

分段光滑机械振动系统亚谐振动的复杂分岔^{*}

张锦涛^{1†} 吕小红² 金花² 刘芳璇¹

(1. 西安铁路职业技术学院 牵引动力学院, 西安 710026)

(2. 兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

摘要 以一类单自由度分段光滑机械振动系统为研究对象, 数值计算两参数平面上亚谐振动的模式及分布区域, 利用延拓打靶法对亚谐包含域内亚谐振动的分岔特征、稳定性及转迁规律进行了详细研究。结果表明: 弹性碰撞振动系统中擦边分岔是连续可逆的。在亚谐包含域内, 倍化型擦边分岔普遍存在, 鞍结型擦边分岔和亚临界周期倍化分岔使系统响应发生跳跃和迟滞。高频亚谐包含域内多吸引子共存, 混沌吸引子发生边界激变而突然消失。

关键词 分段光滑, 周期解, 打靶法, Floquet 乘子, 分岔

中图分类号: O322; TH113.1

文献标志码:A

Complex Bifurcation of Sub-harmonic Vibrations for a Class of Piecewise Smooth Mechanical Vibration System^{*}

Zhang Jintao^{1†} Lv Xiaohong² Jin Hua² Liu Fangxuan¹

(1. School of Traction Power, Xi'an Railway Vocational & Technical Institute, Xi'an 710026, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract A class of single-degree-of-freedom piecewise smooth mechanical vibration systems was studied. The modes and distribution regions of sub-harmonic vibrations in the two-parameter plane are numerically calculated. The bifurcation characteristics, stability and transmigration laws of sub-harmonic vibrations in the sub-harmonic inclusion regions are investigated in detail by using the continuation shooting method. The results show that the grazing bifurcation is continuous in the elastic impact system. In the sub-harmonic inclusion regions, PD-type grazing bifurcation are prevalent, and SN-type grazing bifurcation and subcritical period-doubling bifurcation cause jumps and hysteresis phenomenon of system response. Multiple attractors coexist in the high-frequency sub-harmonic inclusion regions, and the chaotic attractor ends up at the boundary crisis.

Key words piecewise smooth, periodic motion, shooting method, Floquet multipliers, bifurcation

引言

机械系统工作时零部件之间由于间隙的存在

不可避免地会产生冲击, 这种冲击会缩短机器使用寿命, 降低机器性能。近年来, 机械振动系统中丰富的动力学行为, 引起了国内外学者的广泛关注。

2023-11-26 收到第 1 稿, 2024-01-22 收到修改稿。

* 西安铁路职业技术学院 2024 年度立项课题(XTZY24K01), 2024 Established Project of Xi'an Railway Vocational & Technical Institute (XTZY24K01).

† 通信作者 E-mail: Zjtao928@163.com

考虑弹性约束的碰撞系统是机械系统简化模型之一. Li^[1]建立了一种微振动成型机简化模型, 研究系统两参数平面上周期运动分布的分布特征. Luo^[2]研究了具有对称弹性约束的两自由度碰撞系统, 并设计了一种用于分析对称约束碰撞系统的电子电路. 李冠强等^[3]研究了双边碰撞 Duffing 振子的对称性和尖点分岔等. 李双宝等^[4]分析了非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展. 吕小红^[5]研究了碰撞—渐进振动系统的亚谐振动与分岔. 碰撞系统由于约束的存在, 很多学者应用数值和解析的方法对系统周期运动的稳定性与分岔进行了大量研究. 陆启韶等^[6]提出了非光滑动力系统局部映射的方法, 应用半解析法分析周期运动的稳定性和分岔. 徐慧东^[7]对分段光滑系统周期解的稳定性及擦边分岔进行了详细的研究和推导. 还有学者对分段光滑振动系统周期解提出了一种延拓算法, 并给出了相应的计算实例^[8,9].

碰撞系统从无冲击到冲击状态的过渡会引起擦边现象, 由擦边引起的动力学行为和分岔一直是这一领域的研究重点. Yue^[10] 和 Kundu^[11] 分别研究了四种可能的软碰撞系统的规范形映射在擦边轨道邻域内的特征. Humphries^[12]用不连续几何方法研究了碰撞振子的擦边分岔机理及擦边分岔附近的鞍结分岔. Jiang^[13]运用延拓追踪法研究了单自由度单侧弹性约束和刚性约束两种冲击振动模型的擦边分岔及其附近的光滑分岔.

碰振系统在部分参数域内存在大量亚谐振动, 表现出更为复杂的动力学特性, 已有的研究报道对其分岔行为进行了大量研究, 但是对分岔引起的失稳和转迁特征没有完全揭示. 本文以分段光滑机械振动系统为研究对象, 对系统两参数平面上亚谐振动的模式及分布区域进行计算. 应用延拓打靶法追踪系统稳定与不稳定亚谐振动的分岔与转迁, 详细分析了擦边邻域内的复杂分岔和高频亚谐包含域内的多吸引子共存及不连续分岔.

