

飞机前起落架模型的 Hopf 分岔及控制研究^{*}

张瑜 张文 乐源[†]

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

摘要 以一类单轮式飞机前起落架动力学模型为研究对象, 将非光滑项进行光滑拟合后, 通过坐标变换将系统转化为规范形. 运用 Hopf 分岔理论计算了系统的极限环曲率系数, 根据它的符号判断 Hopf 分岔的类型, 并通过数值模拟验证了理论推导的正确性. 对系统施加线性反馈控制器, 分析控制参数对系统 Hopf 分岔行为的影响; 对系统施加非线性立方反馈控制器, 通过幅值计算公式, 讨论控制参数对极限环幅值的影响. 结果表明, 线性控制器能使系统的 Hopf 分岔点后移, 从而减小 Hopf 分岔的不稳定区域; 非线性控制器在不改变系统 Hopf 分岔点的情况下, 能减小 Hopf 分岔产生的极限环的幅值. 该结果可以为飞机前起落架系统的结构优化提供一定理论指导.

关键词 起落架, Hopf 分岔, 极限环曲率系数, 线性反馈控制, 非线性立方反馈控制

中图分类号: O313

文献标志码: A

Hopf Bifurcation Analysis and Bifurcation Control of Aircraft Nose Landing Gear System^{*}

Zhang Yu Zhang Wen Yue Yuan[†]

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract In this paper, the dynamic model of the nose landing gear of a single-wheeled aircraft is investigated. After smooth fitting of the non-smooth term, the system is transformed into normal form by coordinate transformation. We calculated the first Lyapunov coefficient of the landing gear system by using the Hopf bifurcation theory, and judge the type of Hopf bifurcation according to its sign. The correctness of the theoretical derivation is verified by numerical simulation. And then, we applied linear feedback control to the system and analyzed the influence of control parameters on Hopf bifurcation behavior. A nonlinear cubic feedback controller is applied to the system, and the influence of the control parameters on the amplitude of the limit cycle is discussed through the amplitude calculation formula. The results show that the linear controller can make the Hopf bifurcation point of the system move back, thus reducing the unstable region of Hopf bifurcation. The nonlinear controller can reduce the amplitude of the limit cycle generated by Hopf bifurcation without changing the Hopf bifurcation point of the system. The results can provide some theoretical guidance for the structural optimization of aircraft nose landing gear system.

Key words nose landing gear, Hopf bifurcation, limit cycle curvature coefficient, linear feedback control, nonlinear cubic feedback control

2023-12-08 收到第 1 稿, 2024-01-20 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12072291), National Natural Science Foundation Projects (12072291).

[†] 通信作者 E-mail: leyuan2003@sina.com

引言

起落架系统对于飞机来说,是一个十分重要且复杂的系统.起落架系统设计比其它飞机系统设计包含更多工程学科,因此其动力学分析及设计也必然受到更多设计人员关注^[1].摆振问题一直是飞机起落架设计和运行中的难题.根据非线性动力学理论,摆振的发生意味着起落架系统可能出现了 Hopf 分岔现象.

近年来, Hopf 分岔已经广泛应用于经济系统^[2]、生态系统^[3]、神经网络系统^[4]、光滑铁路轮系^[5,6]和航空航天等系统的动力学分析.冯飞^[7]从 Hopf 分岔的角度来解释飞机起落架系统摆振现象,根据分岔参数图的几何拓扑结构将摆振严格划分为“扭转型”和“侧向型”.在 Hopf 分岔的基础上,提出 Hopf 分岔失稳对摆振区域存在重要影响. Thota^[8]在 Somieski 模型^[9]的基础上引入支柱前倾角,首次考虑了非零前倾角的几何效应,研究了 Hopf 分岔与垂直力 F_z 和速度 V 的关系,以确定可能发生摆振的区域.高相国^[10]在前人的模型基础上,考虑了支柱轴向位移的影响,建立了包含支柱轴向位移和纵向弯曲的六自由度双轮前起落架摆振非线性动力学模型.发现考虑支柱轴向位移影响后,支柱扭转摆振和侧向摆振区域均有缩小趋势.当分段光滑系统的平稳解出现周期轨道分支时,这种现象被称为广义 Hopf 分岔. Küpper 等^[11]结合几何方法和解析方法研究了广义 Hopf 分岔,通过研究不动点的返回映射,得到了分岔周期轨道.并得出广义 Hopf 分岔是由系统的不连续和各子系统的特征结构之间的相互作用决定的结论. Miao 等^[12]研究了一个四维的非光滑铁路轮对系统的广义 Hopf 分岔,利用中心流形定理将四维系统简化为二维非光滑系统,通过构造和分析一个 Poincaré 映射,从而给出了判定系统中是否存在广义 Hopf 分岔的判据.

摆振现象会引起车辆或飞机振动,造成乘客的不适,甚至威胁行驶安全.因此,为防止车辆,起落架系统发生摆振现象,需要抑制 Hopf 分岔的发生.近来,学者们对 Hopf 分岔进行了一系列的控制研究. Hopf 分岔控制在 Chen 系统、Chua 系统以及 Langford 系统中有广泛应用^[13].张中华等^[14,15]对类 Lorenz 系统以及原型 4 系统的 Hopf 分岔行

为及分岔控制问题进行研究.采用线性和非线性控制详细讨论了线性控制器和非线性控制器对 Hopf 分岔位置、分岔类型和分岔周期解幅值(极限环幅值)的影响,进而实现系统的分岔控制问题. Hopf 分岔控制在工程实际上也有应用,且更具现实意义.比如 Gordillo 等^[16]为防止感应电机中发生 Hopf 分岔,通过返回外环 PI 速度控制有效抑制了振荡.余龙华等^[17]提出了一种用 Hopf 分岔规律调整非线性系统 PID 控制器参数的自适应设计方法,使磁悬浮非线性系统远离 Hopf 分岔点,从而继续保持稳定. Queini 等^[18]设计了一种非线性反馈律来抑制二阶非线性悬臂梁在遭受主参数共振时的第一模态振动.并通过理论和实验结果表明,该控制律能有效地抑制振动和进行分岔控制.孙桐林等^[19]提出了一种轮对蛇行运动分岔(Hopf 分岔)的非线性反馈控制方法,通过对系统施加非线性反馈控制,使系统的分岔型式由亚临界 Hopf 分岔转变为超临界 Hopf 分岔,大大提高了机车稳定运行的运行速度.陈大伟^[20]建立了主动控制的非线性摆振模型,提出利用数值延拓算法分析主动控制对摆振的抑制效果,并与被动控制进行对比.此外,研究了平方和立方非线性反馈对 Hopf 分岔产生不稳定区域的影响.

