均在外安装边进行固支约束,在内安装边独立部件重心处创建集中质量点,与内安装面建立MPC多点耦合约束.

## 2 数学优化模型

在对转接盘几何外形进行参数化后,建立数学优化模型寻找满足一定设计条件和特性约束的一组几何参数,可以方便地实现结构设计,同时达到轻量化目的,提高材料利用率<sup>[13]</sup>.根据上节,本文中建立的数学优化模型为

$$\begin{cases}
 \text{find: } \mathbf{X} = \{\alpha, d_1, d_2, t\}^T \\
 \text{min: } \text{mass}(\mathbf{X}) \\
 1 \leq \alpha \leq 55 \text{ mm} \\
 16 \leq d_1 \leq 180 \text{ mm} \\
 10 \leq d_2 \leq 168 \text{ mm} \\
 4 \leq t \leq 8 \text{ mm} \\
 \text{s. t.: } d_1 + d_2 \leq R - r - w_2 \\
 \text{freq}(\mathbf{X}) \geq 3n/60 \text{ Hz} \\
 \sigma_{\text{Mises}}(\mathbf{X}) \leq 300 \text{ MPa} \\
 d_2 \tan(\alpha) \leq 30 \text{ mm}
 \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{X}$  为设计参数向量,  $\text{mass}(\mathbf{X})$  为转接盘质量, 可由回转体积分公式得到,  $\text{freq}(\mathbf{X})$  为转接盘一阶固有频率,  $\sigma_{\text{Mises}}(\mathbf{X}, n)$  为转速等于  $n$  (单位为 rpm) 时转接盘盘心局部最大 Mises 等效应力。设计参数向量除受自身上下限取值约束外, 还受一阶固有频率、最大局部应力、轴向空间限制(轴向跨度等于  $d_2$  与角度  $\alpha$  正切值之积)等三个方面的约束条件。

本文中, 取外圈半径  $R=300\text{mm}$ 、内圈半径  $r=100\text{mm}$ 、内圈安装边宽度  $w_1=10\text{mm}$ 、外圈安装边宽度  $w_2=16\text{mm}$ 、内圈止口宽度  $w_3=4\text{mm}$ 、高度  $h=5\text{mm}$ 、内圈独立部件质量  $m=3\text{kg}$ 、重心距内安装面高度  $H_m=20\text{mm}$ 。旋转盘材料为钢, 弹性模量为  $E=200\text{GPa}$ , 泊松比 0.3, 密度  $\rho=7850\text{kg/m}^3$ 。

