

类 Chen-Qi 混沌系统的固定时间自适应同步控制

王院生[†]

(中国地质大学(武汉)机械与电子信息学院, 武汉 430074)

摘要 类 Chen-Qi 四维混沌系统的渐近稳定控制的同步误差不能在有限时间内收敛到零,有限时间控制的同步误差收敛到零的状况与初值有关. 因此,本文应用固定时间控制技术,设计了自适应控制器和参数估计律,试图使得驱动系统与同类型的参数未知的响应系统在固定时间内达到同步,完成了理论证明. 应用数值仿真考察同步误差收敛到零的状况. 选取不同参数值,不同状态初值,考察状态时程图、同步误差曲线等. 结果表明:混沌运动时,固定时间内同步误差收敛到零的效果较好,与状态初值无关,收敛时间符合理论计算值;周期运动时,固定时间内前三个状态的同步误差收敛到零的效果较好,收敛时间符合理论计算值,但第四个状态的同步误差的收敛时间不符合理论计算值,其原因是系统存在的三次非线性项的不平衡、不匹配.

关键词 类 Chen-Qi 超混沌系统, 固定时间同步, 自适应控制器, 同步误差, 数值仿真

中图分类号: TP311

文献标志码: A

Fixed-Time Adaptive Synchronization Control of Chen-Qi-like Chaotic System

Wang Yuansheng[†]

(School of Mechanics and Electrical Information, China University of Geo-Science, Wuhan 430074, China)

Abstract For Chen-Qi-like four-dimensional chaotic system, controllers designed with Lyapunov stability theory make synchronization errors converge to zero asymptotically. Finite-time control technique improve it, but the errors are various with initial conditions. Therefore, fixed-time control technique is applied to design an adaptive controller and parameter estimation law, try to make the drive system synchronizing with a same type response system of unknown parameters in a fixed time, which is proven theoretically. State time history diagrams and synchronization error curves are investigated by numerical simulation with various parameters and initial state values. The results show that: during chaotic motion, the effects of synchronization errors converge to zero within a fixed time is only related to system parameters, not dependent of the initial state value, and the convergence time conforms to the theoretical calculation; during periodic motion, the effects of first three synchronization errors converge to zero within a fixed time is good, their convergence time conforms to the theoretical calculation. However, the convergence time of the last synchronization error does not conform to the theoretical calculation, due to the imbalance and mismatch of the cubic nonlinear term in the system.

Key words Chen-Qi-like hyper-chaotic system, fixed-time synchronization, adaptive controller, synchronization errors, numerical simulation

引言

非线性动力学的特点是混沌运动^[1]. 由于它在保密通信中的应用, 混沌同步的研究是热点之一^[2-4]. 类 Chen-Qi 四维系统是一种典型的非线性系统, 它在不同的参数组合或初值条件下, 可产生混沌运动、周期运动等. 在类 Chen-Qi 四维系统的同步控制研究中, 依据 Lyapunov-Krasovskii 泛函理论设计的控制器, 仅能实现渐近同步, 同步误差需要很长的时间才能收敛到 0; 其数值仿真也表明, 三个含有二次非线性项的同步误差能在有限时间内收敛到 0, 但含有三次非线性项的同步误差, 在混沌运动和周期运动条件下, 有限时间内收敛到 0 的状况, 存在差异^[5].

为解决这一问题, 借助有限时间稳定理论^[6-10], 设计自适应控制器和参数估计律, 证明了有限时间同步. 但数值仿真表明, 有限时间内同步误差趋近为零的效果仍然与系统的运动状态有关, 周期运动状态时, 有限时间内同步误差趋近为零的效果较好; 混沌运动时, 有限时间内同步误差趋近为零的效果较差, 主要是含有三次非线性项的同步误差的收敛状况较差^[11].

故而本文采用双幂函数积分技术, 设计自适应控制器和参数估计律, 试图实现两个同类型的混沌系统的固定时间同步^[12]. 考察同步误差的收敛情况, 进行理论证明, 数值仿真检验其效果.

1 类 Chen-Qi 系统的固定时间同步

类 Chen-Qi 驱动系统如式(1):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(y_1 - x_1) + y_1 z_1 \\ \frac{dy_1}{dt} = (c - a)x_1 + cy_1 - x_1 z_1 \\ \frac{dz_1}{dt} = x_1^2 - y_1 z_1 - bz_1 - w_1 \\ \frac{dw_1}{dt} = x_1 y_1 z_1 - x_1 z_1 - dw_1 \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c, d 为正的常数, 是驱动系统的未知参数; (x_1, y_1, z_1, w_1) 为状态变量; $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 为初值.