1 力学模型及运动微分方程

考虑图 1 所示的分段光滑机械振动系统的力学模型. 冲击振子的质量为 M , 被刚度为 K_1 的线性弹簧和阻尼系数为 C 的粘性阻尼器连接于固定支承, 并且质块 M 受到一简谐激励 $P \sin(\Omega T)$ 的作用. 用刚度为 K_2 的线性弹簧表示弹性约束, 质块

与右侧弹性约束的间隙为 B . X 表示质块 M 的位移. 引入无量纲参数: $x = K_1 X / P$, $b = K_1 B / P$, 令 $\mu_k = K_2 / (K_1 + K_2)$, $\xi = C / (2 \sqrt{K_1 M})$, $t = T \sqrt{K_1 / M}$, $\omega = \Omega \sqrt{M / K_1}$. 则系统的无量纲运动微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \sin(\omega t) & x \leq b \\ \ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \frac{u_k}{1-u_k}(x-b) = \sin(\omega t) & x > b \end{cases} \quad (1)$$

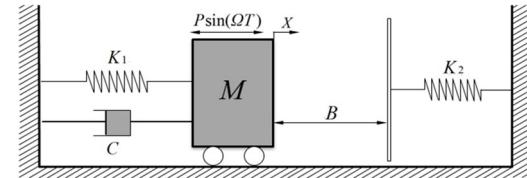


图 1 力学模型
Fig. 1 Mechanical model

当 $x \leq b$ 时, 设解流形 $\phi_1(t)$ 在 t_0 时刻初值为 $z_0 = (x_0, \dot{x}_0)^T$ 则

$$\phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi(t-t_0)} \{ a_1 \cos[\gamma_1(t-t_0)] + b_1 \sin[\gamma_1(t-t_0)] \} + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) \\ e^{-\xi(t-t_0)} \{ (\gamma_1 b_1 - \xi a_1) \cos[\gamma_1(t-t_0)] - (\gamma_1 a_1 + \xi b_1) \sin[\gamma_1(t-t_0)] \} + A_1 \omega \cos(\omega t) - B_1 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

当 $x > b$ 时, 设解流形 $\phi_2(t)$ 在 t_1 时刻初值为 $z_1 = (x_1, \dot{x}_1)^T$ 点出发, 则

$$\phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi(t-t_1)} \{ a_2 \cos[\gamma_2(t-t_1)] + b_2 \sin[\gamma_2(t-t_1)] \} + A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + kb \\ e^{-\xi(t-t_1)} \{ (\gamma_2 b_2 - \xi a_2) \cos[\gamma_2(t-t_1)] - (\gamma_2 a_2 + \xi b_2) \sin[\gamma_2(t-t_1)] \} + A_2 \omega \cos(\omega t) - B_2 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(2)和式(3)中, $\gamma_1 = \sqrt{1-\xi^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{1/(1-\mu_k)-\xi^2}$, A_1, B_1 及 A_2, B_2 为振幅常数, a_1, b_1 及 a_2, b_2 是与初始条件相关的积分常数.

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 - A_1 \cos(\omega t_0) - B_1 \sin(\omega t_0) \\ b_1 &= [\dot{x}_0 + \xi a_1 + A_1 \omega \sin(\omega t_0) - \\ &\quad B_1 \omega \cos(\omega t_0)] / \gamma_1 \\ a_2 &= x_1 - A_2 \cos(\omega t_1) - B_2 \sin(\omega t_1) - \mu_k \\ b_2 &= [\dot{x}_1 + \xi a_2 + A_2 \omega \sin(\omega t_1) - \\ &\quad B_2 \omega \cos(\omega t_1)] / \gamma_2 \end{aligned} \quad (4)$$

2 系统的 Poincaré 映射

令 $z = (x, \dot{x})^T \in R^2$, 定义边界函数:

$$h(z) = x - b \quad (5)$$

由于弹性约束的存在,质块 M 存在两种工作状态,即与弹性约束接触或分离.因此可将相空间划分为 $G_1 = \{(z, t) : h(z) < 0\}$ 和 $G_2 = \{(z, t) : h(z) > 0\}$ 两部分.这两种工作状态在非光滑界面 Σ_1 和 Σ_2 处进行切换.可定义为:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(z, t) : h(z) = 0, \dot{x} > 0\} \\ \Sigma_2 &= \{(z, t) : h(z) = 0, \dot{x} < 0\} \end{aligned} \quad (6)$$

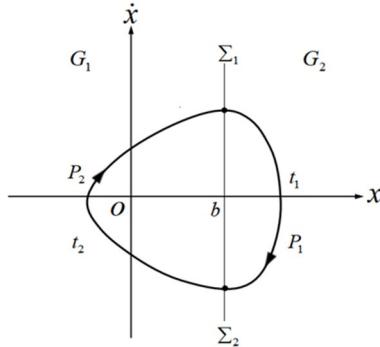


图 2 1/1 运动轨线

Fig. 2 Trajectory of 1/1 periodic motion

定义两个局部映射 $P_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 和 $P_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$. 在非光滑界面上质块 M 运动状态切换,但区域 G_1 和 G_2 的向量场完全相等,因此其跳跃矩阵为单位阵^[7]. 用 p/n 区分周期运动类型,其中 n 表示力周期数, p 表示质块 M 与右侧约束接触次数. 设零时刻 1/1 运动的解流形从 Σ_1 出发,分别经过时间 t_1 和 t_2 穿越 G_2 和 G_1 区域返回 Σ_1 ,则其 Poincaré 映射可复合为 $P = P_2 \cdot P_1$. 复合映射 P 对应的 Jacobi 矩阵 $DP = DP_2 \times DP_1$,而

$$DP_1 = \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial z_0} \Big|_{t=t_1}, \quad DP_2 = \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial z_1} \Big|_{t=t_1+t_2} \quad (7)$$

在利用打靶法^[3,8]求得系统周期解的同时,可求得系统雅可比矩阵的特征值,应用 Floquet 理论可以判断周期运动的稳定性,结合延续算法可以研究系统分岔演化过程.

