

# 跃迁系数对旋转 Timoshenko 梁弯曲振动的影响<sup>\*</sup>

邓彬<sup>1</sup> 胥奇<sup>1†</sup> 王艳丰<sup>2</sup> 李映辉<sup>1</sup>

(1. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 611756)

(2. 中国航发四川燃气涡轮研究院, 成都 610500)

**摘要** 在不同梁模型中, 轴向力对剪切力的贡献不同, 该特性可以使用跃迁系数进行描述. 本文讨论了当旋转导致轴向离心力存在时, 其跃迁系数对 Timoshenko 梁弯曲振动的影响. 首先推导了含跃迁系数的旋转 Timoshenko 梁弯曲振动微分方程. 然后使用微分变换法 (DTM) 对弯曲振动微分方程进行求解, 得到了系统的固有频率和振型. 最后分析了跃迁系数、转速、截面形状、高跨比等参数对系统振动的影响. 结果表明, 跃迁系数对旋转 Timoshenko 梁的固有频率和振型均有影响, 尤其在高转速、薄壁截面和大高跨比的情况下影响更加显著.

**关键词** 旋转 Timoshenko 梁, 弯曲振动, 微分变换法, 跃迁系数

中图分类号: O321

文献标志码: A

## Flapwise Bending Vibration of a Rotating Timoshenko Beam with Transition Parameter<sup>\*</sup>

Deng Bin<sup>1</sup> Xu Qi<sup>1†</sup> Wang Yanfeng<sup>2</sup> Li Yinghui<sup>1</sup>

(1. School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

(2. Sichuan Gas Turbine Establishment, Aero Engine Corporation of China, Chengdu 610500, China)

**Abstract** In different beam models, the contribution of axial force to shear force varies, and this characteristic can be described by using transition parameter. This paper studies the influence of the transition parameter on the flap-wise bending vibration of Timoshenko beams when rotational effects induce axial centrifugal force. At the beginning of the study, the flap-wise bending vibration differential equations for the rotating Timoshenko beam were derived, which considered the transition parameter. In the following section, the differential equations were solved by using differential transformation method (DTM). At the same time, the natural frequencies and mode-shapes of system were obtained. In the end, the effects of transition parameter, rotating speed, cross section shape, and height-to-length ratio were discussed. The results show that transition parameter has an impact on the natural frequencies and mode-shapes of rotating Timoshenko beams, with a more significant effect observed at high rotating speed, thin-walled cross section, and large height-to-length ratio.

**Key words** rotating Timoshenko beam, flap-wise bending vibration, differential transform method, transition parameter

2024-02-22 收到第 1 稿, 2024-03-20 收到修改稿.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金资助项目 (12072292), 四川省自然科学基金项目 (2022NSFSC0275, 2023NSFSC0067), National Natural Science Foundation of China (12072292), Natural Science Foundation of Sichuan Province (2022NSFSC0275, 2023NSFSC0067).

<sup>†</sup> 通信作者 E-mail: xuqi@swjtu.edu.cn

## 引言

工程领域之中存在大量的旋转结构,如风力发电机电机叶片<sup>[1]</sup>、涡轮发动机叶片<sup>[2]</sup>、旋转机械臂<sup>[3,4]</sup>、直升机旋翼<sup>[5]</sup>等,这些结构都可以简化为旋转梁模型.由于旋转带来的离心刚化<sup>[6]</sup>效果,旋转梁的固有频率、振型等振动特性与非旋转梁均不同.旋转结构往往长时间服役于恶劣的工作情况之下,如:涡轮发动机叶片在燃烧室受到高温高压的气动载荷作用<sup>[7]</sup>,直升机旋翼在冻雨天气受到表面结冰带来的附加质量作用<sup>[8]</sup>,风力发电机叶片在海上受支撑平台六自由度运动产生的惯性荷载作用<sup>[9]</sup>,这些因素都会严重影响旋转结构的动力学行为.建立合理的旋转梁模型,对旋转梁的弯曲振动行为进行准确求解分析,已经成为工业领域中的一项值得关心的问题.

学术界对于旋转梁模型进行了大量的研究,采用的梁模型主要基于 Euler-Bernoulli 理论<sup>[10]</sup>、Rayleigh 梁理论<sup>[11]</sup>和 Timoshenko 梁理论<sup>[12-15]</sup>.梁受到离心力作用的同时,往往会受到较大的气流扰动,气流扰动会带来横向的弯曲载荷.当梁高速旋转且高跨比较大时,需要将剪切变形与转动惯量对弯曲振动产生的影响进行考虑. Du 等<sup>[12]</sup>基于 Timoshenko 梁理论对带有末端质量的旋转梁进行研究并与 Euler-Bernoulli 梁的结果进行了对比. Han 等<sup>[13]</sup>利用 Hamilton 原理建立了旋转 Timoshenko 梁弯-扭耦合振动的动力学模型,分析了科氏力对振动响应的影响. Zhu<sup>[14]</sup>研究了轮毂半径比、转速比、高跨比等对旋转锥形 Timoshenko 梁固有频率和各阶模态振型的影响.