参照文献[5]和文献[11], 取初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别为 0.1, -0.2, -0.5, 0.3; 取 $a=37, b=3, d=38$. 当 $c=26$ 时, 解为混沌运动; 当 $c=36$

时, 解为周期运动.

同类型的响应系统如式(2):

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = a_2(y_2 - x_2) + y_2 z_2 + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = (c_2 - a_2)x_2 + c_2 y_2 - x_2 z_2 + u_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = x_2^2 - y_2 z_2 - b_2 z_2 - w_2 + u_3 \\ \frac{dw_2}{dt} = x_2 y_2 z_2 - x_2 z_2 - d_2 w_2 + u_4 \end{cases} \quad (2)$$

其中: a_2, b_2, c_2, d_2 为响应系统的需要估计的未知参数; (u_1, u_2, u_3, u_4) 是待设计的同步控制器; (x_2, y_2, z_2, w_2) 为状态变量; $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 为系统(2)的初值.

误差系统为式(3):

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \tilde{a}(y_2 - x_2) + a(e_2 - e_1) + e_2 e_3 + e_2 z_1 + e_3 y_1 + u_1 \\ \frac{de_2}{dt} = (\tilde{c} - \tilde{a})x_2 + (c - a)e_1 + \tilde{c}y_2 + ce_2 - e_1 e_3 - e_1 z_1 - e_3 x_1 + u_2 \\ \frac{de_3}{dt} = e_1^2 + 2e_1 x_1 - e_2 e_3 - e_2 z_1 - e_3 y_1 - \tilde{b}z_2 - be_3 - e_4 + u_3 \\ \frac{de_4}{dt} = e_1 e_2 e_3 + x_1 e_2 e_3 + y_1 e_1 e_3 + z_1 e_1 e_2 + x_1 y_1 e_3 + x_1 z_1 e_2 + y_1 z_1 e_1 - z_1 e_1 - x_1 e_3 - e_1 e_3 - \tilde{d}w_2 - de_4 + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1, e_4 = w_2 - w_1$; $\tilde{a} = a_2 - a, \tilde{b} = b_2 - b, \tilde{c} = c_2 - c, \tilde{d} = d_2 - d$.

下面, 先给出必要的定义和引理^[13].

定义 1: 非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x), x(t_0) = x_0$ 的平衡点(原点)是全局有限时间稳定的, 且收敛时间 $T(x_0)$ 是全局有界的, 即存在一个正数 $T_{\max} > 0$, 使得对 $\forall x_0$ 都满足 $T(x_0) < T_{\max}$, 则该平衡点是固定时间稳定的.

定义 2: 如果存在有界的正常数 t_1 满足 $0 < t_1 < T_{\max}$, 使得对 $\forall x_0$, 有 $\lim_{t \rightarrow t_1} |e_i| = 0$; 且 $\forall t > t_1$ 有 $|e_i| \equiv 0$, 其中 $i=1, 2, 3, 4$. 则称非线性系统(1)和(2)实现固定时间同步.

引理 1: 考虑非线性系统 $\dot{x}(t) = f(x), x(t_0) = x_0$. 假定存在一个连续的径向无界的正定函数 $V(x, t)$ 满足:

$$\frac{d}{dt}V(x,t) = \dot{V}(x) \leq -\alpha V^p - \beta V^q, \forall t > t_0 \quad (4)$$

且有 $V(t_0) \geq 0$ 成立. 其中四个常数 $\alpha > 0, \beta > 0, p > 1, 0 < q < 1$, 则平衡点 $x=0$ 是固定时间稳定的.

调整时间 T 为:

$$T \leq T_{\max} = \frac{1}{\alpha(p-1)} + \frac{1}{\beta(1-q)} \quad (5)$$

进一步, 若 $p=m/n, q=\rho/\varphi$, 其中 m, n, ρ, φ 是四个正奇数, 且满足 $m > n, \rho < \varphi$, 则调整时间上界为:

$$T_{\max} = \frac{n}{\alpha(m-n)} + \frac{\varphi}{\beta(\varphi-\rho)} \quad (6)$$

引理 2: 对于任意实数组 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 和常数 r , 当 $0 < r < 1$ 时, 不等式(7)成立:

$$\left(\sum_{j=1}^n |\tau_j|\right)^r \leq \sum_{j=1}^n (|\tau_j|)^r \leq n^{1-r} \left(\sum_{j=1}^n |\tau_j|\right)^r \quad (7)$$