3 擦边邻域内的复杂分岔

为了研究系统亚谐振动的分岔特征,本文应用基于 Poincaré 映射的延拓打靶法^[8,9]及 Floquet 理论求解系统的共存周期解与稳定性.通过仿真计算双参数 (ω, b) 平面系统的分岔图以确定亚谐振动的分布区域,进而分析系统亚谐振动的分岔与转

迁.选取基本参数 $\mu_k = 0.9, \xi = 0.06$ 数值计算系统的双参数分岔图,如图 3 所示.图中用不同颜色表示不同类型的 p/n 周期振动,未标注的黑色区域表示长周期或混沌运动.图中,在 $p/1$ 和 $(p+1)/1$ 运动的参数域分界处存在很多 $(2p+1)/2$ 和 $2p/2$ 类亚谐周期运动的小区域,为方便描述,称之为亚谐包含域.下面以图 3 所示的亚谐包含域为研究对象,进行单参数延拓分岔分析.

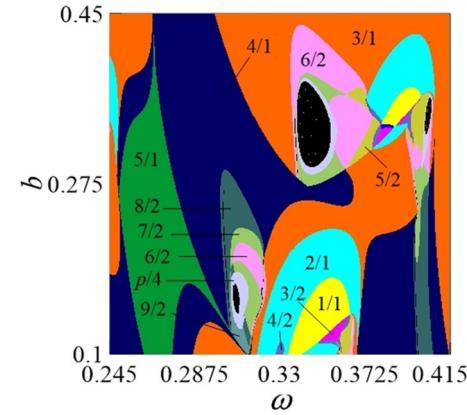


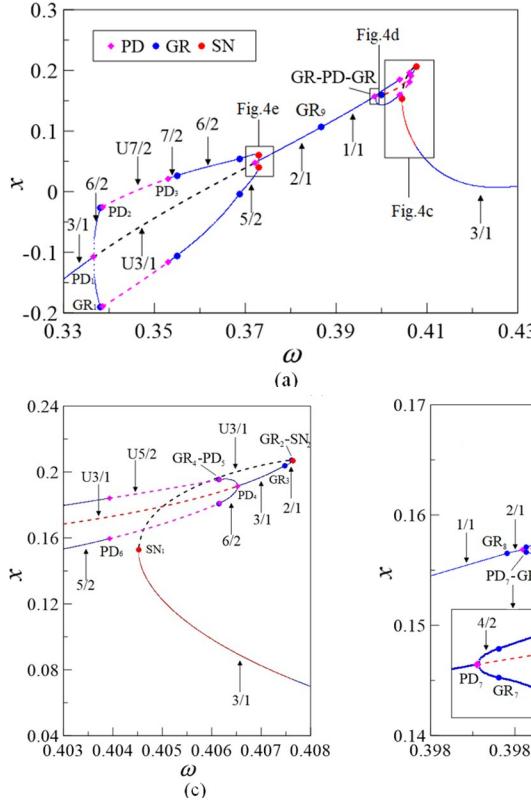
图 3 双参数分岔图

Fig. 3 Two-parameter bifurcation diagram

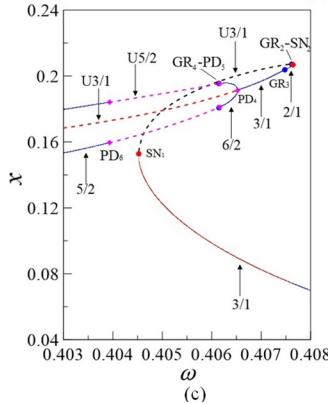
取间隙 $b = 0.36$, 延拓计算之前,首先在系统状态空间选择一个考察区域 $\Omega = (x, \dot{x}) = (-2 \leq x \leq 1, -0.8 \leq \dot{x} \leq 0.8)$,然后将状态平面 Ω 划分为 $100 \times 100 = 10000$ 个小网格.以每个小网格的中心点为初始值应用打靶法计算系统的周期解,则共有 10000 个初始值需要考察.当 $\omega = 0.345$ 时,求得系统有 2 个不稳定的周期解,分别以每个周期解为初值进行延拓计算,结果如图 4(a)所示.图中用品红色“◇”表示倍化分岔点 (PD). 蓝色“·”表示擦边分岔点 (GR), 红色“·”表示鞍结分岔点 (SN), 实线表示稳定周期解,虚线表示不稳定的周期解,用 Up/n 标注不稳定的 p/n 运动.图 4(b) 为数值计算的单参数分岔图,图 4(c)~(e) 为图 4(a) 的局部放大.由图可知,该亚谐包含域内存在两种不稳定的基本周期振动,分别是 U3/1 运动和 U2/1 运动,两者通过擦边分岔相互转迁,通过倍化分岔改变稳定性.在擦边分岔邻域内主要存在倍化分岔和鞍结分岔的不同组合,部分参数下还存在混沌运动.