本文将以一类包含非零前倾角三维飞机前起落架为研究对象,通过 Hopf 分岔理论分析它的 Hopf 分岔行为,并对发生分岔的系统进行线性和非线性反馈控制.详细讨论在线性控制下不同控制参数对 Hopf 分岔点的影响,以及非线性控制对 Hopf 分岔产生的极限环幅值的影响.文中的方法可以为研究高维非线性起落架系统的 Hopf 分岔特性提供一些研究基础.

1 前起落架模型

考虑一个带有电子机械传动器的单轮式飞机前起落架简化模型(如图 1 所示),可以由如下非线性微分方程^[9,20]表示:

$$\begin{cases} I_Z \ddot{\psi}(t) = M_N[\psi(t), \dot{\psi}(t)] + M_T[\alpha(t), \dot{\psi}(t)] \\ \sigma \dot{\alpha}(t) = V \cos(\phi) \psi(t) + (e_H - \\ \alpha) \cos(\phi) \dot{\psi}(t) - V \alpha(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\psi(t)$ 和 $\alpha(t)$ 是状态变量,分别表示支柱偏航角和轮胎滑移角; I_Z 是关于 Z 轴的转动惯量, V 是

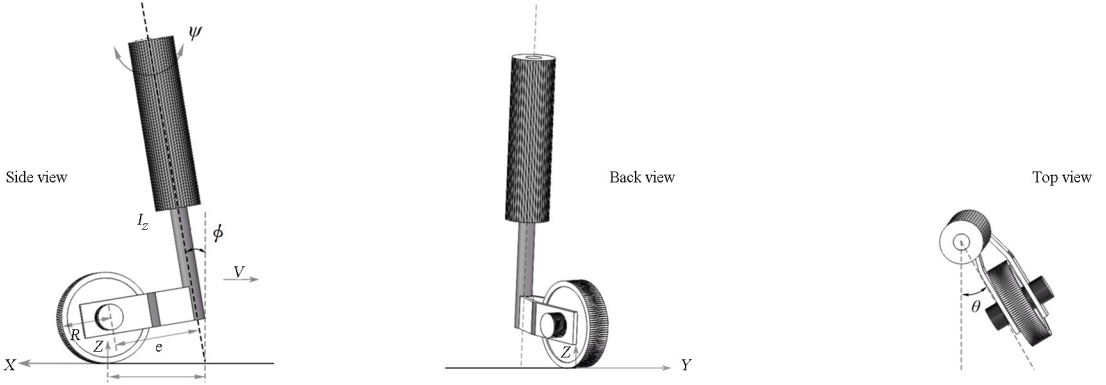


图 1 前起落架模型

Fig. 1 Model of the nose landing gear

轮胎向前移动的速度, a 为轮胎与地面接触的一半长度, σ 为轮胎松弛长度. 通过有效稳定距 e_{ff} 将前倾角 ϕ 引入模型, 表达式为 $e_{\text{ff}} = e \cos \phi + R \tan \phi + e \sin \phi \tan \phi$. 其中, e 为稳定距, 当 $\phi = 0$ 时, $e_{\text{ff}} = e$. R 为轮胎半径. 扭矩 $M_N[\psi(t), \dot{\psi}(t)] = c\psi(t) + k\dot{\psi}(t)$, 表示支柱扭转过程中的刚度力矩和阻尼力矩之和. $M_T[\alpha(t), \dot{\psi}(t)] = M_D[\dot{\psi}(t)] + M_G(\alpha)$, 表示由轮胎阻尼和变形引起的力矩. 其中 $M_D[\dot{\psi}(t)] = \kappa \cos(\phi) \dot{\psi}(t) / V$, 表示轮胎与地面之间的扭转阻尼力矩; $M_G(\alpha)$ 描述轮胎与地面之间的相互作用, 这种相互作用是强度非线性的, 是由于侧滑引起的横向轮胎变形, 它的表达式为: $M_G(\alpha) = M_Z(\alpha) - e_{\text{ff}} F_y(\alpha)$, 其中 $M_Z(\alpha)$ 和 $F_y(\alpha)$ 分别表示轮胎中心

回正力矩和轮胎侧力的非线性函数. 考虑 $M_Z(\alpha)$ 和 $F_y(\alpha)$ 的分段光滑近似^[20]:

$$\begin{cases} M_Z(\alpha) = C_{M\alpha} F_Z \gamma_M \frac{2\alpha\alpha_M}{\alpha^2 + \alpha_M^2} \\ F_y(\alpha) = C_{Fa} F_Z \gamma_F \frac{2\alpha\alpha_F}{\alpha^2 + \alpha_F^2} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\alpha_M = \pi/60$, $\gamma_M = \alpha_g/\pi$, $\alpha_F = \alpha_g$, $\gamma_F = 0.085$.

为进行 Hopf 分岔分析, 将 $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha_M^2}$ 与 $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha_F^2}$ 用泰勒公式展开到第三阶得:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha_M^2} = \frac{\alpha}{\alpha_M^2} - \frac{\alpha^3}{\alpha_M^4} + O(\alpha^5) \\ \frac{\alpha}{\alpha^2 + \alpha_F^2} = \frac{\alpha}{\alpha_F^2} - \frac{\alpha^3}{\alpha_F^4} + O(\alpha^5) \end{cases} \quad (3)$$

将式(2)和式(3)代入式(1)可得:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) = \frac{c}{I_Z} \psi(t) + \left(\frac{k}{I_Z} + \frac{\kappa \cos(\phi)}{I_Z V} \right) \dot{\psi}(t) + \left(\frac{2C_{M\alpha} F_Z \gamma_M}{I_Z \alpha_M} - \frac{2e_{\text{ff}} C_{Fa} F_Z \gamma_F}{I_Z \alpha_F} \right) \alpha(t) - \left(\frac{2C_{M\alpha} F_Z \gamma_M}{I_Z \alpha_M^3} - \frac{2e_{\text{ff}} C_{Fa} F_Z \gamma_F}{I_Z \alpha_F^3} \right) \alpha^3(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \frac{V \cos(\phi)}{\sigma} \psi(t) + \frac{(e_{\text{ff}} - a) \cos(\phi)}{\sigma} \dot{\psi}(t) - \frac{V}{\sigma} \alpha(t) \end{cases} \quad (4)$$