当 $r > 1$ 时, 不等式(8)成立:

$$\sum_{j=1}^n (|\tau_j|)^r \leq \left(\sum_{j=1}^n |\tau_j|\right)^r \leq n^{r-1} \sum_{j=1}^n (|\tau_j|)^r \quad (8)$$

引理 3: 对于任意实数组 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ 和常数 μ , 当 $0 < \mu < 1$ 时, 不等式(9)成立:

$$\sum_{j=1}^n (|\tau_j|)^{\mu+1} \geq \left(\sum_{j=1}^n |\tau_j|\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \quad (9)$$

控制目标是构造控制器和参数估计校正律, 使得系统(1)和系统(2)的状态达到固定时间同步.

定理: 构造自适应控制器和参数估计校正律如式(10)、式(11):

$$\begin{cases} u_1 = ae_1 - e_3 y_1 - K[\text{sig}(e_1)]^{m/n} - L[\text{sig}(e_1)]^{\rho/\varphi} \\ u_2 = -ce_1 - ce_2 + e_3 x_1 - K[\text{sig}(e_2)]^{m/n} - L[\text{sig}(e_2)]^{\rho/\varphi} \\ u_3 = -e_1^2 - 2e_1 x_1 + e_2 e_3 + e_2 z_1 + e_3 y_1 + be_3 + e_4 - K[\text{sig}(e_3)]^{m/n} - L[\text{sig}(e_3)]^{\rho/\varphi} \\ u_4 = -e_1 e_2 e_3 - x_1 e_2 e_3 - y_1 e_1 e_3 - z_1 e_1 e_2 - x_1 y_1 e_3 - x_1 z_1 e_2 - y_1 z_1 e_1 + z_1 e_1 + x_1 e_3 + e_1 e_3 + de_4 - K[\text{sig}(e_4)]^{m/n} - L[\text{sig}(e_4)]^{\rho/\varphi} \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -(y_2 - x_2)e_1 + x_2 e_2 - K[\text{sig}(\tilde{a})]^{m/n} - L[\text{sig}(\tilde{a})]^{\rho/\varphi} \\ \dot{b}_2 = z_2 e_3 - K[\text{sig}(\tilde{b})]^{m/n} - L[\text{sig}(\tilde{b})]^{\rho/\varphi} \\ \dot{c}_2 = -x_2 e_2 - y_2 e_2 - K[\text{sig}(\tilde{c})]^{m/n} - L[\text{sig}(\tilde{c})]^{\rho/\varphi} \\ \dot{d}_2 = w_2 e_4 - K[\text{sig}(\tilde{d})]^{m/n} - L[\text{sig}(\tilde{d})]^{\rho/\varphi} \end{cases} \quad (11)$$

其中常数 $K > 0$, 常数 $L > 0$, 四个正奇数满足: $m > n, \rho < \varphi$; $[\text{sig}(e_i)]^\gamma = \text{sign}(e_i) \cdot |e_i|^\gamma$, $\text{sign}(e_i)$ 为符号函数, $i=1, 2, 3, 4$. 则在控制器(10)和参数估计校正律(11)作用下, 驱动系统(1)和响应系统(2)的状态可实现固定时间同步.

证明: 对误差系统(3), 试取候选 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2) \quad (12)$$

则 $V(t)$ 是正定的、可微的函数, 且 $V(t_0) \geq 0$.

$V(t)$ 沿着轨迹(3)的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_3 \dot{e}_3 + e_4 \dot{e}_4 + \tilde{a} \dot{\tilde{a}} + \tilde{b} \dot{\tilde{b}} + \tilde{c} \dot{\tilde{c}} + \tilde{d} \dot{\tilde{d}} \\ &= \sum_{i=1,2,3,4} \{-Ke_i[\text{sig}(e_i)]^{m/n} - Le_i[\text{sig}(e_i)]^{\rho/\varphi}\} - \\ &\quad \{K\tilde{a}[\text{sig}(\tilde{a})]^{m/n} + L\tilde{a}[\text{sig}(\tilde{a})]^{\rho/\varphi}\} - \\ &\quad \{K\tilde{b}[\text{sig}(\tilde{b})]^{m/n} + L\tilde{b}[\text{sig}(\tilde{b})]^{\rho/\varphi}\} - \\ &\quad \{K\tilde{c}[\text{sig}(\tilde{c})]^{m/n} + L\tilde{c}[\text{sig}(\tilde{c})]^{\rho/\varphi}\} - \\ &\quad \{K\tilde{d}[\text{sig}(\tilde{d})]^{m/n} + L\tilde{d}[\text{sig}(\tilde{d})]^{\rho/\varphi}\} \end{aligned} \quad (13)$$

其中代入了式(10)和式(11).