由图 4(a)可见,该亚谐包含域的左边界为 3/1 运动的周期倍化分岔曲线.随 ω 增大,3/1 运动通过倍化型擦边分岔 (PD_1 -GR₁) 转迁为 7/2 运动,两分岔点间的间隔 $\Delta\omega = 0.00152549$,即当 ω 增

加至 $\omega=0.336\ 598\ 87$ (PD₁)时,3/1运动通过倍化分岔转迁为6/2运动,同时产生不稳定的U3/1运动,对应的Floquet乘子为(-1.000 01,-0.106 50).紧接着,6/2运动在 $\omega=0.338\ 124\ 36$ (GR₁)时发生擦边分岔转迁为稳定的7/2运动.结合图4(a)、图4(b)可知,稳定的7/2运动经倍周期序列进入混沌,又经倍周期序列退出混沌转迁为7/2运动.在

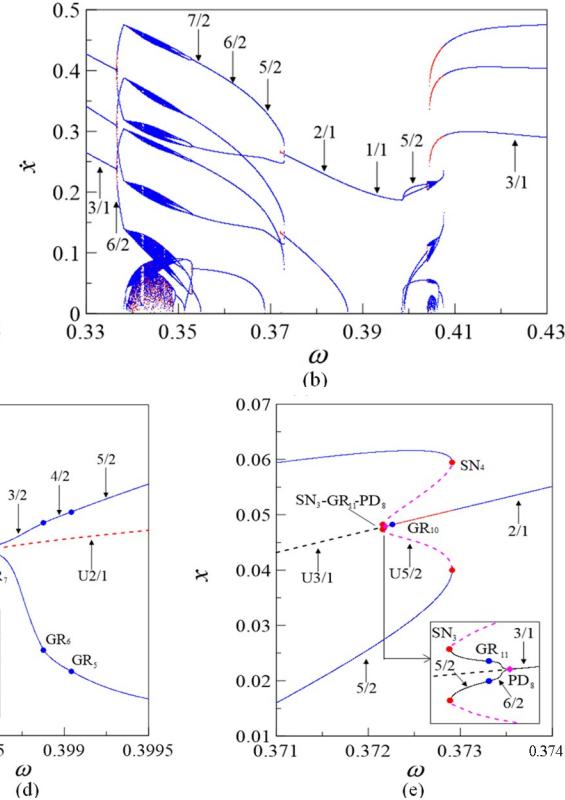


(a)

图4 $b=0.36$ 时系统随激励频率 ω 变化的分岔图及其局部放大Fig. 4 Bifurcation diagram and local amplification of the system with excitation frequency ω when $b=0.36$

将图4(a)中 $\omega \in [0.403, 0.408]$ 局部放大,如图4(c)所示.该亚谐包含域的右边界形成迟滞域,多种周期运动共存.当 ω 减小至 $\omega=0.404\ 519\ 93$ (SN₁)时,对应的Floquet乘子为(0.155 01, 0.999 99),3/1运动发生鞍结分岔跳跃到混沌运动.在 $\omega=0.406\ 524\ 21$ (PD₄)时,减小 ω ,3/1运动经周期倍化分岔转迁为6/2运动.进一步减小 ω ,6/2运动经倍化型擦边分岔(PD₅-GR₄)转迁为U5/2运动.PD₅和GR₄间隔 $\Delta\omega=0.000\ 016\ 3$,不同于倍化型擦边分岔PD₁-GR₁,这里的GR₄为不稳定周期运动的擦边分岔.当 $\omega=0.406\ 158\ 25$ (PD₅)时,6/2运动经倍化分岔失稳,不稳定的U6/2在 $\omega=0.406\ 141\ 95$ (GR₄)通过擦边分岔转迁为U5/2运动,随后U5/2运动在PD₆恢复稳定性.在PD₅和PD₆之间,不稳定的U3/1运动稳定性保持不变,分别与不稳定的U5/2

此分岔过程中,7/2运动的两个倍化分岔点PD₂和PD₃之间,不稳定的U7/2运动和U3/1运动及倍周期序列运动或混沌运动共存.在 $\omega=0.345$ 时,系统中混沌运动与不稳定的U3/1运动及不稳定的U7/2运动共存,系统的相图和Poincaré映射图如图5(a)~(c)所示.进一步增大 ω ,7/2运动经连续的擦边分岔转迁为5/2运动.