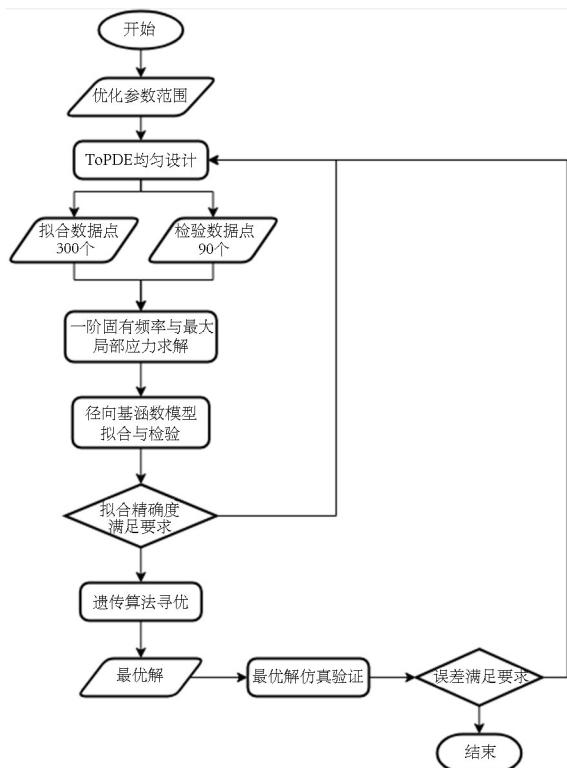


图 2 优化设计流程

Fig. 2 Flow chart of the optimization design process

对于转接盘的模态分析与局部应力分析, 采用的三维计算模型需要划分较细的网格, 将其带入全局优化算法迭代成本较高, 而一般的梯度算法极易陷入局部最优解, 很难得到理想的解。基于代理模型的全局优化(Surrogate-model-based Global Optimization, SGO)可以有效降低“昂贵模型”评估的次数, 利于提高基于数值仿真的优化问题的求解效率<sup>[6]</sup>。因此本文基于含约束条件的试验设计(Design of Experiments, DOE)确定试验点与误差检验点采样, 逐一完成分析后通过径向基函数拟合分别建立转接盘一阶固有频率与最大局部应力的代理模型, 最后将其引入优化约束条件利用遗传算法(Genetic Algorithm, GA)完成优化求解, 优化设计流程如下图所示。

### 3 试验设计采样与代理模型拟合

常规的多因素试验设计采样方法有全因子设计、正交设计、完全随机化设计、均匀设计拉丁超立方设计等, 本文中转接盘几何参数除单变量上下限外, 高度  $d_2 \cdot \tan(\alpha)$  与宽度  $(d_1 + d_2)$  两项均存在上限值, 在进行采样时考虑参数空间几何约束条件可以提高优化结果的拟合精度<sup>[15]</sup>。因此本文基于Wang等<sup>[16]</sup>提出的二阶段差分进化算法(Two-Phase Differential Evolution, ToPDE)对试验点与误差检验点进行采样, 该算法针对连续的线性非线性等式不等式约束的可行域均匀设计问题, 可满足代理模型拟合采样要求。其原理是将均匀设计问题转换为一个单目标优化问题, 并将优化过程分解为两个阶段: 第一阶段, 利用聚类差分进化(Differential Evolution, DE)算法引导种群快速向可行域区域移动, 实现种群的约束违反程度最小化; 第二阶段, 通过迭代加点的方式最大化种群个体之间的最小距离, 实现种群个体在约束区域内的均匀分布。

选取 300 个试验点作为代理模型拟合点, 另取 90 个误差检验点对拟合结果进行误差评估。采用的径向基函数表达式<sup>[17]</sup>如下

$$y = f(\mathbf{X}) = \alpha_{N+1} + \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(\mathbf{X}) \quad (2)$$

式中,  $\mathbf{X}$  为自变量向量,  $y$  为函数值,  $N$  为参数空间拟合点个数, 系数向量  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, \alpha_{N+1})^T$  可通过将  $N$  个拟合点代入等式(1)并联立  $\sum \alpha = 0$  求解得到, 函数  $g_i(\mathbf{X})$  表达式为

$$g_i(\mathbf{X}) = \left[ \sum_{j=1}^M \left( \frac{\mathbf{X}_j - \mathbf{A}_{ij}}{\max(\mathbf{A}_{1j} : \mathbf{A}_{Nj}) - \min(\mathbf{A}_{1j} : \mathbf{A}_{Nj})} \right)^2 \right]^c \quad (3)$$

式中,矩阵 $\mathbf{A} \in R^{N \times M}$ 为 $N$ 个拟合点的自变量值, $M$ 为自变量维度, $c$ 为拟合参数.

如前所述,分别在给定几何约束条件下生成300个拟合数据点与90个误差检验点,然后建立有限元模型进行一阶固有频率与最大局部静应力分析,对应离心载荷取转速 $n=15\,000\text{rpm}$ .有限元分析采用中间带节点的10节点四面体单元,单元尺寸不大于3mm并经过收敛性验证,单元数约30万个,节点数约50万个,网格采用旋转扫描划分,长宽比、偏斜度和内角满足要求.将计算得到的300个固有频率值和应力值分别拟合,可产生两组径向基函数对90个误差检验点进行预报,预报值与误差检验点的有限元实际分析值如下图3所示,横轴 Predicted 表示该数据点拟合函数预报结果,纵轴 Actual 表示有限元实际分析值.