应用引理 2 和引理 3, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -K[|e_1|^{1+m/n} + |e_2|^{1+m/n} + |e_3|^{1+m/n} + |e_4|^{1+m/n}] - \\ &\quad K[|\tilde{a}|^{1+m/n} + |\tilde{b}|^{1+m/n} + |\tilde{c}|^{1+m/n} + |\tilde{d}|^{1+m/n}] - \\ &\quad L[|e_1|^{1+\rho/\varphi} + |e_2|^{1+\rho/\varphi} + |e_3|^{1+\rho/\varphi} + |e_4|^{1+\rho/\varphi}] - \\ &\quad L[|\tilde{a}|^{1+\rho/\varphi} + |\tilde{b}|^{1+\rho/\varphi} + |\tilde{c}|^{1+\rho/\varphi} + |\tilde{d}|^{1+\rho/\varphi}] \\ &\leq -K \cdot 8^{1-(1+m/n)/2} [2V]^{(1+m/n)/2} - L[2V]^{(1+\rho/\varphi)/2} \end{aligned} \quad (14)$$

取 $\alpha = K \cdot 8^{1-(1+m/n)/2} \cdot 2^{(1+m/n)/2} > 0, p = (1+m/n)/2 > 1, \beta = L \cdot 2^{(1+\rho/\varphi)/2} > 0, 0 < q = (1+\rho/\varphi)/2 < 1$, 则由引理 1 得到误差系统(3)是固定时间稳定的, 且调整时间上界为:

$$T_{\max} = \frac{1}{K} \cdot 2^{m/n-2} \frac{n}{m-n} + \frac{1}{K} \cdot 2^{-(1+\rho/\varphi)/2} \frac{\varphi}{\varphi-\rho} \quad (15)$$

证毕.

同时, 从证明过程可见: 固定时间同步的非线性系统, 其同步时间与初始值没有关系, 即初始值不会影响收敛时间, 因此相对于有限时间同步而言, 固定时间同步更加符合实际中的应用.

下面考察非线性系统在混沌运动和周期运动下, 固定时间同步的效果.

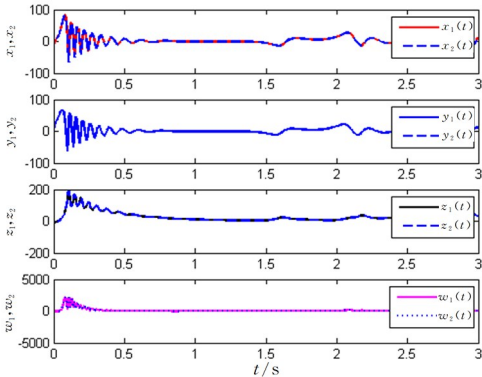
2 固定时间同步的数值仿真

例 1: 根据式(10)和式(11)构造的自适应控制器和参数自适应律,其中参数取值为: $K=L=6, m=11, n=3, \rho=5, \varphi=19$,记为参数 1. 算得固定同步时间为: $T_{\max}=T_1+T_2=0.2247$ 秒.

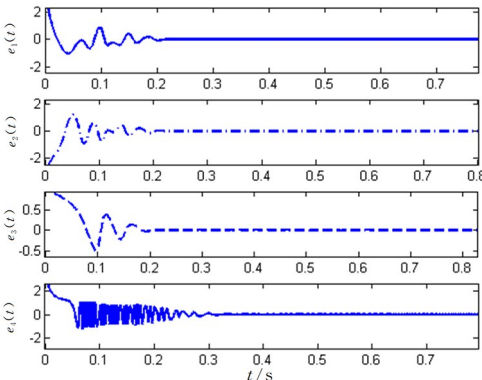
根据文献[11],系统(1)的初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别取为 $-10.1, 20.2, -8.5, -9.3$; 分别取参数为 $a=37, b=3, c=26, d=38$; 系统(2)的初值 $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 分别取为 $1, -1, -7.5, 3.5$; 分别取参数 $a_2(0)=30, b_2(0)=4, c_2(0)=25, d_2(0)=40$.