高速旋转时,由于离心效应,梁会受到极大的轴向离心力.由于剪切变形的存在,轴向离心力在横截面上的分量会对剪切力造成影响. Arboleda-Monsalve 等<sup>[15]</sup>认为,在 Timoshenko 梁的剪切变形过程中,轴向力作用方向有两种:一种是垂直于变形后的横截面,此时横截面上的轴向力分量为轴向力与横截面法线斜率的乘积;另一种是与中性轴相切,此时轴向力分量为轴向力与中性轴斜率的乘积. Chen 等<sup>[16]</sup>认为轴向力的作用方向位于两种方向之间,提出了跃迁系数以量化轴向力对剪切力的贡献.在这之后, Li 和 Su<sup>[17]</sup>将跃迁系数引入轴向受压的表面层纳米线振动控制方程中,发现跃迁系

数对临界屈曲载荷影响较大,具体取值应根据实验确定.王续宏等<sup>[18]</sup>对考虑了跃迁系数 Timoshenko 梁模型的静力弯曲和屈曲问题进行了研究.轴向受载时,跃迁系数对 Timoshenko 梁的振动、屈曲等行为有显著影响.然而对于旋转 Timoshenko 梁,尚未有关于跃迁系数的研究工作.

对于旋转梁的弯曲振动,其离心力沿轴向变化,系统方程是变系数的微分方程.这类方程直接进行解析计算比较困难,往往需要进行降阶和近似处理,常用的方法有伽辽金法<sup>[19]</sup>、瑞利里兹法<sup>[20]</sup>、有限元法<sup>[21]</sup>、传递矩阵法<sup>[22]</sup>、微分变换法<sup>[23-27]</sup>等.使用伽辽金法和瑞利里兹法时,需要根据边界条件选取合适的试函数;使用有限元法和传递矩阵法求解时,需要将结构离散为小单元或分段.微分变换法(DTM, Differential Transform Method)不需要离散结构,或是猜测试函数,它通过将微分项及边界条件转化为代数方程,对振动特性进行求解,适合计算机编程,且效率较高. DTM 法基于泰勒级数展开,最早由 Zhou<sup>[23]</sup>在 1986 年提出并用于解决电路分析中的线性 and 非线性初值问题.随着该方法的发展,一些学者将 DTM 法扩展到旋转梁问题的求解. Ozdemir 和 Kaya<sup>[25]</sup>使用 DTM 法对旋转锥形 Timoshenko 梁的弯曲振动进行了研究. 滕兆春等<sup>[26]</sup>基于 Timoshenko 梁理论对功能梯度旋转梁进行了动力学建模,使用 DTM 法对自由振动进行了研究. Chen 和 Ho<sup>[27]</sup>对轴向加载作用下的旋转 Timoshenko 梁进行了研究,使用 DTM 法研究了旋转、轴向加载和预扭转角对弯曲振动的影响.

本文将探讨跃迁系数对旋转 Timoshenko 梁弯曲振动的影响.将跃迁系数引入剪切力表达式中,推导旋转 Timoshenko 梁的弯曲振动微分方程,使用 DTM 法对固有频率与振型进行求解.通过数值计算讨论跃迁系数对旋转 Timoshenko 梁弯曲振动的影响,讨论转速、高跨比、截面形状对跃迁系数作用效果的影响.

## 1 动力学建模

### 1.1 统一模型

在笛卡尔坐标系  $O-xyz$  中,考虑一个长为  $L$ , 宽为  $b$ , 高为  $h$  的等截面梁.其中  $x$  轴经过梁截面中心; $z$  轴为转轴,转速为  $\Omega$  rad/s.梁左端固支,右

端为自由. 梁的其他参数为: 杨氏模量  $E$ , 剪切模量  $G$ , 密度  $\rho$ , 横截面积  $A$ , 惯性矩  $I$ , 剪切修正因子  $k$ , 泊松比  $\nu$ .

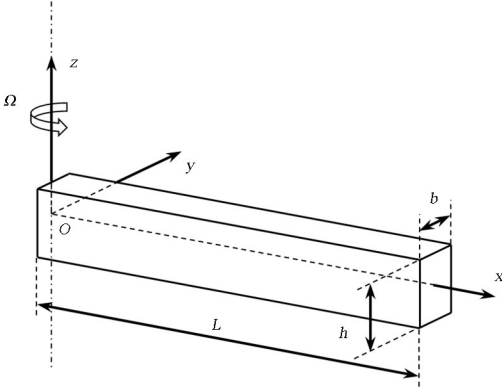


图 1 轴向离心力作用下 Timoshenko 梁模型  
Fig. 1 The model for Timoshenko beam under axial centrifugal force loading

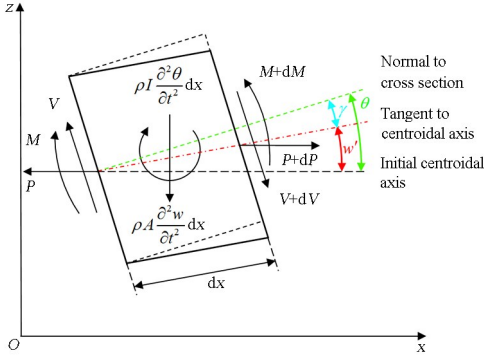


图 2 微段受力示意图  
Fig. 2 Force analysis diagram for a differential element

图 2 为长  $dx$  的等截面梁微段受力示意图(假设梁的弯曲变形仅发生在  $O-xz$  平面), 其中  $\theta$  为梁横截面转角,  $w$  为挠度,  $\gamma$  为剪切角, 轴向离心力  $P$  的表达式为

$$P(x) = \int_x^L \rho A x \Omega^2 dx \quad (1)$$

剪切力  $V$  由截面剪切力  $Q = kGA\gamma$  和轴向离心力  $P$  的分量组成<sup>[15-19]</sup>, 其表达式为

$$V = kGA \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - P \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad (2)$$