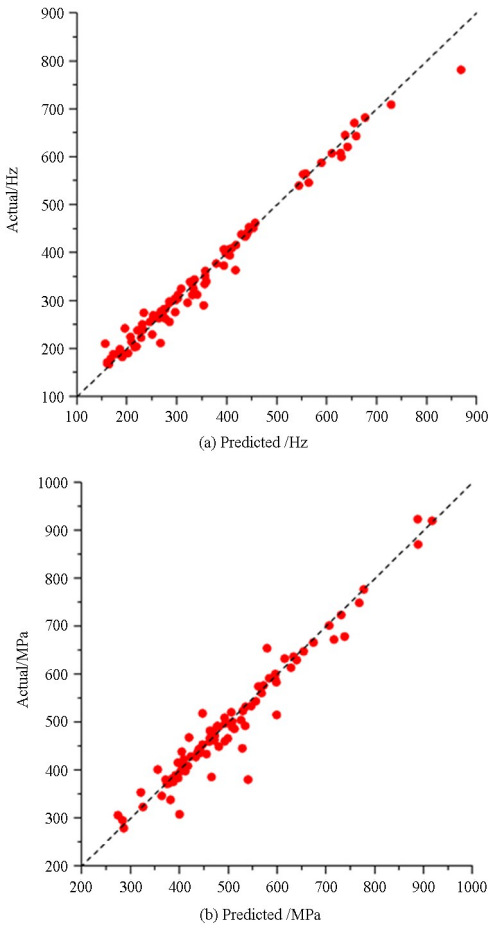


图3 径向基函数 RBF 模型拟合结果 (a)一阶固有频率拟合结果, (b)最大局部应力拟合结果  
Fig. 3 Fitting Results of RBF Models (a) the first order natural frequency, (b) the maximal local stress

对于上述结果,可通过归一化最大误差(Maximum-Error-Normalized, MEN)、平均误差(Average-Error-Normalized, AEN)、均方根误差(Root-Mean-Square-Error-Normalized, RMSEN)与 $R$ 方估计来评估拟合精确度,即

$$MEN = \frac{\max |y_i - \hat{y}_i|}{\max(y_i) - \min(y_i)} \quad (4)$$

$$AEN = \frac{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K |y_i - \hat{y}_i|}{\max(y_i) - \min(y_i)} \quad (5)$$

$$RMSEN = \frac{\sqrt{\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (y_i - \hat{y}_i)^2}}{\max(y_i) - \min(y_i)} \quad (6)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^K (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^K (y_i - \bar{y})^2} \quad (7)$$

式中, $K$ 为拟合检验点个数,本文中取90,为拟合模型预报结果, $\hat{y}_i$ 为有限元分析得到的真实值, $\bar{y}$ 为真实值均值.计算结果如表1所示.

表1 拟合误差检验结果  
Table 1 Approximation error-checking results

参数	MEN	AEN	RMSEN	$R^2$
一阶固有频率	0.144 79	0.021 95	0.034 28	0.979 19
局部最大应力	0.248 59	0.031 06	0.050 36	0.938 03
许用范围	$\leq 0.3$	$\leq 0.2$	$\leq 0.2$	$\geq 0.9$

4 优化设计结果

拟合函数模型经验证后即可用于式(1)求解,如前所述,一阶固有频率与局部最大应力作为约束条件,最小化转接盘质量作为目标函数,对转接盘的几何参数进行寻求最优解.引入代理模型的一大优势就是优化过程可以方便地使用全局随机优化算法<sup>[7]</sup>,遗传算法是其中应用最广泛的算法之一,从问题解的串集开始搜索,同时处理多个个体,采用概率的变迁规则指导搜索方向,具有自组织、自适应和自学习性.

转接盘设计作为工程实际问题,必须考虑制造可实施性,因此几何尺寸的小数位数必须与制造能力和公差要求保持一致,因此本文中规定转接盘的设计参数均保留1位小数,为使优化结果满足该要求,将优化变量同乘10然后通过整数优化遗传算法<sup>[18]</sup>进行求解.