记上述给定的状态初值为初值 1, 给定的参数值为参数 1. 根据上述算法,用 Matlab 编写程序,进行仿真,得到两个系统的状态变量的情况如图 1(a)、同步误差的情况如图 1(b).

由图 1(b)可见,类 Chen-Qi 四维系统作混沌运动时,同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.2247 秒基本衰减到 0, 同步误差 e_4 在约 0.3 秒衰减到 0. 基本符合调整时间上界的估计.



(a) 状态变量时程图 ($c=26$ 混沌运动)
(a) State variable time histogram with $c=26$



(b) 同步误差曲线图($c=26$ 混沌运动)
(b) Synchronization error curve with $c=26$

图 1 混沌运动时的参数曲线

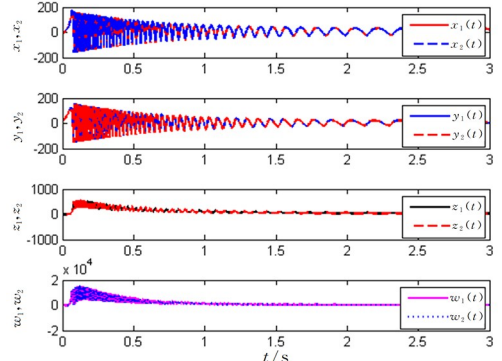
Fig. 1 Parameter curves during chaotic motion

例 2: 改取 $c=36$, 其余参数同例 1, 再仿真得到两个系统的状态变量的情况如图 2(a)、同步误差的

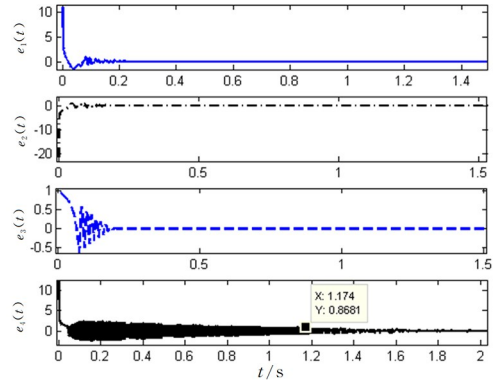
情况如图 2(b).

由图 2(b)可见,类 Chen-Qi 四维系统作周期运动时,同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.2247 秒基本衰减到 0, 同步误差 e_4 在约 1.5 秒(>0.2247 秒)才衰减到 0.

可知:此时混沌运动的误差同步情况好于周期运动的误差同步情况;固定时间同步不依赖于初始值,但与系统的参数相关.



(a) 状态变量时程图($c=36$ 周期运动)
(a) State variable time histogram with $c=36$



(b) 同步误差曲线图($c=36$ 周期运动)
(b) Synchronization error curve with $c=36$

图 2 周期运动时的参数曲线

Fig. 2 Parameter curves during periodic motion

例 3: 改取系统(1)初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别取为 $-0.1, 0.2, -0.5, 0.3$; 系统(2)的 $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 分别取为 $1, -1, 0.5, -0.5$; 记上述给定的状态初值为初值 2. 其余参数同例 1.

重新仿真,得同步误差曲线如图 3. 可见混沌运动时同步误差在约 0.2247 秒衰减到 0. 但 e_4 仍存在微小的波动. 此时同步误差的收敛情况较好.

例 4: 取系统(1)初值 $x_{10}, y_{10}, z_{10}, w_{10}$ 分别为 $-0.1, 0.2, -0.5, 0.3$; 系统(2)的初值 $x_{20}, y_{20}, z_{20}, w_{20}$ 分别为 $1, -1, 0.5, -0.5$; 即为初值 2. 改取 $c=36$, 其余参数同例 1, 重新仿真得同步误差曲线如图 4. 可见周期运动时同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.2247 秒衰减到 0, 但同步误差 e_4 在约 1.5 秒衰减到 0.

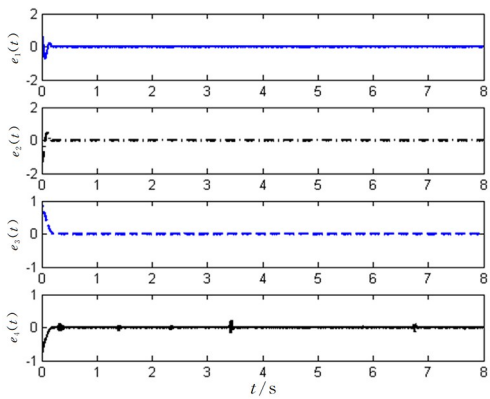


图3 不同状态初值时的同步误差曲线($c=36$ 混沌运动)
Fig. 3 Synchronization error with $c=36$ at different initial values