式(2)中轴向离心力对剪切力  $V$  的贡献由跃迁系数  $\alpha \in [0, 1]$  控制, 当  $\alpha = 0$  时, 剪切力  $V$  为

$$V = kGA \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - P \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

当  $\alpha = 1$  时, 剪切力  $V$  为

$$V = kGA \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - P\theta \quad (4)$$

弯矩  $M$  表达式为

$$M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5)$$

由式(2)和式(5), 可得图 2 中微段的运动微分方程

$$-\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ kGA \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) \right] = 0 \quad (6)$$

$$-\rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \rho I \Omega^2 \theta + (kGA - \alpha P) \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right) = 0 \quad (7)$$

式(6)和式(7)中  $\rho I \Omega^2 \theta$  为截面转角、转动惯量和绕  $z$  轴的旋转的耦合项<sup>[25]</sup>. 式(6)和式(7)为旋转 Timoshenko 梁的弯曲振动方程. 若令转速  $\Omega = 0$ , 轴向离心力  $P$  替换为轴向压力  $-P$ , 则方程退化为 Chen 等人的跃迁系数模型<sup>[16]</sup>; 若令跃迁系数  $\alpha = 0$ , 则方程退化为 Ozdemir 和 Kaya 的旋转梁模型<sup>[25]</sup>. 式(6)和式(7)对应的边界条件为

$$x = 0: \quad w(0, t) = \theta(0, t) = 0 \quad (8)$$

$$x = L: \quad \begin{cases} V = kAG \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - P \left[ \frac{\partial w}{\partial x} + \alpha \left( \theta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] = 0 \\ M = EI \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

## 1.2 简谐假设与无量纲化处理

假设  $w(x, t)$  和  $\theta(x, t)$  以固有频率  $\omega$  做正弦变化, 令

$$w(x, t) = \tilde{w}(x) e^{i\omega t}, \quad \theta(x, t) = \tilde{\theta}(x) e^{i\omega t} \quad (10)$$

将式(10)代入式(6)、式(7)中, 消去时间  $t$  可得

$$\rho A \omega^2 \tilde{w} + \frac{d}{dx} \left\{ P \left[ \frac{d\tilde{w}}{dx} + \alpha \left( \tilde{\theta} - \frac{d\tilde{w}}{dx} \right) \right] \right\} + \frac{d}{dx} \left[ kGA \left( \frac{d\tilde{w}}{dx} - \tilde{\theta} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

$$\rho I \omega^2 \tilde{\theta} + \frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\tilde{\theta}}{dx} \right) + \rho I \Omega^2 \tilde{\theta} + (kGA - \alpha P) \left( \frac{d\tilde{w}}{dx} - \tilde{\theta} \right) = 0 \quad (12)$$

引入以下无量纲参数

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{\tilde{w}}{L}, \quad \bar{\theta} = \tilde{\theta}, \quad r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad s^2 = \frac{EI}{kAGL^2}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{EI}, \quad \bar{\Omega}^2 = \frac{\rho AL^4 \Omega^2}{EI}, \quad \lambda = \frac{h}{L} \quad (13)$$

式(13)中  $r$  为无量纲惯性矩,  $s$  为无量纲弯曲刚

度,  $\bar{\omega}$  为无量纲固有频率,  $\bar{\Omega}$  为无量纲转速,  $\lambda$  为高跨比. 将式(13)和式(10)代入式(11)和式(12)中, 得到轴向离心力作用下考虑跃迁系数  $\alpha$  的 Timoshenko 梁无量纲弯曲振动微分方程

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\bar{\Omega}}\right)^2 \bar{w} + \frac{d}{d\bar{x}} \left\{ \left( \frac{1}{2} - \frac{\bar{x}^2}{2} \right) \left[ \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} + \alpha \left( \bar{\theta} - \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} \right) \right] \right\} + \left( \frac{1}{s\bar{\Omega}} \right)^2 \frac{d}{d\bar{x}} \left[ \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{\theta} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

$$r^2 (\bar{\omega}^2 + \bar{\Omega}^2) \bar{\theta} + \frac{d}{d\bar{x}} \left( \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} \right) + \left[ \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2} \alpha \bar{\Omega}^2 (\bar{x}^2 - 1) \right] \left( \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{\theta} \right) = 0 \quad (15)$$

式(8)、式(9)对应的无量纲形式为

$$\bar{x} = 0: \quad \bar{w} = \bar{\theta} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{x} = 1: \quad \frac{d\bar{w}}{d\bar{x}} - \bar{\theta} = 0, \quad \frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}} = 0 \quad (17)$$

## 2 弯曲振动微分方程及其边界条件的 DTM 变换

### 2.1 DTM 法原理

DTM 法是求解微分方程的一种近似方法, 它将微分方程的解使用泰勒级数进行逼近. DTM 法的原理主要涉及微分变换与微分逆变换. 以函数  $f(x)$  为例,  $f(x)$  的微分变换为

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (18)$$

式(18)中  $F[k]$  为  $f(x)$  的第  $k$  阶微分变换.  $F[k]$  的微分逆变换为

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k F[k] \quad (19)$$

结合式(18)和式(19)可得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \quad (20)$$

式(20)为  $f(x)$  在  $x=0$  处的泰勒级数, 当级数项数  $n \rightarrow \infty$  时有

$$f(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} \approx 0 \quad (21)$$

因此  $f(x)$  可以表示为有限多项式的求和

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \left[ \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=0} = \sum_{k=0}^n x^k F[k] \quad (22)$$

实际求解关于  $f(x)$  的微分方程时, 应将  $f(x)$  及其各阶微分替换为对应的微分变换  $f[k]$ , 进而通过求解  $f[k]$  以及式(22), 得到函数  $f(x)$ . 在此过程中, 关于  $f(x)$  的微分方程特征值, 亦可转换为关于  $f[k]$  的特征值问题进行近似求解. 表 1 展示了微分变换的一些基本性质.