2 Hopf 分岔分析

为了方便计算, 我们重新定义状态变量: $x_1 = \psi(t)$, $x_2 = \Omega(t)$, $x_3 = \alpha(t)$, 并且令:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{c}{I_Z}, p_2 = \frac{k}{I_Z}, p_3 = \frac{\kappa \cos(\phi)}{I_Z}, \\ p_4 &= \frac{2C_{M\alpha} F_Z \gamma_M}{I_Z \alpha_M} - \frac{2e_{\text{ff}} C_{Fa} F_Z \gamma_F}{I_Z \alpha_F}, \\ p_5 &= \frac{(e_{\text{ff}} - a) \cos(\phi)}{\sigma}, \\ p_6 &= \frac{2C_{M\alpha} F_Z \gamma_M}{I_Z \alpha_M^3} - \frac{2e_{\text{ff}} C_{Fa} F_Z \gamma_F}{I_Z \alpha_F^3}, u = \frac{V}{\sigma} \end{aligned} \quad (5)$$

则式(4)可写为等价的三维系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_1 x_1 + (p_2 + \frac{p_3}{u\sigma}) x_2 + p_4 x_3 - p_6 x_3^3 \\ \dot{x}_3 = u \cos(\phi) x_1 + p_5 x_2 - u x_3 \end{cases} \quad (6)$$

令 $f(x) = -p_6 x_3^3$, 则

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(u) \mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (7)$$

$$\text{其中, } \mathbf{A}(u) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 + \frac{p_3}{u\sigma} & p_4 \\ u \cos(\phi) & p_5 & -u \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{X} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\mathbf{A}(u)$, $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ 分别为平衡点处的 Jacobian 矩阵和非线性项.

2.1 Hopf 分岔范式

本节将原系统通过坐标变换为 Poincaré 规范形,有利于后面推导 Hopf 分岔判别式。

矩阵 $\mathbf{A}(u)$ 的特征方程为:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \quad (8)$$

其 Hurwitz 矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中, $a_1 = -(p_2 - u + \frac{p_3}{u\sigma})$, $a_2 = -(p_2u + p_4p_5 + p_1 + \frac{p_3}{\sigma})$, $a_3 = -u[p_1 + p_4\cos(\phi)]$. 根据 Hopf 分岔准则可得发生 Hopf 分岔的必要条件如下^[22]:

$$\begin{cases} CH1: a_3 > 0, \Delta_1(u_0) = a_1 > 0, \\ \Delta_2(u_0) = a_1a_2 - a_3 = 0 \\ CH2: \frac{d\Delta_2(u_0)}{du} \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$\mathbf{B} = [\text{Re}(\boldsymbol{\gamma}_1), -\text{Im}(\boldsymbol{\gamma}_1), \boldsymbol{\gamma}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{u^2\omega + \omega^3}{u^2 + \omega^2} & k \\ \frac{p_5\omega^2 + u^2\cos(\phi)}{u^2 + \omega^2} & \frac{u\omega[\cos(\phi) - p_5]}{u^2 + \omega^2} & \frac{p_5k + u\cos(\phi)}{u + k} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 $\text{Re}(\boldsymbol{\gamma}_1)$ 和 $\text{Im}(\boldsymbol{\gamma}_1)$ 分别代表特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 的实部和虚部,且向量 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 和 $\boldsymbol{\gamma}_3$ 均为第一个非零元素为 1 的向量^[13].

\mathbf{B} 的逆矩阵为:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} * & b_{12} & * \\ * & b_{22} & * \\ * & b_{32} & * \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中, $b_{12} = -\frac{k+u}{k^2 + \omega^2}$, $b_{22} = \frac{ku - \omega^2}{(k^2 + \omega^2)\omega}$, $b_{32} = \frac{k+u}{k^2 + \omega^2}$.

引入线性变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = -\frac{u^2\omega + \omega^3}{u^2 + \omega^2}y_2 + ky_3 \\ x_3 = \frac{p_5\omega^2 + u^2\cos(\phi)}{u^2 + \omega^2}y_1 + \frac{u\omega[\cos(\phi) - p_5]}{u^2 + \omega^2}y_2 + \frac{p_5k + u\cos(\phi)}{u + k}y_3 \end{cases} \quad (16)$$

则系统(7)转换为以下形式:

其中 u_0 可以由 $\Delta_2(u_0) = a_1a_2 - a_3 = 0$ 计算得出。

假设特征方程有一对虚根: $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$ 和一个负实根 $\lambda_3 = k$, 可以得到特征方程为:

$$\lambda^3 - k\lambda^2 + \omega^2\lambda - k\omega^2 = 0 \quad (11)$$

与式(8)对比可得系数: $k = p_2 - u + \frac{p_3}{u\sigma}$, $\omega^2 = -(p_2u + p_4p_5 + p_1 + \frac{p_3}{\sigma})$.

对等式(8)两边同时对分岔参数 u 求导数可得:

$$\lambda'(u) = \frac{d\lambda}{du} = \frac{-\frac{da_1}{du}\lambda^2 - \frac{da_2}{du}\lambda - \frac{da_3}{du}}{3\lambda^2 + 2\lambda a_1 + a_2} \quad (12)$$

并且有

$$\lambda'(u_0) = \frac{d\lambda}{du} \Big|_{u=u_0, \lambda=\omega i}; \alpha'(0) = \text{Re}\lambda'(u_0) \quad (13)$$

为了将 Jacobian 矩阵转换为 Jordan 标准型,基于特征向量构造一个矩阵如下:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}(u)\mathbf{Y} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{B}\mathbf{Y}) \quad (17)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12}f(\mathbf{B}\mathbf{Y}) \\ b_{22}f(\mathbf{B}\mathbf{Y}) \\ b_{32}f(\mathbf{B}\mathbf{Y}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

其中, $f(\mathbf{B}\mathbf{Y}) = -\left\{ \frac{p_5\omega^2 + u^2\cos(\phi)}{u^2 + \omega^2}y_1 + \frac{u\omega[\cos(\phi) - p_5]}{u^2 + \omega^2}y_2 + \frac{p_5k + u\cos(\phi)}{u + k}y_3 \right\}^3$.