图4 $b=0.36$ 时系统随激励频率 ω 变化的分岔图及其局部放大

运动,U6/2运动及稳定的倍周期序列和混沌运动共存.当 $\omega=0.406\ 524\ 21$ (PD₄)时,增大 ω ,不稳定的U3/1运动经倍化分岔恢复稳定.随后3/1运动经鞍结型擦边分岔(SN₂-GR₃)而消失,SN₂和GR₃两分岔点间隔 $\Delta\omega=0.000\ 163\ 94$,即在 $\omega=0.407\ 474\ 89$ (GR₃)时3/1运动经擦边分岔转迁为2/1运动,而2/1运动在 $\omega=0.407\ 638\ 83$ (SN₂)时经鞍结分岔而失稳,产生向 ω 减小方向弯曲的U2/1运动.减小 ω ,失稳后的U2/1运动在 $\omega=0.407\ 620\ 11$ (GR₂)通过擦边分岔转迁为U3/1运动,SN₂和GR₂两分岔点间隔 $\Delta\omega=0.000\ 018\ 72$.可见,在鞍结分岔点SN₂附近同时存在一个稳定周期运动的擦边分岔点GR₃和一个不稳定周期运动的擦边分岔点GR₂.进一步减小 ω ,不稳定的U3/1运动在SN₁处恢复稳定.在SN₁和SN₂之间形成的迟滞域内,多种类型的周期

运动共存。在 $\omega = 0.405$ 时, 系统中有五种类型的运动共存, 包括一个稳定的周期运动 $3/1$, 三个不稳定的周期运动(两个 $U3/1$ 运动和 $U5/2$ 运动)和混沌运动, 其共存的相图和 Poincaré 映射如图 5(d)~(h) 所示。图 6(a)~(c) 为 $b = 0.36$ 时系统共存周期解随

激励频率 ω 变化的吸引域, 倍周期序列的吸引域用黄色表示, 绿色区域为红色 $3/1$ 运动的吸引域。由图可见, 随着 ω 减小, 蓝色 $3/1$ 运动发生周期倍化分岔之后, 吸引域的拓扑结构未发生变化, 只是面积有所增大。

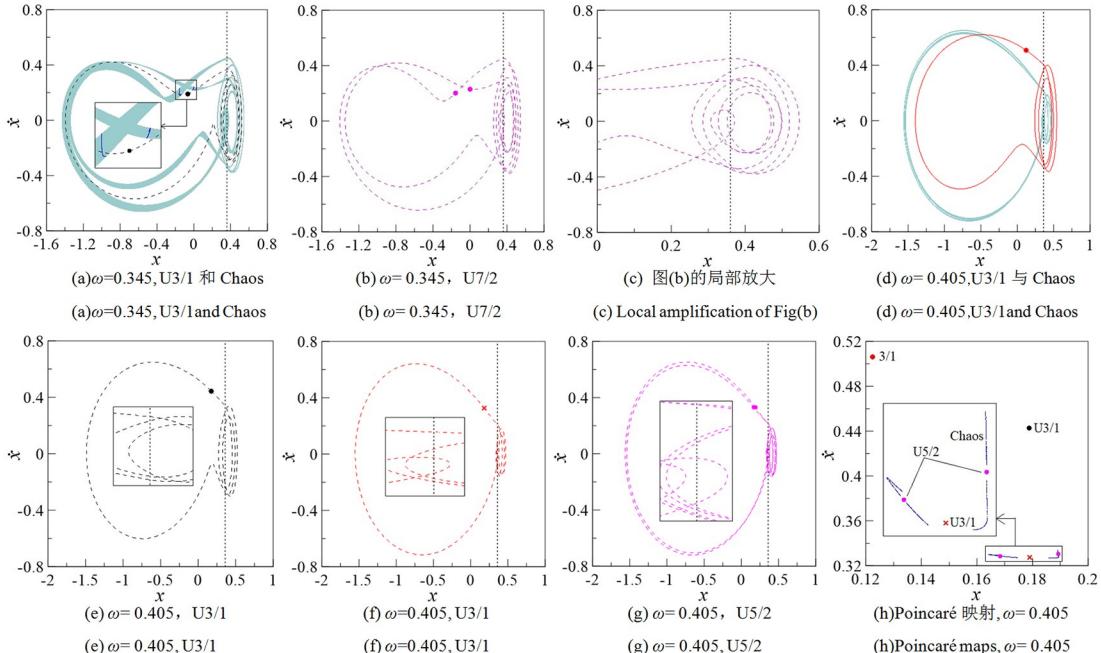


图 5 相图和 Poincaré 映射
Fig. 5 Trajectories and Poincaré maps

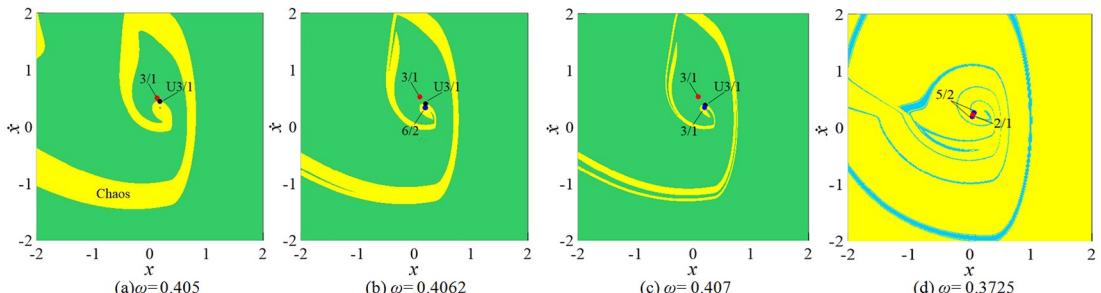


图 6 $b = 0.36$ 时随激励频率 ω 变化的吸引域
Fig. 6 Basins of attraction with excitation frequency ω when $b = 0.36$