表 1 微分变换基本性质  
Table 1 Basic laws of differential transformation

Original function	Transformed function
$f(x) = \lambda y(x)$	$F[k] = \lambda Y[k]$
$f(x) = y(x) + z(x)$	$F[k] = Y[k] + Z[k]$
$f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$	$F[k] = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)Y[k+n]$
$f(x) = y(x)z(x)$	$F[k] = \sum_{l=0}^k Y[l]Z[k-l]$
$f(x) = x^m$	$F[k] = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$

### 2.2 DTM 变换

使用 DTM 法对弯曲振动进行求解, 首先需要将式(14)和式(15)中  $\bar{w}(\bar{x})$  和  $\bar{\theta}(\bar{x})$  的各阶导数替换为对应微分变换, 得

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{1}{s\bar{\Omega}} \right)^2 + \frac{1-\alpha}{2} \right] (k+1)(k+2)W[k+2] + \\ & \left[ \left( \frac{\bar{\omega}}{\bar{\Omega}} \right)^2 - \frac{1-\alpha}{2} k(k+1) \right] W[k] + \\ & \left[ \frac{\alpha}{2} - \left( \frac{1}{s\bar{\Omega}} \right)^2 \right] (k+1)\Theta[k+1] - \\ & \frac{\alpha}{2} (k+1)\Theta[k-1] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)\Theta[k+2] + \\ & \left[ r^2 (\bar{\omega}^2 + \bar{\Omega}^2) - \frac{1}{s^2} + \frac{\alpha}{2} \bar{\Omega}^2 \right] \Theta[k] - \\ & \frac{\alpha}{2} \bar{\Omega}^2 \Theta[k-2] + \left( \frac{1}{s^2} - \frac{\alpha}{2} \bar{\Omega}^2 \right) (k+1)W[k+1] + \\ & \frac{\alpha}{2} \bar{\Omega}^2 (k-1)W[k-1] = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)和式(24)中  $W[k]$  和  $\Theta[k]$  分别是  $\bar{w}(\bar{x})$  和  $\bar{\theta}(\bar{x})$  的微分变换. 对式(23)、式(24)进行整理可得

$$W[k+2] = \frac{\left[ \frac{1-\alpha}{2} k(k+1) - \left( \frac{\bar{\omega}}{\bar{\Omega}} \right)^2 \right]}{c_1} W[k] +$$

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{s\bar{\Omega}}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\right](k+1)}{c_1} \Theta[k+1] + \frac{\frac{\alpha}{2}(k+1)}{c^1} \Theta[k-1] \tag{25}$$

$$\Theta(k+2) = \frac{\left[\frac{1}{s^2} - \frac{\alpha}{2}\bar{\Omega}^2 - r^2(\bar{\omega}^2 + \bar{\Omega}^2)\right]}{c_2} \Theta[k] + \frac{\frac{\alpha\bar{\Omega}^2}{2c_2} \Theta[k-2] + \left(\frac{\alpha}{2}\bar{\Omega}^2 - \frac{1}{s^2}\right)(k+1)}{c_2} W[k+1] + \frac{\frac{\alpha\bar{\Omega}^2(1-k)}{2c_2} W[k-1]}{c_2} \tag{26}$$

式(25)和式(26)中

$$c_1 = \left[\left(\frac{1}{s\bar{\Omega}}\right)^2 + \frac{1-\alpha}{2}\right](k+1)(k+2) \\ c_2 = (k+1)(k+2) \tag{27}$$

对边界条件式(16)、式(17)进行微分变换

$$\bar{x} = 0: \quad W[0] = \Theta[0] = 0 \tag{28}$$

$$\bar{x} = 1: \quad \sum_{k=0}^{\infty} (kW[k] - \Theta[k]) = 0, \sum_{k=0}^{\infty} k\Theta[k] = 0 \tag{29}$$

接下来, 将微分方程及边界条件的微分变换结果转换为代数方程组。由式(25)和式(26)易知,  $W[k]$  和  $\Theta[k]$  为  $W[1]$  和  $\Theta[1]$  的线性组合。将式(25)、式(26)代入式(28)、式(29)可得到

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W[1] \\ \Theta[1] \end{bmatrix} = 0 \tag{30}$$

式(30)中  $f_{ij}(i, j=1, 2)$  为包含  $\bar{\omega}$  的多项式。令式(30)的系数行列式为零, 此时  $\bar{\omega}$  的解为  $\bar{\omega}_i (i=1, 2, \dots)$ , 即系统的第  $i$  阶固有频率, 其对应的微分变换  $W[k]$  和  $\Theta[k]$  记为  $W_i[k]$  和  $\Theta_i[k]$ 。