Jordan 型矩阵由下式计算得出:

$$\mathbf{J}(u) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

方程(17)与方程(7)在平衡点附近有相同的渐近性态,即二者在平衡点的稳定性一致。

2.2 判断 Hopf 分岔类型

根据 Hopf 分岔理论变换法^[23]判断分岔类型,计算可得:

$$g_{11} = g_{20} = g_{02} = \omega_{11} = \omega_{20} = G_{110} = G_{101} = 0;$$

$$G_{21} = \frac{-3p_6[p_5^2\omega_0^2 + u^2\cos(\phi)^2]\{u^2b_{12}\cos(\phi) - \omega_0b_{22}[p_5 - \cos(\phi)]u + \omega_0^2p_5b_{12}\}}{4(u^2 + \omega_0^2)^2} +$$
$$\frac{-3p_6(p_5^2\omega_0^2 + u^2)\{b_{22}u^2\cos(\phi) + \omega_0b_{12}[p_5 - \cos(\phi)]u + b_{22}p_5\omega_0^2\}}{4(u^2 + \omega_0^2)^2}i;$$

(19)

进一步可以得到：

$$g_{21} = G_{21} + 2G_{110}\omega_{11} + G_{101}\omega_{20} = G_{21}, \quad c_1(0) = \frac{g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2}{2\omega_0}i + \frac{g_{21}}{2}$$

(20)

将式(19)代入式(20)可以得到极限环曲率系数为：

$$\delta = \text{Re}(c_1) = \frac{-3p_6[p_5^2\omega_0^2 + u^2\cos(\phi)^2]\{u^2b_{12}\cos(\phi) - \omega_0b_{22}[p_5 - \cos(\phi)]u + \omega_0^2p_5b_{12}\}}{8(u^2 + \omega_0^2)^2}$$

(21)

由范式理论可得出以下结论：如果 $\delta < 0$ ，起落架系统发生了超临界 Hopf 分岔；否则， $\delta > 0$ 时，系统则发生亚临界 Hopf 分岔。且当在 Hopf 分岔点邻域内，系统在平衡点 $(0, 0, 0)$ 附近的极限环幅值^[13]为：

$$r = \sqrt{-\frac{\alpha'(0)(u - u_0)}{\delta}}$$

(22)

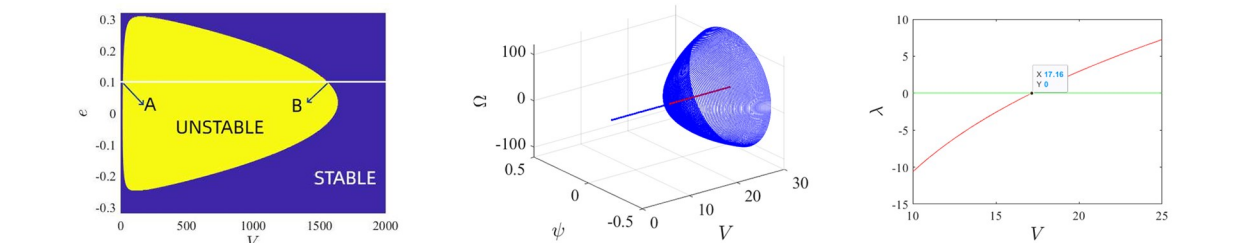


图 2 系统的稳定域图，分岔图和特征值实部图：(a) e - V 平面的稳定性边界；(b) $e=0.1\text{m}$ 时 A 侧摆振偏航角随速度变化的分岔图；(c) A 点邻域特征值实部图

Fig. 2 Stability region diagram, Bifurcation diagram and real part diagram of eigenvalues; (a) Stability boundary in e - V plane; (b) Bifurcation diagram of shimmy yaw angle of A side varying with velocity when $e=0.1\text{m}$; (c) Real part diagram of eigenvalues in the neighborhood of point A

表 1 模型参数表		
Table 1 Parameters of the model		
Description	Parameter	Value
Forward velocity	$V/(\text{m/s})$	$[0, 2000]$
Half contact length	a/m	0.1
Caster length	e/m	0.1
Moment of inertia of strut	$I_z/(\text{kg}\cdot\text{cm}^2)$	1.0
Vertical force	F_z/N	$[0, 10\ 000]$
Torsional stiffness of strut	$c/(\text{N}\cdot\text{m/rad})$	-100 000
Restoring coefficient of elastic tyre	$C_{Fa}/(1/\text{rad})$	20
Self-aligning coefficient of elastic tyre	$C_{Ma}/(\text{m/rad})$	-2
Torsional damping of strut	$k/(\text{N}\cdot\text{m/rad/s})$	-10
Damping coefficient of elastic tyre	$\kappa/(\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{rad})$	-270
Relaxation length	$\sigma=3a/\text{m}$	0.3
Radius of nose wheel	R/m	0.362
Rake angle	ϕ/rad	0.1571

3 Hopf 分岔数值模拟

本次研究所使用的参数如表 1^[8,9] 所示，考虑到参数分岔图像的完整性，部分参数的选取，如前向滑行速度等，可能超过实际的取值范围。

将稳定距与速度联系起来，得到相应的稳定域图[如图 2(a)所示]，其中稳定性边界由式(10)得出。图中，蓝色部分表示稳定区域，黄色部分表示不稳定区域。从图中可以看到，系统平衡点在 A、B 点处稳定性发生了改变。由于在现实生活中，飞机滑行达不到 B 点的速度，故本文只对 A 点展开分析。选取初始点为 $(0.01, 0.01, 0)$ ，绘制了系统的分岔图[见图 2(b)]，可以看出，系统在 A 点处，从平衡点处分岔出一个稳定的极限环。同时平衡点由稳定变为不稳定。绘制系统平衡点的实部特征值图[详见图 2(c)]，可知系统平衡点在 A 点的特征值实部由负变为正，即平衡点由稳定变为不稳定，与前面的推论相对应。根据式(10)计算可得系统 Hopf 分岔发生的临界速度 $V_A = 0.3u = 0.3 \times 57.19 \approx 17.16\text{m/s}$ 。由此可以推导出特征方程的特征值分别为： $\lambda_1 = -82.74, \lambda_{2,3} = \pm 337.92i$ ，即 $k = -82.74, \omega = 337.92$ 。由式(21)