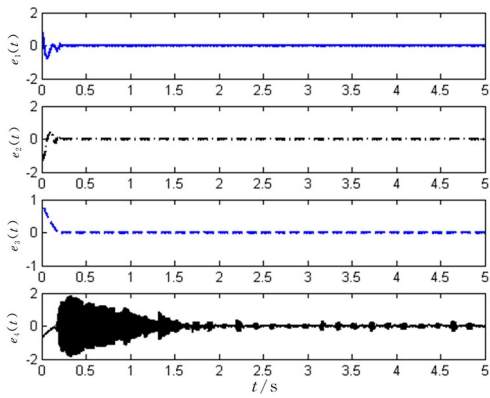


图4 不同状态初值时的同步误差曲线($c=26$ 周期运动)
Fig. 4 Synchronization error with $c=26$ at different initial values

对比例3和例4可知,此时混沌运动同步误差收敛状况好于周期运动时同步误差的收敛状况。

例5: 取驱动系统(1)的初值与响应系统(2)的初值同例1,即为初值1.改参数取值: $K=L=3, m=9, n=5, \rho=5, \varphi=11$,记为参数2.算得固定同步时间: $T_{\max}=T_1+T_2=0.6440$ 秒.重新仿真,同步误差曲线如图5.由图5可见,混沌运动时同步误差 e_1, e_2, e_3, e_4 在约0.6440秒衰减到0.可见此时同步误差的收敛情况较好。

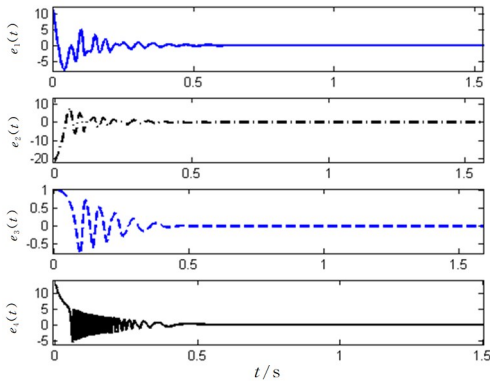


图5 不同参数时的同步误差($c=26$ 混沌运动)
Fig. 5 Synchronization error with $c=26$ at different controller parameters

例6: 取驱动系统(1)的初值与响应系统(2)的初值同例1,即为初值1.改参数取值: $K=L=3, m=9, n=5, \rho=5, \varphi=11$,即为参数2.算得固定同步时间: $T_{\max}=0.6440$ 秒.改取 $c=36$,重新仿真,同步误差曲线如图6.可见周期运动时同步误差 e_1, e_2, e_3 在约0.6440秒衰减到0,但 e_4 在约1.8秒衰减到0。

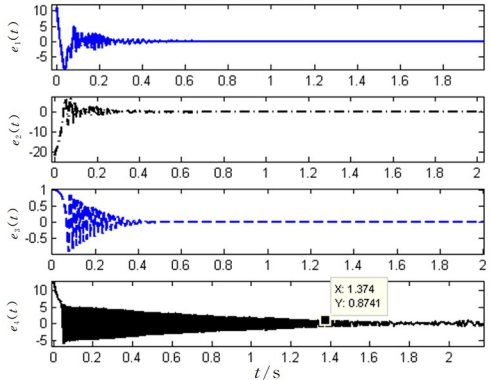


图6 不同参数时的同步误差($c=36$ 周期运动)
Fig. 6 Synchronization error with $c=36$ at different controller parameters

由例5和例6对比可知,此时混沌运动的同步误差收敛情况,好于周期运动的情况。

对比例1和例5可知,混沌运动时,同步误差的收敛时间由0.3秒变为0.6440秒,调整时间受参数值的影响比较明显。

对比例2和例6可知,周期运动时,同步误差 e_4 的收敛时间明显不同于 e_1, e_2, e_3 的收敛时间。

例7: 改取系统(1)初值,系统(2)的初值为初值2.改参数取值: $K=L=3, m=9, n=5, \rho=5, \varphi=11$,即为参数2.其余参数同例1.算得固定同步时间为: $T_{\max}=0.6440$ 秒.取 $c=26$,重新仿真,得同步误差曲线如图7。