取  $W_i[1]$  为任意常数  $c$ , 则

$$\Theta_i[1] = -\frac{f_{12}}{f_{11}}c. \tag{31}$$

将  $\bar{\omega}_i$ 、式(27)、式(31)代入式(25)、式(26)中, 便可求得  $W_i[k] (k=2, 3, \dots, n)$  的值(若计算过程中出现微分变换阶次  $k-m < 0 (m=1, 2)$  的情况, 则取对应的  $W_i[k-m]$  和  $\Theta_i[k-m]$  为 0)。

由式(22)则可以得到  $\bar{\omega}_i$  对应的模态振型  $\bar{w}_i(\bar{x})$  表达式为

$$\bar{w}_i(\bar{x}) = \sum_{k=0}^n \bar{x}^k W_i[k] \tag{32}$$

3 计算结果与分析

3.1 方法有效性验证

为验证当前计算方法及程序的有效性, 首先取跃迁系数  $\alpha=0$ , 即退化到轴向力方向为中性轴切线方向的情况, 并与 Ozdemir 的工作进行对比<sup>[25]</sup>。表 2 给出了旋转 Timoshenko 梁在不同转速下前三阶固有频率的对比结果, 本文解与文献结果完全吻合, 说明本文方法有效。

表 2 前三阶固有频率对比 ( $r=0.06, \lambda=0.2078, h/b=1, k=2/3, v=0.3, E/G=8/3$ )

Table 2 Comparison of the first three natural frequencies ( $r=0.06, \lambda=0.2078, h/b=1, k=2/3, v=0.3, E/G=8/3$ )

Natural frequencies	$\bar{\Omega}=4$		$\bar{\Omega}=8$		$\bar{\Omega}=12$	
	Present	Ref. [25]	Present	Ref. [25]	Present	Ref. [25]
$\bar{\omega}$	5.395 42	5.395 42	8.920 85	8.920 85	12.672 4	12.672 4
$\bar{\omega}$	19.966 2	19.966 2	25.836 2	25.836 2	33.267 2	33.267 2
$\bar{\omega}$	43.736 5	43.736 5	51.415 4	51.415 4	61.601 1	61.601 1

3.2 跃迁系数对振动特性的影响

图 3 绘制了跃迁系数  $\alpha$  取 0 和取 1 两种情况下旋转 Timoshenko 梁前三阶固有频率随转速变化的情况。在相同转速下, 跃迁系数  $\alpha=0$  时旋转 Timoshenko 梁的固有频率相较于  $\alpha=1$  时更高, 且差距随转速增大而增大。对式(6)和式(7)观察可

得, 造成该现象的原因是非零跃迁系数使得式(6)中与轴向离心力相关的项  $(P-\alpha P)\partial^2 w/\partial x^2$  中  $\partial^2 w/\partial x^2$  系数由  $P$  变成  $P(1-\alpha)$ , 造成等效轴向拉力小于  $\alpha=0$  时的等效轴向拉力, 进而使得固有频率有减小的效应; 同时, 分析式(7)中和剪切力相关的项  $(kGA-\alpha P)(\partial w/\partial x - \theta)$ , 其等效剪切修正因子由  $k$  变成  $k-\alpha P/GA$ , 这也会使得固有频率减小。

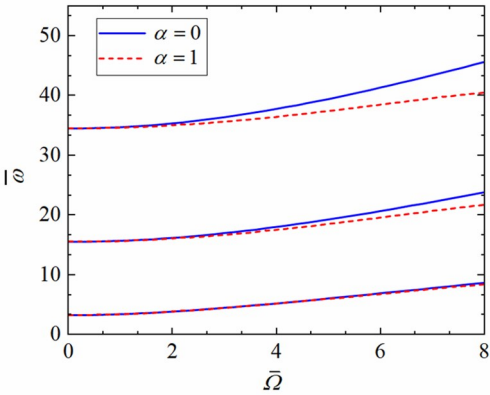


图3  $\alpha=0$  和  $\alpha=1$  时前三阶固有频率随转速  $\bar{\Omega}$  的变化  
( $\lambda=0.3, h/b=1, k=5/6, \nu=0.3, E/G=8/3$ )  
Fig. 3 Variation of the first three natural frequencies with rotating speed  $\bar{\Omega}$  for  $\alpha=0$  and  $\alpha=1$   
( $\lambda=0.3, h/b=1, k=5/6, \nu=0.3, E/G=8/3$ )

图4绘制了跃迁系数 $\alpha$ 取0和取1两种情况下旋转 Timoshenko 梁的前三阶振型. 对归一化振型进行对比, 可以发现 $\alpha$ 的取值会对振型产生轻微影响.

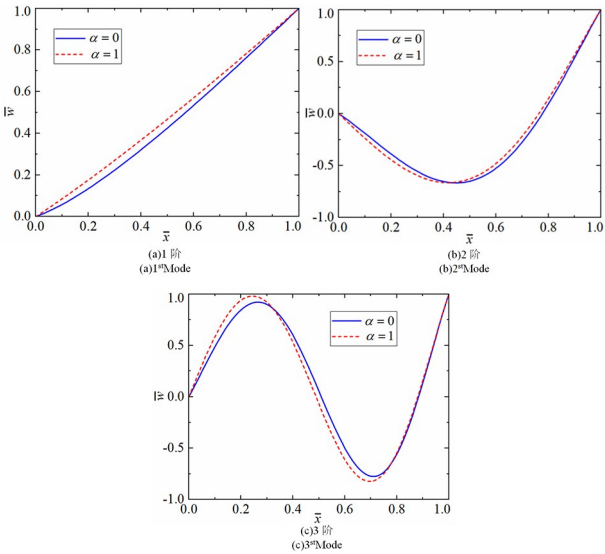


图4 前三阶振型

( $\lambda=0.3, h/b=1, k=5/6, \nu=0.3, E/G=8/3, \bar{\Omega}=8$ )  
Fig. 4 Mode-shapes of the first three modes  
( $\lambda=0.3, h/b=1, k=5/6, \nu=0.3, E/G=8/3, \bar{\Omega}=8$ )