计算可知, A 点的极限环曲率系数为 $\delta = -118.07 < 0$. 由以上分析可知, 该系统在 A 点处发生了超临界 Hopf 分岔, 在 $V > V_A$ 一侧出现了稳定的极限环, 即前起落架系统发生了摆振运动. 并可以计算得到 Hopf 分岔点邻域内极限环的幅值为:

$$r = \sqrt{-\frac{\alpha'(0)(u - u_0)}{\delta}} = \sqrt{-\frac{0.34(u - 57.19)}{-118.07}} = 0.053\sqrt{u - 57.19} \quad (23)$$

4 系统的 Hopf 分岔控制

分岔控制的一般目标是设计一种控制器, 使发

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = \Omega(t) \\ \dot{\Omega}(t) = \frac{c}{I_Z}\psi(t) + \left(\frac{k}{I_Z} + \frac{\kappa \cos(\phi)}{I_Z V}\right)\dot{\psi}(t) + \left(\frac{2C_{M_z}F_Z\gamma_M}{I_Z\alpha_M} - \frac{2e_{ff}C_{F_a}F_Z\gamma_F}{I_Z\alpha_F}\right)\alpha(t) - \left(\frac{2C_{M_z}F_Z\gamma_M}{I_Z\alpha_M^3} - \frac{2e_{ff}C_{F_a}F_Z\gamma_F}{I_Z\alpha_F^3}\right)\alpha^3(t) + k_1\psi(t) + k_2\dot{\psi}(t) \\ \dot{\alpha}(t) = \frac{V\cos(\phi)}{\sigma}\psi(t) + \frac{(e_{ff} - a)\cos(\phi)}{\sigma}\dot{\psi}(t) - \frac{V}{\sigma}\alpha(t) \end{cases} \quad (24)$$

其中, k_1, k_2 为待控制的参数. 系统(24)的线性化矩阵为:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_1 + k_1 & a_2 + k_2 & a_3 \\ a_5 \cos(\phi) & a_6 & -a_5 \end{bmatrix}$$

其中, $a_1 = \frac{c}{I_Z}, a_2 = \frac{k}{I_Z} + \frac{\kappa \cos(\phi)}{I_Z V}, a_3 = \frac{2C_{M_z}F_Z\gamma_M}{I_Z\alpha_M} - \frac{2e_{ff}C_{F_a}F_Z\gamma_F}{I_Z\alpha_F}, a_4 = \frac{2C_{M_z}F_Z\gamma_M}{I_Z\alpha_M^3} - \frac{2e_{ff}C_{F_a}F_Z\gamma_F}{I_Z\alpha_F^3}, a_5 = \frac{V}{\sigma}, a_6 = \frac{(e_{ff} - a)\cos(\phi)}{\sigma}$. 代入表 1 的数据则计算可知矩阵 C 的特征方程为:

$$\lambda^3 + (82.74 - k_2)\lambda^2 + (114\,192.26 - 57.20k_2 - k_1)\lambda - 57.20k_1 + 9.448\,817\,2 \times 10^6 = 0 \quad (25)$$

令 $b_1 = 82.74 - k_2; b_2 = 114\,192.26 - 57.20k_2 - k_1; b_3 = 9.448\,817\,2 \times 10^6 - 57.20k_1$. 下面分情况讨

生分岔的非线性系统的分岔特性可以被修改, 以达到某种理想的动力学行为. 如改变 Hopf 分岔点位置, 使系统达不到发生 Hopf 分岔的条件. 或者在不改变 Hopf 分岔点位置的情况下, 减小 Hopf 分岔产生的极限环的幅值大小.

4.1 线性控制

由前文可知, 在表 1 所示参数下, 当滑行速度 $V = 17.16 \text{ m/s}$ 时, 系统在平衡点 $(0, 0, 0)$ 邻域内发生 Hopf 分岔. 本节在不改变原系统平衡点的基础上, 采用线性控制器, 对系统(4)做经典 PD 控制如下:

论控制对 Hopf 分岔位置的影响. 为对结果进行比较, 以下的仿真初值均选为 $(0.01, 0.01, 0)$.

(1) 当 $k_1 = 0$ 时, 进行受控系统的 Hopf 分岔分析, 由 Routh-Hurwitz 判据原理, 方程所有的根全部具有负实部的充要条件是: $b_1 = 82.74 - k_2 > 0; b_3 = 9.448\,817\,2 \times 10^6 > 0; b_1b_2 - b_3 = (82.74 - k_2)(114\,192.26 - 57.20k_2) - 9.448\,817\,2 \times 10^6 > 0$. 可以得到满足控制的条件为: $k_2 < -0.0041 \text{ Nm}^2/\text{rad}$. 绘制当 $k_1 = 0$ 时, k_2 变化时的稳定距与速度的双参数分岔图, 并选择 $V = 18 \text{ m/s}$ 时, 绘制 k_2 分别为 0、-10、-20 时系统的时间序列图(图 3), 由图 3(b)可以看到, 系统不加控制时(即 k_1, k_2 都为 0), 处于振荡状态. 图 3(a)、图 3(c)说明施加控制后, 系统从振荡变为稳定状态. 随着 k_2 的减小, 系统稳定域增大且系统稳定的速度加快.