局部放大图 4(a) 中 $\omega \in [0.398, 0.3995]$, 如图 4(d) 所示。由图可见, 随着 ω 增大, 在 $\omega = 0.398\ 454\ 92(\text{GR}_8)$ 时 $1/1$ 运动发生擦边分岔转迁为 $2/1$ 运动。随后, $2/1$ 运动通过倍化型擦边分岔(PD_7 - GR_7)转迁为 $3/2$ 运动。在 $\omega = 0.398\ 545\ 60$ (PD_7) 时 $2/1$ 发生倍化分岔转迁为 $4/2$ 运动, 同时产生不稳定的 $U2/1$ 运动, 分岔点对应的 Floquet 乘子 $(-0.999\ 99, -0.150\ 91)$ 。在倍化分岔点附近, $\omega = 0.398\ 566\ 01(\text{GR}_7)$ 时, $4/2$ 运动发生擦边分岔转迁为 $3/2$ 运动。进一步增大 ω , $3/2$ 运动在 $\omega = 0.398\ 877\ 52(\text{GR}_6)$ 又通过擦边分岔转迁回 $4/2$

运动, 紧接着又在 $\omega = 0.399\ 041\ 61(\text{GR}_5)$ 由 $4/2$ 运动擦边转迁为 $5/2$ 运动。结合图 4(a) 可知, 在此分岔过程中不稳定的 $U2/1$ 运动稳定性不变, 从 PD_7 之后分别与其他稳定周期运动共存。直至 $\omega = 0.400\ 038\ 06$ 时, 不稳定的 $U2/1$ 运动经擦边分岔转迁为不稳定的 $U3/1$ 运动。

当 $\omega < 0.398\ 454\ 92(\text{GR}_8)$ 时, 如图 4(a) 所示, 随着 ω 的减小, $1/1$ 运动在 $\omega = 0.386\ 775\ 08$ (GR_9) 发生擦边分岔转迁为 $2/1$ 运动。进一步减小 ω , 如图 4(e) 所示, $2/1$ 运动在 $\omega = 0.372\ 263\ 82$ (GR_{10}) 经过擦边分岔转迁为 $3/1$ 运动。减小 ω 至 ω

$=0.372\ 183\ 10$ (PD_8)时,对应的 Floquet 乘子为 $(-0.131\ 88, -0.999\ 99)$, $3/1$ 运动经倍化分岔转迁为 $6/2$ 运动,同时产生不稳定的 $U3/1$ 运动。当 $\omega = 0.372\ 173\ 58$ (GR_{11})时, $6/2$ 运动经擦边分岔转迁为 $5/2$ 运动。继续减小 ω ,当 $\omega=0.372\ 153\ 86$ (SN_3)时,对应的 Floquet 乘子为 $(0.017\ 39, 0.999\ 97)$, $5/2$ 运动经鞍结分岔失稳,且产生了沿 ω 增大方向弯曲的 $U5/2$ 运动,直至 $\omega=0.372\ 911\ 30$ (SN_4)时, $U5/2$ 恢复稳定。在倍化分岔点 PD_8 产生了不稳定的 $U3/1$ 运动,且倍化分岔产生的稳定周期运动存在极短的区间(SN_3 和 PD_8 间隔 $\Delta\omega=0.000\ 029\ 24$)后跳跃到共存的 $5/2$ 运动,因此,该倍化分岔是亚临界周期倍化分岔(SN_3 - GR_{11} - PD_8)。其本质是在倍化分岔点的极小邻域内发生鞍结分岔(SN_3),使系统响应发生跳跃和迟滞。由于亚临界周期倍化分岔的存在,不稳定的 $U5/2$ 连接上下两个共存的周期解分支,形成一个迟滞域。在迟滞域内稳定的 $5/2$ 运动及不稳定的 $U5/2$ 运动保持稳定性不变,分别和下解支的 $2/1$ 运动、 $3/1$ 运动、 $6/2$ 运动及 $5/2$ 运动共存。在 $\omega=0.3725$ 时 $2/1$ 运动和 $5/2$ 运动的吸引域如图 6(d)所示, $2/1$ 运动的吸引域由中心向外辐射,呈丝带状分布,对初值稍加扰动,系统可能跃迁到 $5/2$ 运动,而 $5/2$ 运动的吸引域面积大,分布集中,显然此时系统中 $5/2$ 运动的稳定性强于 $2/1$ 运动。

综上所述,在擦边分岔的邻域内发现主要存在倍化分岔和鞍结分岔,形成了倍化型擦边分岔(PD - GR)和鞍结型擦边分岔(SN - GR),还存在一种复杂的亚临界周期倍化分岔(SN - GR - PD),其实质为在周期倍化分岔的极小邻域内出现鞍结分岔或鞍结型擦边分岔。擦边分岔既可以是稳定周期运动的擦边也可以是不稳定周期运动的擦边。

4 高频亚谐包含域内的不连续分岔

高频小间隙参数域内, $0/1$ 运动和 $1/1$ 运动之间的亚谐包含域内存在大量共存吸引子,使得亚谐振动的转迁变得更为复杂。直接数值积分和延拓打靶法结合,对共存亚谐振动的转迁进行详细分析。