非零跃迁系数会影响等效剪切修正因子, 进而影响振动特性. 为进一步分析不同剪切修正因子 $k$ 下跃迁系数对固有频率的影响, 本文考虑了相同高跨比下四种不同截面的梁, 其截面及对应剪切修正因子如图5所示<sup>[28,29]</sup>. 表3给出了跃迁系数 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 时不同截面梁基频随转速的变化. 定义基频相对误差为

$$RD = \frac{|\bar{\omega}_{\alpha=1} - \bar{\omega}_{\alpha=0}|}{\bar{\omega}_{\alpha=0}} \times 100\%$$

(33)

式中,  $\bar{\omega}_{\alpha=0}$  为跃迁系数取0时的系统基频,  $\bar{\omega}_{\alpha=1}$  为

跃迁系数取1时的系统基频. 表3中当转速为8时, 薄壁截面梁 $RD$ 可达8.76%. 图6展示了不同截面形状下 $RD$ 随转速的变化. 在相同转速和剪切模量下, 薄壁截面 $k$ 最小,  $RD$ 最大; 圆形截面 $k$ 最大,  $RD$ 最小; 而正方形截面和长方形截面 $k$ 相近,  $RD$ 相近, 面积却相差一半. 这主要是因为系统的等效剪切因子为 $k - \alpha P/GA$ , 而 $\alpha P/GA$ 远小于 $k$ , 所以面积 $A$ 的影响可以忽略,  $RD$ 主要受 $k$ 影响.

表4给出了跃迁系数 $\alpha=0$ 和 $\alpha=1$ 时不同转速下梁基频随高跨比的变化, 图7对 $RD$ 的变化进行了绘制. 由图7观察可得,  $\lambda$ 越大, 基频相对误差 $RD$ 越大. 当 $\lambda$ 较大时, 旋转梁为粗梁, 剪切变形占总变形的比例较大, 因此跃迁系数 $\alpha$ 在大高跨比的情况下对固有频率的影响更明显.

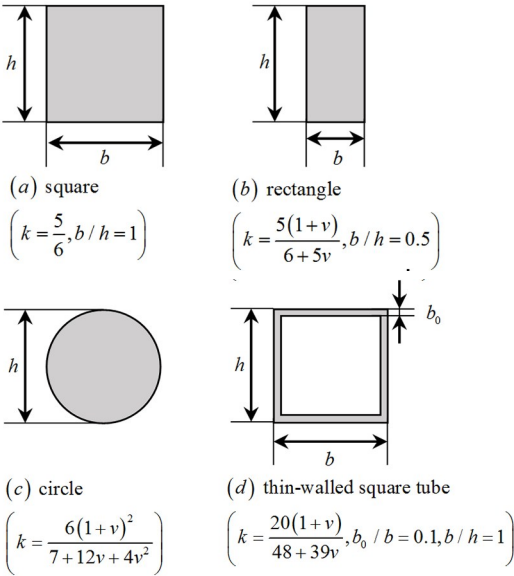


图5 截面形状几何示意图

Fig. 5 Schematic figures of cross sections with various geometries

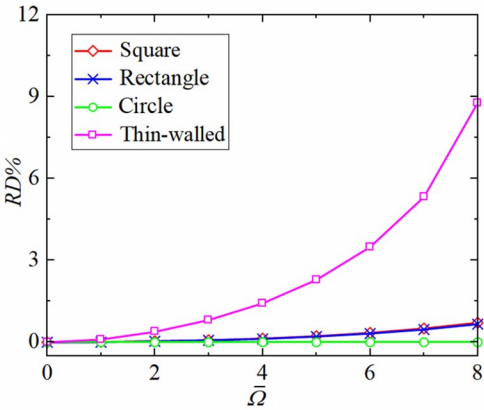


图6 不同截面梁的相对误差 $RD$ 随着转速 $\bar{\Omega}$ 的变化  
( $\lambda=0.2, L=1\text{m}, \nu=0.3, E/G=8/3$ )  
Fig. 6 Variation of the relative difference  $RD$  with rotating speed  $\bar{\Omega}$  for beams of different cross sections  
( $\lambda=0.2, L=1\text{m}, \nu=0.3, E/G=8/3$ )

表 3  $\alpha=0$  和  $\alpha=1$  时不同截面梁基频随转速  $\bar{\Omega}$  的变化 ( $\lambda=0.2, L=1\text{m}, v=0.3, E/G=8/3$ )

Table 3 Variation of fundamental natural frequency with rotating speed  $\bar{\Omega}$  for beams of different cross sections while  $\alpha=0$  and  $\alpha=1$  ( $\lambda=0.2, L=1\text{m}, v=0.3, E/G=8/3$ )