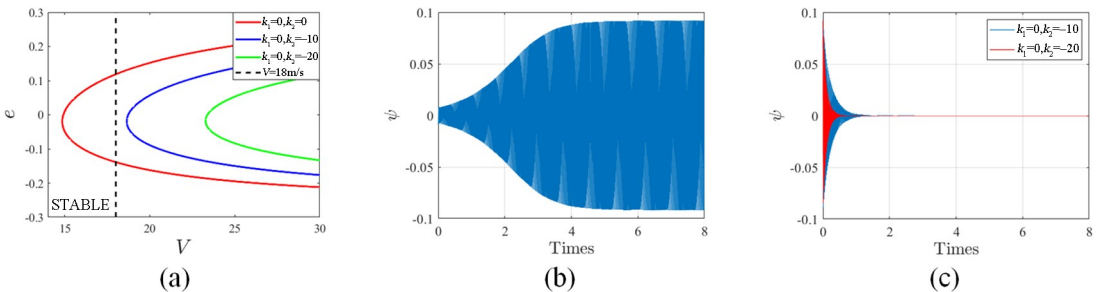


图 3 系统稳定域及时间序列图: (a) $k_1 = 0$ 稳定域; (b)、(c) 时间序列图

Fig. 3 Stability region of system and time response of yaw-angle: (a) system stability region when $k_1 = 0$; (b)、(c) time response

(2)同理,当 $k_2=0$ 时,方程所有的根全部具有负实部的充要条件是: $b_1=82.74>0$; $b_3=9.448\ 817\ 2\times 10^6-57.20k_1>0$; $b_1b_2-b_3=82.74(114\ 192.26-k_1)+57.20k_1-9.448\ 817\ 2\times 10^6>0$. 可以得到满足控制的条件为: $k_1<-19.29\text{N}\cdot\text{m}/\text{rad}$. 绘制当 $k_2=0$ 时, k_1 变化时的稳定距与速度的双

参数分岔图,并选择 $V=18\text{m/s}$ 时,绘制 k_1 分别为 0 、 $-50\ 000$ 、 $-100\ 000$ 时系统的时间序列图,如图 4 所示. 同样地,由图 4 可知,当 $k_2=0$ 时,系统在不加控制时处于振荡状态. 当施加控制后,系统从振荡变为稳定状态. 并随着 k_1 的减小,稳定域增大且稳定的速度加快.

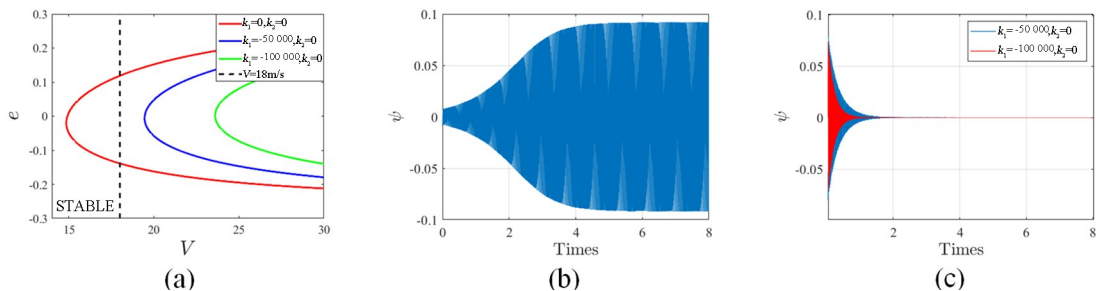


图 4 系统稳定域及时间序列图: (a) $k_2=0$ 稳定域; (b)、(c) 时间序列图

Fig. 4 Stability region of system and time response of yaw-angle: (a) system stability region when $k_2=0$; (b)、(c) time response

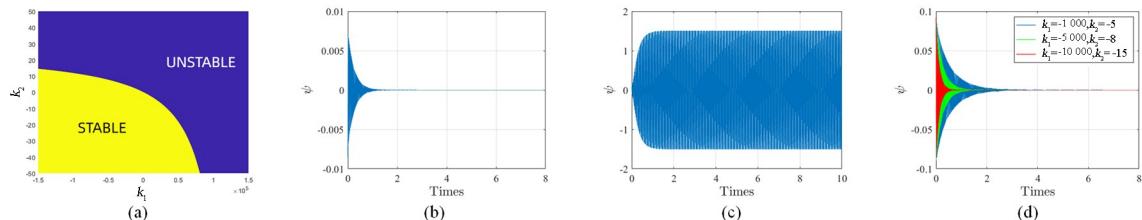


图 5 系统的控制稳定域图与时间序列图: (a) 可行域图; (b)、(c)、(d) 时间序列图

Fig. 5 The control stable domain of the system and time response of yaw-angle: (a) stable domain diagram; (b)、(c)、(d) time response

(3)当 k_1 、 k_2 都不为 0 时,方程所有的根全部具有负实部的充要条件是: $b_1=82.74-k_2>0$; $b_3=9.448\ 817\ 2\times 10^6-57.20k_1>0$; $b_1b_2-b_3=(82.74-k_2)(114\ 192.26-57.20k_2-k_1)-(9.448\ 817\ 2\times 10^6-57.20k_1)>0$. 由此可以绘制出控制的稳定区域如图 5 所示. 由图 5(a)可知,黄色区域为系统控制的稳定区域. 在该区域取一点,绘制时间序列图[图 5(b)]可知,随着时间的变化,系统最终趋于平衡. 相反地,取蓝色区域一点绘制时间序列图[图 5(c)]可见,尽管随着时间变化,系统依然保持持续振动. 说明在稳定区域内取合适的控制参数值,能够使系统的 Hopf 分岔点变成稳定的平衡点,即控制项使分岔点往后移, Hopf 分岔得到一定的控制. 由时间序列的对比[图 5(d)]可知,在控制参数的可行域内,随着各个控制系数的减小,系统收敛的速度会加快,即系统会更快地走向平衡.

综上所述,当线性控制参数满足一定条件时,可改变原系统 Hopf 分岔行为使其达到理想行为.

4.2 非线性控制

前面线性控制在不改变平衡点的情况下,使系

统的 Hopf 分岔点往后移动了. 本节采用非线性控制,在系统 Hopf 分岔点不变的情况下,使 Hopf 分岔产生的极限环幅值减小. 在不改变原系统 Hopf 分岔点的基础上,采用非线性控制器,对系统(6)第二个方程施加非线性控制器 $u_1=mx_1^3$,得到:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = p_1x_1 + (p_2 + \frac{p_3}{u\sigma})x_2 + p_4x_3 - p_6x_3^3 + mx_1^3 \\ \dot{x}_3 = u\cos(\phi)x_1 + p_5x_2 - ux_3 \end{cases} \quad (26)$$

即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ p_1 & p_2 + \frac{p_3}{u\sigma} & p_4 \\ u\cos(\phi) & p_5 & -u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -p_6x_3^3 + mx_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