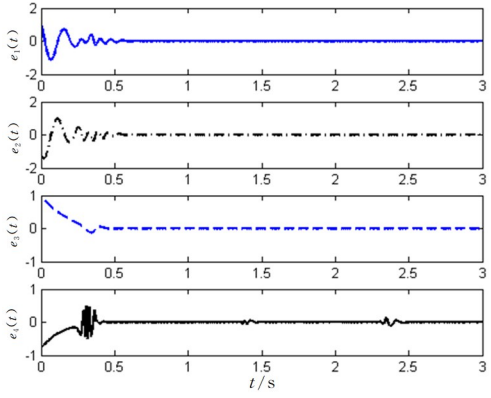


图7 不同参数,不同初值时的同步误差($c=26$ 混沌运动)
Fig. 7 Synchronization error with $c=26$ at different controller parameters, and different initial values

由图 7 可见,此时同步误差 e_1, e_2, e_3, e_4 在约 0.6440 秒衰减到 0,同步误差的收敛情况较好.

例 8: 在例 7 的基础上,改取 $c=36$,其余参数同例 7.算得固定同步时间: $T_{\max}=0.6440$ 秒.重新仿真,得同步误差曲线如图 8.

由图 8 可见,此时周期运动的同步误差 e_1, e_2, e_3 在约 0.6440 秒衰减到 0,但 e_4 在约 8.743 秒仍有数值 1.297.可见同步误差的收敛情况不好.

对比例 7 和例 8 可知,混沌运动时同步误差的收敛情况,好于周期运动时同步误差的收敛情况.

对比例 1、例 3、例 5 和例 7 可知,混沌运动时,同步误差的收敛情况较好,收敛时间与式(15)的计算值基本一致,它仅与参数值有关,与状态的初值无关.

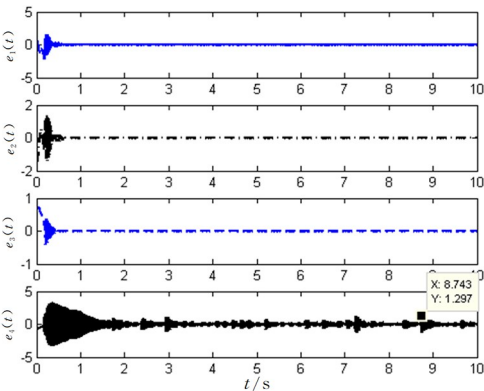


图 8 不同参数,不同初值时的同步误差($c=36$ 周期运动)
Fig. 8 Synchronization error with $c=36$ at different controller parameters, and different initial values

对比例 2、例 4、例 6 和例 8 可知,周期运动时,同步误差的收敛状况相似,同步误差 e_4 的收敛情况不好.综合以上各例,将仿真结果列表如表 1:

表 1 仿真结果汇总				
Table 1 Summary of simulation results				
序号	运动模式	条件	e_1, e_2, e_3 收敛时间/s	e_4 收敛时间/s
例 1	混沌	初值 1, 参数 1	0.2247	0.3
例 2	周期	初值 1, 参数 1	0.2247	1.5
例 3	混沌	初值 2, 参数 1	0.2247	0.2247
例 4	周期	初值 2, 参数 1	0.2247	1.5
例 5	混沌	初值 1, 参数 2	0.6440	0.6440
例 6	周期	初值 1, 参数 2	0.6440	1.8
例 7	混沌	初值 2, 参数 2	0.6440	0.6440
例 8	周期	初值 2, 参数 2	0.6440	9.0

动时,固定时间稳定理论得到的同步误差的收敛时间与初始状态无关,但与系统参数有关,包括系统本身的参数和自适应控制器引入的参数 $K, L, m, n, \rho, \varphi$.且同步误差的收敛时间的数值与理论计算结果基本相符.

当类 Chen-Qi 系统处于周期运动时,只有同步误差 e_1, e_2, e_3 的收敛时间符合固定时间稳定理论的规律,而同步误差 e_4 的收敛时间不符合.其原因是 e_1, e_2, e_3 都只存在二次非线性, e_4 存在三次非线性项,从而产生不平衡、不匹配,进而导致误差的收敛情况差异较大.这是系统本身造成的.

3 结论

由 Lyapunov 稳定性理论设计的自适应控制器和参数估计律,仅能实现类 Chen-Qi 四维超混沌系统的渐近同步控制.应用有限时间稳定理论,同步误差的收敛时间又与初始状态值有关,当初状态偏离平衡点无穷远时,同步误差的收敛时间为无穷大.为解决这一问题,本文应用固定时间控制理论,设计了自适应控制器和参数估计律,试图实现两个同类型的类 Chen-Qi 四维超混沌系统的固定时间同步,完成了理论证明,并用数值仿真检验了它的效果.