选取 3 个设计目标转速,分别为 10 000rpm、12 000rpm 与 15 000rpm,寻找满足条件的转接盘设计尺寸值,得到最优解后按有限元建模—分析流程进行复算,并与预报值(即频率与应力约束条件)相比,结果如表 2 所列。

表 2 优化结果与复算值				
Table 2 Optimization results and recalculated values				
参数		1	2	3
目标转速/rpm		10 000	12 000	15 000
$\alpha / ^\circ$		9.8	16.4	13.8
可行解/mm	$d_1$	54.3	60.7	49.2
	$d_2$	114.4	72.0	89.6
	$t$	4.0	5.6	7.1
目标函数值 (质量)/kg		8.14	11.5	14.48
轴向高差/mm		19.8	21.2	22.0
一阶频率/Hz	预报值	500.26	600.32	750.68
	仿真结果	535.49	589.14	782.45
	误差	-6.6%	1.9%	-4.1%
局部应力/MPa	预报值	298.26	299.59	496.98
	仿真结果	282.04	302.72	503.60
	误差	5.8%	-1.0%	-1.3%

三个设计目标转速对应的遗传算法进化过程与最优解如图 4 所示。图中“Number of variables”表示 4 个优化变量,依次为角度  $\alpha$ 、距离  $d_1$ 、距离  $d_2$  与厚度  $t$ ,为实现 0.1 精度的离散优化设计,优化变量值为实际值乘以 10;“Current best individual”代表每轮遗传个体中的最优值,图中即优化迭代停止时得到的最终可行解,可以看出随着遗传迭代进行,种群中最优个体惩罚函数值“Best penalty value”趋于稳定,优化达到收敛条件而终止。

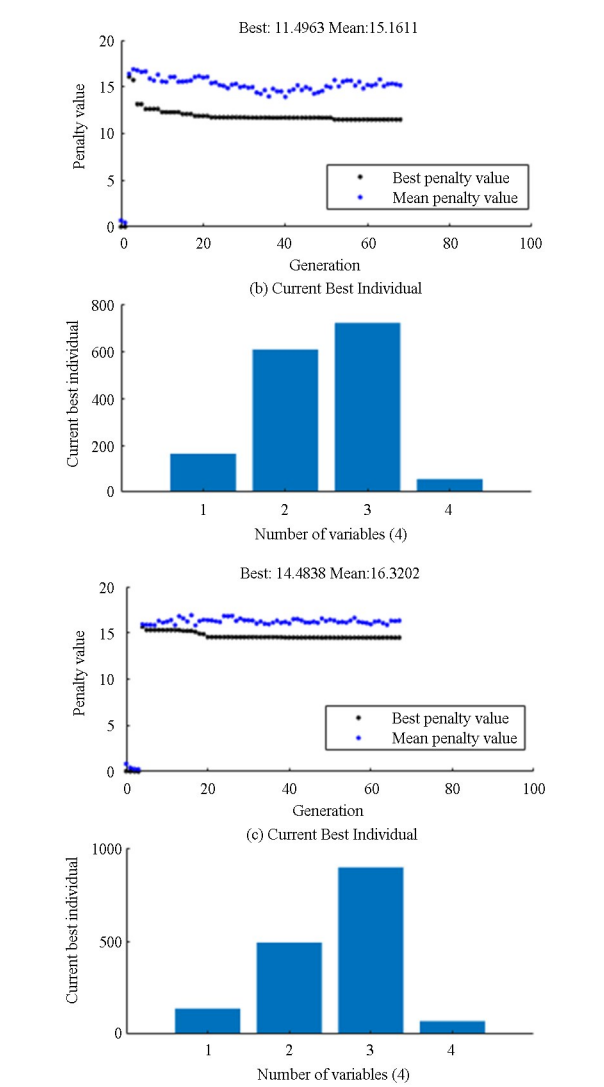
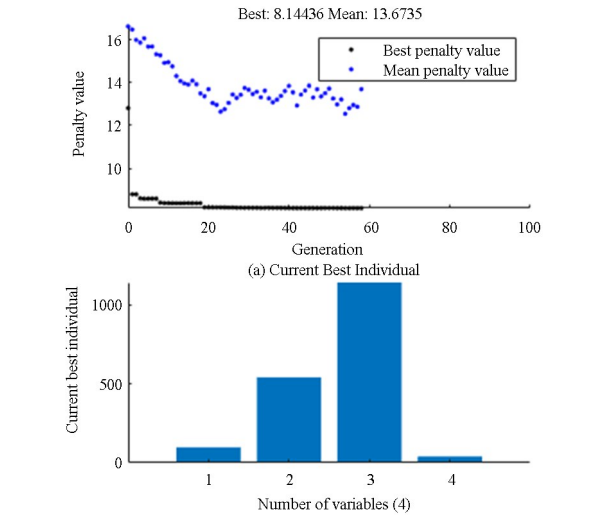