由前面讨论可知,式(26)并未改变系统(6)的平衡点以及 Hopf 分岔点的位置. 下面研究式(26)在 Hopf 分岔点处的分岔特性,讨论控制器对 Hopf 分岔产生的极限环幅值的影响. 做与前面相同的线性变换,可以将系统变换为:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12}(-p_6 x_3^3 + m x_1^3) \\ b_{22}(-p_6 x_3^3 + m x_1^3) \\ b_{32}(-p_6 x_3^3 + m x_1^3) \end{bmatrix} \quad (28)$$

利用同样的变换法可求得：

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \tilde{g}_{20} = \tilde{g}_{02} = \tilde{w}_{11} = \tilde{w}_{20} = \tilde{G}_{110} = \tilde{G}_{101} = 0; \\ \tilde{G}_{21} &= \frac{3}{4} \left(\frac{b_{12} \{m(u^2 + w^2)^3 - p_6 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^3\}}{(u^2 + w^2)^3} - \frac{b_{12} p_6 u^2 w^2 [\cos(\phi) - p_5]^2 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]}{(u^2 + w^2)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_{22} p_6 u w [\cos(\phi) - p_5] [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^2}{(u^2 + w^2)^3} - \frac{b_{22} p_6 u^3 w^3 [\cos(\phi) - p_5]^3}{(u^2 + w^2)^3} \right) + \\ &\quad \frac{3i}{4} \left(\frac{b_{12} p_6 u w [\cos(\phi) - p_5] [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^2}{(u^2 + w^2)^3} + \frac{b_{12} p_6 u^3 w^3 (\cos(\phi) - p_5)^3}{(u^2 + w^2)^3} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_{22} \{-p_6 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^3 + m(u^2 + w^2)^3\}}{(u^2 + w^2)^3} - \frac{b_{22} p_6 u^2 w^2 [\cos(\phi) - p_5]^2 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]}{(u^2 + w^2)^3} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

进一步可以得到极限环曲率系数为：

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} = \text{Re}(\tilde{c}_1) &= \frac{3}{8} \left(\frac{b_{12} \{m(u^2 + w^2)^3 - p_6 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^3\}}{(u^2 + w^2)^3} - \frac{b_{22} p_6 u^3 w^3 [\cos(\phi) - p_5]^3}{(u^2 + w^2)^3} \right) - \\ &\quad \frac{b_{12} p_6 u^2 w^2 [\cos(\phi) - p_5]^2 [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]}{(u^2 + w^2)^3} - \frac{b_{22} p_6 u w [\cos(\phi) - p_5] [\cos(\phi)u^2 + p_5 w^2]^2}{(u^2 + w^2)^3} \end{aligned} \quad (30)$$

下面代入数值讨论控制对 Hopf 分岔极限环幅值的影响,通过表 1 的数据,可以计算得到此时添加控制后 Hopf 分岔点邻域内极限环的幅值为：

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \sqrt{-\frac{\alpha'(0)(u - u_0)}{\tilde{\delta}}} \\ &= \sqrt{-\frac{0.34(u - 57.19)}{0.0000791m - 118.07}} \end{aligned} \quad (31)$$

当 $m=0$ 时,极限环幅值为 $\tilde{r}=0.053\sqrt{u-57.19}$,与式(24)结果相同.当 $m<0$ 时,此时的极限环幅值：

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \sqrt{-\frac{0.34(u - 57.19)}{0.0000791m - 118.07}} < r = \\ &\quad \sqrt{-\frac{0.34(u - 57.19)}{-118.07}} \end{aligned}$$

即当 $m<0$ 时,所施加的控制器可使系统(6)产生的极限环幅值减少.根据式(31),分别绘制在分岔

点附近的极限环幅值 \tilde{r} 随速度 V 和控制参数 m 的变化情况如图 6. 系统(26)极限环幅值的近似解与数值解的比较如图 6(a)所示,可见在 $V=17.40\text{m/s}$ 时,近似解与数值解误差最小;随着分岔参数 V 的增大,近似解与数值解的误差逐渐增大.但对于略远离临界点 $V_0=17.16\text{m/s}$ (相应幅值为 $\tilde{r}=0$)的大部分 V 值,幅值的解析解与数值解的相对误差均小于 2%. 故依据 Hopf 分岔定义,在分岔点 V_0 邻域,解析解(31)是可靠的.在极近以及远离临界点 $V_0=17.16\text{m/s}$ 处,幅值的解析解的近似误差会增大一些.从图 6(b)、图 6(c)可以看出,当速度 V 固定时,极限环的幅值会随着控制参数 m 的减小而减小.根据上面的分析可知,通过调整非线性反馈控制器的控制参数可以改变极限环幅值的大小.

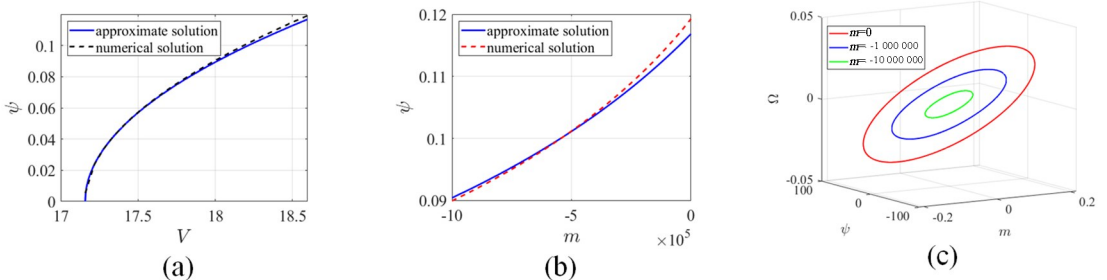


图 6 系统随参数值变化的幅值图及相图

Fig. 6 The amplitude and phase diagram of the system varying with the parameter

5 结论

文章主要讨论了一类飞机前起落架系统的 Hopf 分岔行为及分岔控制问题. 利用变换法计算了系统的稳定性判别式, 进而判定了原系统的 Hopf 分岔类型, 并给出分岔极限环幅值计算公式. 然后, 对系统分别施加线性和非线性控制器, 并详细讨论了线性和非线性控制器对 Hopf 分岔位置和极限环幅值的影响, 并对讨论结果进行仿真. 结果表明: 线性控制器可以在不改变系统平衡点的情况下, 将 Hopf 分岔点后移, 从而实现对 Hopf 分岔的控制; 非线性控制器可以实现在系统 Hopf 分岔点不变的情况下, 使 Hopf 分岔的幅值减小, 以达到理想控制效果. 该理论和数值结果可以为起落架参数优化提供依据.