$\bar{\Omega}$	Fundamental natural frequency / $\bar{\omega}$							
	Square		Rectangle		Circle		Thin-walled	
	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=0$	$\alpha=1$
0	3.4078	3.4078	3.4108	3.4108	3.5111	3.5111	3.2131	3.2131
2	4.0182	4.0167	4.0212	4.0198	4.1318	4.1318	3.8227	3.8079
4	5.4295	5.4220	5.4329	5.4259	5.5775	5.5775	5.2109	5.1366
6	7.1472	7.1223	7.1515	7.1284	7.3497	7.3496	6.8892	6.6481
8	8.9739	8.9096	8.9793	8.9197	9.2418	9.2417	8.6798	7.9178

表 4  $\alpha=0$  和  $\alpha=1$  时不同转速下梁基频随高跨比  $\lambda$  的变化 ( $L=1\text{m}, h/b=1, k=5/6, v=0.3, E/G=8/3$ )

Table 4 Variation of fundamental natural frequency with height-to-length ratioat  $\lambda$  different rotating speed while  $\alpha=0$  and  $\alpha=1$  ( $L=1\text{m}, h/b=1, k=5/6, v=0.3, E/G=8/3$ )

$\lambda$	Fundamental natural frequency / $\bar{\omega}$					
	6		8		10	
	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=0$	$\alpha=1$	$\alpha=0$	$\alpha=1$
0	7.3604	7.3604	9.2568	9.2568	11.2023	11.2023
0.06	7.3386	7.3383	9.2262	9.2256	11.1609	11.1594
0.12	7.2766	7.2730	9.1414	9.1319	11.0503	11.0292
0.18	7.1833	7.1665	9.0196	8.9758	10.8997	10.8041
0.24	7.0696	7.0216	8.8784	8.7548	10.7341	10.4555
0.3	6.9452	6.8408	8.7305	8.4564	10.5663	9.7763

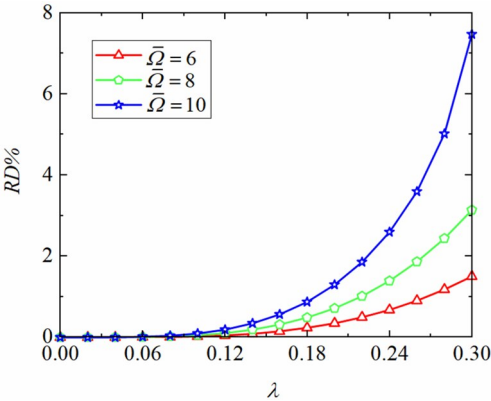


图 7 不同转速下相对误差  $RD$  随高跨比  $\lambda$  的变化 ( $L=1\text{m}, h/b=1, k=5/6, v=0.3, E/G=8/3$ )

Fig. 7 Variation of the relative difference  $RD$  with height-to-length ratio  $\lambda$  under different rotating speeds ( $L=1\text{m}, h/b=1, k=5/6, v=0.3, E/G=8/3$ )

4 结论

本文建立了考虑跃迁系数的旋转 Timoshenko 梁动力学模型,并使用 DTM 法对弯曲振动微分方程进行求解,得到了固有频率与振型函数,分析了转速、高跨比、截面形状以及跃迁系数对系统弯曲

振动的影响,得到以下结论:

- (1)系统的固有频率因考虑跃迁系数而降低,跃迁系数对固有频率的影响随转速增加而增大.
- (2)剪切修正因子影响跃迁系数对系统固有频率的作用效果. 剪切修正因子  $k$  较小时,如薄壁截面情况下,跃迁系数将具有更显著的作用效果.
- (3)跃迁系数对系统固有频率的影响随高跨比的增大而增大. 相对于细梁,粗梁的剪切变形更明显,跃迁系数对固有频率的影响更大.

由于跃迁系数在高转速、薄壁截面和大高跨比等情况下对系统频率影响较大,在实际建模过程中,可以使用跃迁系数对建模误差进行校正.

参考文献

[1] 李亮,李映辉,刘启宽. 风力机叶片非线性挥舞分析 [J]. 固体力学学报, 2012, 33(1): 98–102.  
LI L, LI Y H, LIU Q K. Analysis of non-linear flap vibration of wind turbine blades [J]. Chinese