固定间隙 $b=0.3$,通过增加和减小参数直接数值积分计算系统分岔图,运用延拓打靶法,对亚谐包含域内共存的周期一运动、周期二运动和周期三运动进行延拓追踪,结果如图 7(a)所示,图 7(b)和图 7(c)为图 7(a)的局部放大。图中 BC 表示

混沌的边界激变,其余分岔点和符号标注与图 4(a)一致。

通过胞映射法和延拓打靶法在 SN_1 和 SN_2 之间,发现稳定和不稳定的周期三运动与 $1/1$ 运动共存,如图 7(a)、图 7(b)所示。增加 ω ,绿色的 $3/3$ 运动在 $\omega=1.951\ 157\ 72$ (GR_1)处经擦边分岔转迁为 $2/3$ 运动,共存周期运动的相图和 Poincaré 映射如图 7(d)、图 7(e)所示。而 $2/3$ 运动在 $\omega=1.968\ 446\ 91$ [SN_2 , Floquet 乘子为 $(0.316\ 91, 0.999\ 98)$]和不稳定的 $U2/3$ 运动重合后经鞍结分岔消失。当 ω 减小时, $3/3$ 运动在 $\omega=1.896\ 332\ 98$ [SN_1 , Floquet 乘子为 $(0.303\ 42, 0.999\ 97)$]处和不稳定的 $U3/3$ 运动相重合,经鞍结分岔消失。由图 7(b)中局部放大可知,在 $\omega=1.911\ 794\ 90$ (SN_3)和 $\omega=1.912\ 185\ 41$ (SN_4)之间,一个非常狭小的参数区间($\Delta\omega=0.000\ 390\ 51$)内存在稳定的周期三运动,其分岔过程和绿色的 $3/3$ 运动相似。当 ω 增加时, $2/3$ 运动发生了鞍结型擦边分岔(GR_2 - SN_4)转迁为不稳定的 $U3/3$ 运动。当 ω 减小时, $2/3$ 运动在 SN_3 经鞍结分岔转迁为不稳定的 $U2/3$ 运动。不稳定的 $U3/3$ 连接 SN_1 和 SN_4 ,不稳定的 $U2/3$ 连接 SN_2 和 SN_3 ,因此在 SN_1 和 SN_2 之间形成多种类型周期运动共存。系统共存吸引子的吸引域如图 8(a)~(c)所示,其中吸引子的颜色与图 7(a)一致。品红色区域为黑色 $2/3$ 运动的吸引域,蓝色区域为绿色 $3/3$ 运动的吸引域,黄色区域为 $1/1$ 运动的吸引域。由图可见, $1/1$ 运动和 $3/3$ 运动的吸引域相互嵌套,而存在区间很小的黑色 $2/3$ 运动的吸引域缠绕在 $3/3$ 运动吸引域的边界处。随 ω 增加, $3/3$ 运动经擦边分岔(GR_1)转迁为 $2/3$ 运动,分岔前后的吸引域如图 8(b)、图 8(c)所示。由图可见, $1/1$ 运动吸引域的分布变得相对集中,而 $2/3$ 擦边前后吸引域的拓扑结构未发生突变,其吸引子与位于吸引域边界上的 $U2/3$ 吸引子逐渐靠近。

结合图 7(a)和图 7(c)可见, $0/1$ 运动在 $\omega=2.079\ 418\ 23$ (GR_4)通过擦边分岔转迁为 $1/1$ 运动。进一步减小 ω , $1/1$ 运动发生了亚临界周期倍化分岔(SN_5 - GR_3 - PD_2)跳跃到 $2/2$ 运动。其本质为 $1/1$ 运动在 $\omega=2.078\ 591\ 09$ (PD_2)通过倍化分岔[Floquet 乘子为 $(-0.695\ 82, -0.999\ 99)$]产生 $2/2$ 运动和不稳定的 $U1/1$ 运动。 $U1/1$ 运动在 $\omega=2.024\ 864\ 82$ (PD_1)经倍化分岔恢复稳定。而 $2/2$

运动在 $\omega = 2.07848215$ (GR₃)经擦边分岔转迁为1/2运动。随后1/2运动又在 $\omega = 2.07827320$ (SN₅)经鞍结分岔[Floquet乘子为(0.48453, 0.99998)]失稳,产生向 ω 增大方向弯曲的U1/2运动,直至 $\omega = 2.84588840$ [SN₆, Floquet乘子为(0.58914, 0.99998)]再次恢复稳定。此时减小 ω ,1/2运动在 $\omega = 2.35664279$ (PD₃), Floquet乘子为(-0.99999, -0.52742)经倍化分岔转迁为

2/4运动。在 $\omega = 2.29085964$ (GR₅),2/4运动擦边转迁为3/4运动,其相图和Poincaré映射如图7(f)所示。进一步减小 ω ,周期运动经倍周期分岔序列进入混沌,在此分岔过程中,0/1运动的稳定性保持不变与分岔序列共存, $\omega = 2.2$ 时系统共存的相图和Poincaré映射如图7(g)所示。继续减小 ω ,混沌运动在一段参数区间内突然消失,又突然出现,最后经倍周期分岔退出混沌最终转迁为1/1运动。