数值计算的结果表明:同步误差在固定时间内收敛到 0 的效果,与系统参数 c 有关,也与控制器参数 $K, L, m, n, \rho, \varphi$ 的取值有关.当系统作混沌运动时,它与系统的初始状态的取值无关.当系统作周期运动时,由于存在三次非线性项,与 e_1, e_2, e_3 的收敛情况相比, e_4 的收敛速度较慢.这是系统本身的不平衡、不匹配导致的.

如何改进算法,彻底消除这种不平衡,使得四个同步误差收敛情况一致,有待深入研究,例如改善调整时间的估计^[14],或采用预定时间控制技术设计控制器^[15-19].

本文的研究表明,固定时间稳定理论运用于类 Chen-Qi 四维系统的混沌运动时,其收敛时间的确与系统的状态初值无关的,收敛时间符合理论计算值;但对于系统的周期运动,符合情况不好.本文有助于理解 Chen-Qi 四维混沌系统自适应同步.

参考文献

[1] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow [J].

综上所述,当四维类 Chen-Qi 系统处于混沌运

- Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20(2): 130—141.
- [2] 王琳, 倪樵, 刘攀, 等. 一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 1—6.
- WANG L, NI Q, LIU P, et al. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-like system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2005, 3(4): 1—6. (in Chinese)
- [3] 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步[J]. 动力学与控制学报, 2006, 4(1): 1—4.
- CHEN B Y. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system [J]. Journal of Dynamics and Control, 2006, 4(1): 1—4. (in Chinese)
- [4] WANG E T, YAN S H, WANG Q Y. A new four-dimensional chaotic system with multistability and its predefined-time synchronization [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2022, 32(14): 2250207.
- [5] WANG Y S, LI B, LU G Y. Synchronization and anti-synchronization for a 4-dimensional hyperchaotic system [J]. Journal of Vibration Testing and System Dynamics, 2020, 4(4): 325—336.
- [6] WANG L M, DONG T D, GE M F. Finite-time synchronization of memristor chaotic systems and its application in image encryption [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 347: 293—305.
- [7] ABOOE A, MORAVEJ KHORASANI M, HADERI M. Finite time control of robotic manipulators with position output feedback [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(16): 2982—2999.
- [8] ZOU A M, DE RUITER A H J, KUMAR K D. Distributed finite-time velocity-free attitude coordination control for spacecraft formations [J]. Automatica, 2016, 67: 46—53.
- [9] NING B D, HAN Q L. Prescribed finite-time consensus tracking for multiagent systems with non-holonomic chained-form dynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(4): 1686—1693.
- [10] BASIN M. Finite- and fixed-time convergent algorithms; design and convergence time estimation [J]. Annual Reviews in Control, 2019, 48: 209—221.
- [11] WANG Y S, LI B, YU X Y. Finite-time synchronization of the 4-D hyper-chaotic Chen-Qi-like system [J]. Journal of Physics: Conference Series, 2023, 2468(1): 012020.
- [12] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2106—2110.
- [13] CHAOUKI A, EL ABED A. Finite-time and fixed-time synchronization of inertial neural networks with mixed delays [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2021, 34(1): 206—235.
- [14] ALDANA-LÓPEZ R, GÓMEZ-GUTIÉRREZ D, JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ E, et al. Enhancing the settling time estimation of a class of fixed-time stable systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2019, 29(12): 4135—4148.
- [15] SÁNCHEZ-TORRES J D, SANCHEZ E N, LOUKIANOV A G. Predefined-time stability of dynamical systems with sliding modes [C]//2015 American Control Conference (ACC). New York: IEEE, 2015: 5842—5846.
- [16] PAL A K, KAMAL S, NAGAR S K, et al. Design of controllers with arbitrary convergence time [J]. Automatica, 2020, 112: 108710.
- [17] GE S Y, ZHOU Y J, JIANG G P, et al. Prescribed-time leader-following consensus tracking control for second-order multi-agent systems [C]//2019 Chinese Automation Congress (CAC). New York: IEEE, 2019: 945—950.
- [18] ABED ASSALI E. Predefined-time synchronization of chaotic systems with different dimensions and applications [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 147: 110988.
- [19] ANGUIANO-GIJÓN C A, MUOZ-VÁZQUEZ A J, SÁNCHEZ-TORRES J D, et al. On predefined-time synchronisation of chaotic systems [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 122: 172—178.