- Journal of Solid Mechanics, 2012, 33(1): 98–102. (in Chinese)
- [2] 王少文. 高速旋转 Timoshenko 梁振动特性研究 [D]. 北京: 北京工业大学, 2017.  
WANG S W. The vibration analysis of Timoshenko beam with high rotating speed [D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2017. (in Chinese)
- [3] 余瑶, 文浩, 陈提. 中心刚体—柔性梁应变反馈多目标优化控制 [J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(4): 356–362.  
YU Y, WEN H, CHEN T. Multi-objective optimal control of a flexible hub-beam with strain feedback [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(4): 356–362. (in Chinese)
- [4] 方虹斌, 郑立, 张琦炜, 等. 柔性机械臂动力学建模研究进展 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(12): 5–21.  
FANG H B, ZHENG L, ZHANG Q W, et al. Research progress on dynamics modeling of flexible robotic arms: a review [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(12): 5–21. (in Chinese)
- [5] 孙禹晗, 王泽峰, 宋智广. 基于模态参数及小波变换的旋转梁结构损伤识别 [J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(1): 51–59.  
SUN Y H, WANG Z F, SONG Z G. Damage identification of rotating beams based on mode parameters and wavelet transform [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(1): 51–59. (in Chinese)
- [6] HOSKOTI L, GUPTA S S, SUCHEENDRAN M M. Modeling of geometrical stiffening in a rotating blade—a review [J]. Journal of Sound Vibration, 2023, 548: 117526.
- [7] 韩刚. 航空发动机叶片和转子气流激励下非线性动态响应研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.  
HAN G. Research on nonlinear dynamic response of blade and rotor of aero-engine under airflow excitation [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015. (in Chinese)
- [8] 李伟斌, 郝云权, 王建涛, 等. 直升机旋翼结冰影响及防/除冰方法综述 [J]. 航空动力学报, 2023, 38(2): 257–268.  
LI W B, HAO Y Q, WANG J T, et al. Review on influences of helicopter rotor icing and anti-/de-icing methods [J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(2): 257–268. (in Chinese)
- [9] 王宝莹, 董敏, 梁旭, 等. 海上风电叶片结构设计中的前沿问题与挑战 [J]. 船舶工程, 2023, 45(11): 18–24+53.
- WANG B X, DONG M, LIANG X, et al. Frontier issues and challenges in the structural design of offshore wind turbine blades [J]. Ship Engineering, 2023, 45(11): 18–24+53. (in Chinese)
- [10] 姚颂, 芮筱亭, 王景弘. 直升机悬停状态下的振动计算 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2021, 53(6): 104–111.  
YAO S, RUI X T, WANG J H. Calculation of helicopter vibration in hovering state [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2021, 53(6): 104–111. (in Chinese)
- [11] TANG A Y, LI X F, WU J X, et al. Flapwise bending vibration of rotating tapered Rayleigh cantilever beams [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2015, 112: 1–9.
- [12] DU H, LIM M K, LIEW K M. A power series solution for vibration of a rotating Timoshenko beam [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 175(4): 505–523.
- [13] HAN H S, LIU L, CAO D Q. Dynamic modeling for rotating composite Timoshenko beam and analysis on its bending-torsion coupled vibration [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 78: 773–791.
- [14] ZHU T L. Free flapwise vibration analysis of rotating double-tapered Timoshenko beams [J]. Archive of Applied Mechanics, 2012, 82(4): 479–494.
- [15] ARBOLEDA-MONSALVE L G, ZAPATA-MEDINA D G, ARISTIZABAL-OCHOA J D. Stability and natural frequencies of a weakened Timoshenko beam-column with generalized end conditions under constant axial load [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 307(1/2): 89–112.
- [16] CHEN T, SU G Y, SHEN Y S, et al. Unified Green's functions of forced vibration of axially loaded Timoshenko beam: transition parameter [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2016, 113: 211–220.
- [17] LI X Y, SU G Y. Buckling of nanowires: a continuum model with a transition parameter [J]. Journal of Physics D: Applied Physics, 2018, 51(27): 275301.
- [18] 王续宏, 李翔宇. 轴向受载铁木辛柯梁的弯曲研究 [J]. 成都大学学报(自然科学版), 2019, 38(2): 187–189+205.  
WANG X H, LI X Y. Study on bending of axially

- loaded Timoshenko beams [J]. Journal of Chengdu University (Natural Science Edition), 2019, 38(2): 187—189+205. (in Chinese)
- [19] HUO Y L, WANG Z M. Dynamic analysis of a rotating double-tapered cantilever Timoshenko beam [J]. Archive of Applied Mechanics, 2016, 86(6): 1147—1161.
- [20] WU X L, JIAO Y H, CHEN Z B. An analytical model of a rotating radial cantilever beam considering the coupling between bending, stretching, and torsion [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2022, 144(2): 021004.
- [21] YARDIMOGLU B, INMAN D J. Coupled bending-bending-torsion vibration of a rotating pre-twisted beam with aerofoil cross-section and flexible root by finite element method [J]. Shock and Vibration, 2004, 11(5/6): 637—646.
- [22] LEE J W, LEE J Y. Free vibration analysis using the transfer-matrix method on a tapered beam [J]. Computers & Structures, 2016, 164: 75—82.
- [23] MALIK M, HUY DANG H. Vibration analysis of continuous systems by differential transformation [J]. Applied Mathematics and Computation, 1998, 96(1): 17—26.
- [24] JANG M J, CHEN C L, LIU Y C. Two-dimensional differential transform for partial differential equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2001, 121(2/3): 261—270.
- [25] OZDEMIR OZGUMUS O, KAYA M O. Flapwise bending vibration analysis of a rotating double-tapered Timoshenko beam [J]. Archive of Applied Mechanics, 2008, 78(5): 379—392.
- [26] 滕兆春, 昌博, 付小华. 弹性地基上转动功能梯度材料 Timoshenko 梁自由振动的微分变换法求解 [J]. 中国机械工程, 2018, 29(10): 1147—1152.
- TENG Z C, CHANG B, FU X H. DTM analysis for free vibrations of rotating functionally graded material Timoshenko beams on elastic foundations [J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(10): 1147—1152. (in Chinese)
- [27] CHEN C K, HO S H. Transverse vibration of a rotating twisted Timoshenko beams under axial loading using differential transform [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, 41(11): 1339—1356.
- [28] COWPER G R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory [J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(2): 335.
- [29] 陈岳阳. 考虑跃迁系数的轴向受力铁木辛柯梁的自由振动 [D]. 成都: 西南交通大学, 2019.
- CHEN Y Y. Free vibration of an axially loaded Timoshenko beam with the transition parameter [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2019. (in Chinese)