参考文献

- [1] CURREY N S. Aircraft landing gear design: principles and practices [M]. Washington, D. C.: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988.
- [2] 李静. 一类经济模型的分岔周期解 [J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(4): 380—384.
LI J. Hopf bifurcation of an economic model [J]. Journal of Dynamics and Control, 2010, 8(4): 380—384. (in Chinese)
- [3] 陆云翔, 肖敏, 陶斌斌, 等. 独立非交叉传播的分数阶生物竞争网络 Hopf 分岔 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2022, 19(1): 1—11.
LU Y X, XIAO M, TAO B B, et al. Hopf bifurcation of biological competition network with independent non-cross propagation [J]. Complex Systems and Complexity Science, 2022, 19(1): 1—11. (in Chinese)
- [4] 和光珠. 具有时滞效应的 BAM 神经网络的稳定性与分岔 [J]. 应用数学进展, 2023, 12(6): 2718—2735.
HE G Z. Stability and bifurcation of BAM neural network with time delay effect [J]. Advances in Applied Mathematics, 2023, 12(6): 2718—2735. (in Chinese)
- [5] 武世江, 张继业, 隋皓, 等. 轮对系统的 Hopf 分岔研究 [J]. 力学学报, 2021, 53(9): 2569—2581.
WU S J, ZHANG J Y, SUI H, et al. Hopf bifurcation study of wheelset system [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(9): 2569—2581. (in Chinese)
- [6] 王鹏, 杨绍普, 刘永强, 等. 轮对非线性动力学模型稳定性和分岔特性研究 [J]. 力学学报, 2023, 55(2): 462—475.
WANG P, YANG S P, LIU Y Q, et al. Investigation of stability and bifurcation characteristics of wheelset nonlinear dynamic model [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2023, 55(2): 462—475. (in Chinese)
- [7] 冯飞. 起落架非线性摆振分岔分析 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2014.
FENG F. Nonlinear oscillation bifurcation analysis of landing gear [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014. (in Chinese)
- [8] THOTA P, KRAUSKOPF B, LOWENBERG M H. Shimmy in a nonlinear model of an aircraft nose landing gear with non-zero rake angle [D]. Bristol, UK: University of Bristol, 2008.
- [9] SOMIESKI G. Shimmy analysis of a simple aircraft nose landing gear model using different mathematical methods [J]. Aerospace Science and Technology, 1997, 1(8): 545—555.
- [10] 高相国, 卢翔, 单泽众. 考虑支柱轴向位移和纵向弯曲的双轮前起落架摆振特性分析 [J/OL]. 振动工程学报, 2023, 1—12 [2023-12-08]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20231114.2326.002.html>.
- [11] GAO X G, LU X, SHAN Z Z. Shimmy characteristics of dual-wheel nose landing gear considering the axial and longitudinal motions of strut [J/OL]. Journal of Vibration Engineering, 2023, 1—12 [2023-12-08]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/32.1349.TB.20231114.2326.002.html>.
- [12] KÜPPER T, MORITZ S. Generalized Hopf bifurcation for non-smooth planar systems [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2001, 359(1789): 2483—2496.
- [13] MIAO P C, LI D H, CHEN H B, et al. Generalized Hopf bifurcation of a non-smooth railway wheelset system [J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 100(4): 3277—3293.
- [14] 刘素华. 非线性系统 Hopf 分岔反馈控制 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2015.
- [15] LIU S H. Hopf bifurcation feedback control of non-

- linear systems [M]. Shanghai: Fudan Press, 2015. (in Chinese)
- [14] 张中华, 付景超. Rössler 原型 4 系统的 Hopf 分岔及幅值控制 [J]. 数学的实践与认识, 2016. ZHANG Z H, FU J C. Hopf bifurcation and amplitude control of an Rössler prototype-4 system [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2016. (in Chinese)
- [15] 张中华, 付景超, 邓冠男. 一个类 Lorenz 系统的 Hopf 分岔分析及分岔控制 [J]. 复杂系统与复杂性科学, 2015, 12(1): 96—103. ZHANG Z H, FU J C, DENG G N. Hopf bifurcation analysis and bifurcation control of a Lorenz-like system [J]. Complex Systems and Complexity Science, 2015, 12(1): 96—103. (in Chinese)
- [16] GORDILLO F, SALAS F, ORTEGA R, et al. Hopf bifurcation in indirect field-oriented control of induction motors [J]. Automatica, 2002, 38(5): 829—835.
- [17] 余龙华, 柳贵东, 施晓红. 磁悬浮系统的 Hopf 分岔自适应控制研究 [J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 54—58. SHE L H, LIU G D, SHI X H. Adaptive control of maglev system according to Hopf bifurcation [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(1): 54—58. (in Chinese)
- [18] OUEINI S S, NAYFEH H A. Single-mode control of a cantilever beam under principal parametric excitation [J]. Journal of Sound and Vibration, 1999, 224(1): 33—47.
- [19] 孙桐林, 胡忠国, 高国生. 轮对蛇行运动 Hopf 分岔的非线性反馈控制 [J]. 国防交通工程与技术, 2004, 2(1): 29—33. SUN T L, HU Z G, GAO G S. Nonlinear feedback control of Hopf bifurcation of the hunting motion in a rail wheelset [J]. Traffic Engineering and Technology for National Defence, 2004, 2(1): 29—33. (in Chinese)
- [20] 陈大伟. 起落架摆振的非线性分析及控制 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2012. CHEN D W. Nonlinear analysis and control of landing gear shimmy [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2012. (in Chinese)
- [21] BURBANO-L D A, CORAGGIO M, DI BEMARDO M, et al. Adaptive and quasi-sliding control of shimmy in landing gears [C]//2018 European Control Conference (ECC). New York: IEEE, 2018: 563—568.
- [22] LIU W M. Criterion of Hopf bifurcations without using eigenvalues [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 182(1): 250—256.
- [23] 谢建华, 乐源, 李登辉. 非线性动力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2018. XIE J H, LE Y, LI D H. Nonlinear system dynamics [M]. Beijing: Science Press, 2018. (in Chinese)