图 4 遗传算法进化过程与最优解  
(a 至 c 依次为 10 000rpm、12 000rpm 与 15 000rpm)  
Fig. 4 Evolution processes and optimal solutions of GA  
(from a to c: 10 000rpm, 12 000rpm and 15 000rpm)

由表 2 可知,不同转速下优化解的频率与应力预报值与真实值偏差最大为 6.6%,最小为 1.0%,小于 10%,优化结果有效。设计转速达到 15 000rpm 时,按约束条件  $\sigma_{Mises} \leq 300\text{MPa}$  已无法获得可行解,将许用应力上限增大至 500MPa,可得到优化解“3”,这说明在当前允许的几何设计域内已无法满足该工况,需采用强度性能更佳的材料,材料性能的提升拓宽了结构的设计边界。

作为对比,给出等厚度平面转接盘(即角度  $\alpha = 0$ )厚度分别为 4mm 与 8mm(本文设计限值)时的一阶频率与局部最大应力值,见表 3。可以看出,平面盘应力小于带折边的转接盘,但固有频率明显降低,无法满足要求,优化解“3”能满足 15 000rpm 工况需求,但质量仍小于 8mm 平面转接盘。

表3 等厚度平面转接盘计算值  
Table 3 Results of adapters with uniform thickness

参数		4.0mm	8.0mm
转接盘质量 /kg	/	8.00	15.89
一阶固有频率 /Hz	/	129.28	298.57
	$n=10\,000\text{ rpm}$	178.05	162.42
局部应力 /MPa	$n=12\,000\text{ rpm}$	256.39	233.88
	$n=15\,000\text{ rpm}$	400.61	365.45

5 结论

本文基于代理模型优化对旋转转接盘进行多工况约束的参数化设计,得到以下结论:

(1) 联合含约束条件设计域采样算法 ToPDE 与径向基函数 RBF 代理模型拟合,得到的转接盘一阶固有频率、局部最大应力拟合误差满足许用值要求,拟合模型  $R^2$  值分别为 0.979 与 0.938.

(2) 不同转速下优化解的频率与应力预报值与真实值相对偏差小于 10%,绝对偏差值最大分别为 35.2Hz 与 16.2MPa,优化结果有效.对于设计转速 15 000rpm 的优化设计,证明应力约束与最大转速相制约,采用高强度材料可拓宽原定几何尺寸范围的性能边界.

(3) 进一步地,对于局部应力的优化,以及子午面含不规则曲线或旋转面开孔的转接盘,可通过局部或全局拓扑优化实现.

参考文献

[1] 刘小刚,戴思成,吴振豪,等. 燃气涡轮发动机风扇盘拓扑优化 [J]. 航空动力学报, 2020, 35(6): 1121—1130.  
LIU X G, DAI S C, WU Z H, et al. Topology optimization of gas turbine engine fan disk [J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(6): 1121—1130. (in Chinese)

[2] 赖斌皓. 基于 OptiStruct 的涡轮盘拓扑优化设计技术研究 [D]. 长沙: 湖南大学, 2019.  
LAI B H. Research on topology optimization design technology of turbine disk based on OptiStruct [D]. Changsha: Hunan University, 2019. (in Chinese)

[3] 金小杰. 航空发动机转子超转破裂预测方法评估与应用 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2018.  
JIN X J. Evaluation and application of the overspeed burst prediction method on aero-engine rotor [D].

Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2018. (in Chinese)

[4] 魏大盛,冯俊淇,马梦弟,等. 航空发动机轮盘中心孔模拟试验件设计方法及试验验证 [J]. 航空动力学报, 2022, 37(10): 2157—2166.  
WEI D S, FENG J Q, MA M D, et al. Design method and test verification of simulated specimen of aeroengine disc center hole [J]. Journal of Aerospace Power, 2022, 37(10): 2157—2166. (in Chinese)

[5] 李仙丽,罗乘川,安奕忱,等. 基于遥测技术的发动机涡轮转子叶片动应力测量 [J]. 燃气涡轮试验与研究, 2014, 27(6): 53—56.  
LI X L, LUO C, AN Y C, et al. Measuring technology on dynamic stress of turbine rotor blades using telemetry [J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2014, 27(6): 53—56. (in Chinese)

[6] 张剑. 基于代理模型技术的高速列车性能参数设计及优化 [D]. 成都: 西南交通大学, 2015.  
ZHANG J. The high-speed train performance parameter design and optimization based on surrogate model technology [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2015. (in Chinese)

[7] 杨丽丽,孔祥龙,李文龙,等. 基于高保真度代理模型的卫星结构优化 [J]. 振动与冲击, 2021, 40(23): 208—215+222.  
YANG L L, KONG X L, LI W L, et al. Satellite structure optimization based on high fidelity surrogate model [J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(23): 208—215+222. (in Chinese)

[8] GARY WANG G, DONG Z M, AITCHISON P. Adaptive response surface method: a global optimization scheme for approximation-based design problems [J]. Engineering Optimization, 2001, 33(6): 707—733.

[9] JONES D R, SCHONLAU M, WELCH W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions [J]. Journal of Global Optimization, 1998, 13(4): 455—492.

[10] VIANA F A C, HAFTKA R T, WATSON L T. Efficient global optimization algorithm assisted by multiple surrogate techniques [J]. Journal of Global Optimization, 2013, 56(2): 669—689.

[11] 曾锋,周金柱. 集成最小化置信下限和信赖域的动态代理模型优化策略 [J]. 机械工程学报, 2017, 53(13): 170—178.

- ZENG F, ZHOU J Z. Optimization strategy for dynamic metamodel integrating minimize lower confidence bound and trust region [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2017, 53(13): 170—178. (in Chinese)
- [12] SHI R H, LIU L, LONG T, et al. Sequential radial basis function using support vector machine for expensive design optimization [J]. *AIAA Journal*, 2017, 55(1): 214—227.
- [13] 范俊, 尹泽勇, 王建军, 等. 轮盘概念设计中拓扑和形状同时优化方法 [J]. *北京航空航天大学学报*, 2015, 41(3): 456—465.
- FAN J, YIN Z Y, WANG J J, et al. Simultaneous topology and shape optimization method in conceptual design of disk [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 41(3): 456—465. (in Chinese)
- [14] 章胜, 赵明, 陆山, 等. 基于等强度理论的轮盘优化设计方法研究 [J]. *机械科学与技术*, 2013, 32(9): 1322—1326.
- ZHANG S, ZHAO M, LU S, et al. Research on an optimal method of disks based on the equivalent strength theory [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2013, 32(9): 1322—1326. (in Chinese)
- [15] REN C H, YANG D Q, LI Q. Impact resistance performance and optimal design of a sandwich beam with a negative stiffness core [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2019, 33(7): 3147—3159.
- [16] WANG Y, XU B, SUN G Y, et al. A two-phase differential evolution for uniform designs in constrained experimental domains [J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 21(5): 665—680.
- [17] HARDY R L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces [J]. *Journal of Geophysical Research*, 1971, 76(8): 1905—1915.
- [18] DEEP K, SINGH K P, KANSAL M L, et al. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 212(2): 505—518.