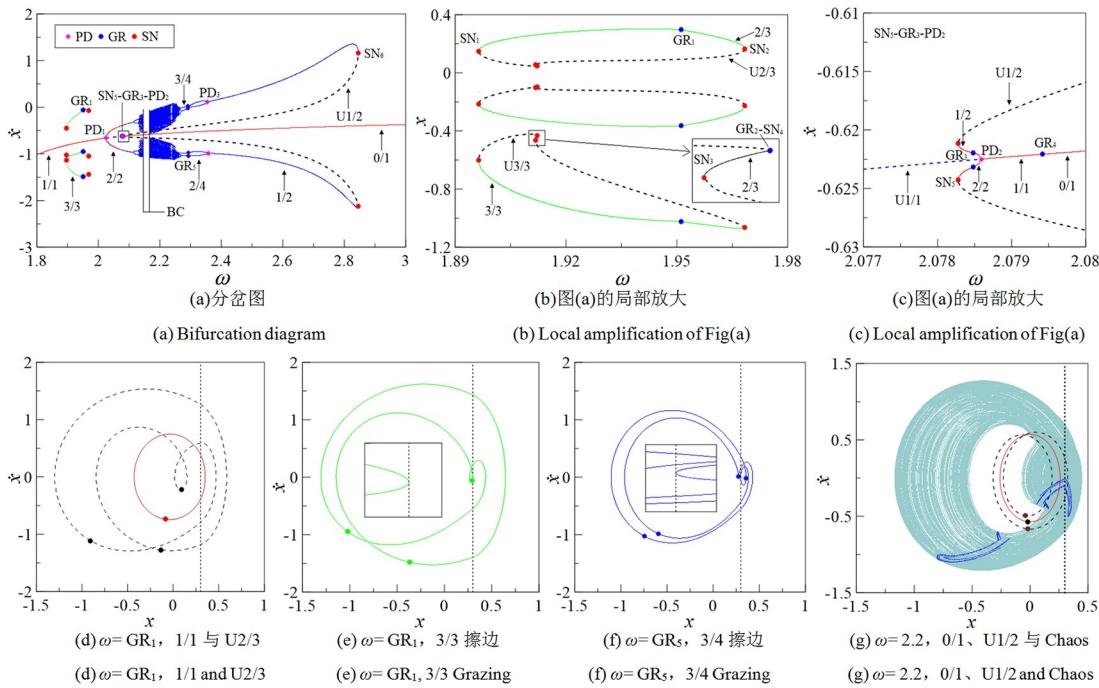


图7 $b=0.3$ 时系统的响应,(a)~(c)分岔图及其局部放大,(d)~(g)相图和Poincaré映射

Fig. 7 Response of the system when $b=0.3$, (a)~(c)bifurcation diagram and local amplification, (d)~(g) trajectories and Poincaré maps

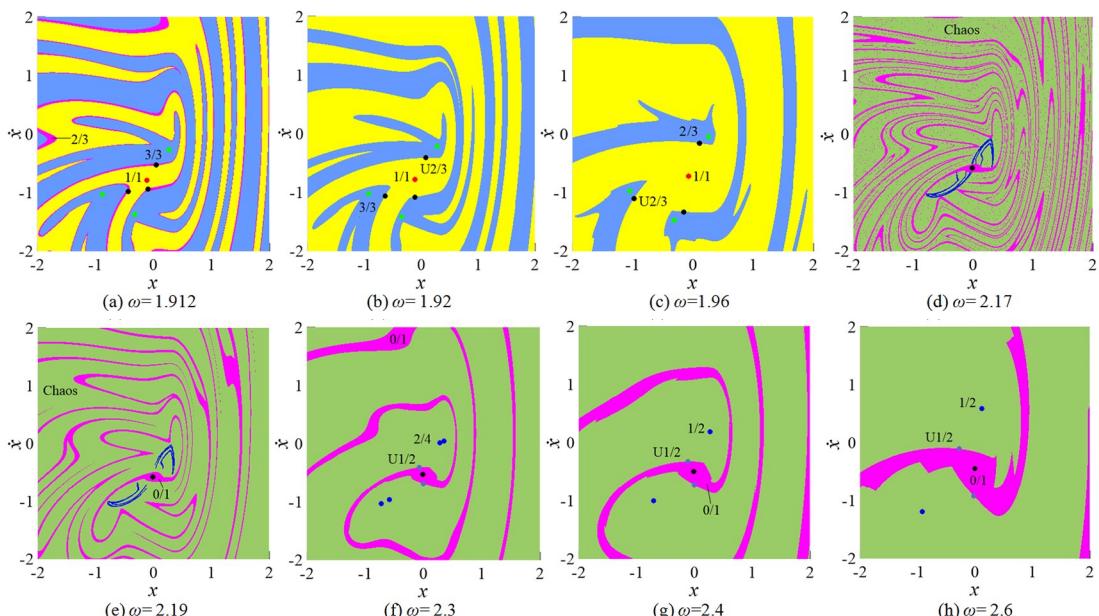


图8 随激励频率 ω 变化的吸引域
Fig. 8 Basins of attraction with excitation frequency ω

在 SN_5 和 SN_6 之间多种类型的吸引子共存, 计算 0/1 运动和倍周期分岔序列的吸引域, 如图 8(d)~(h) 所示, 图中稳定吸引子的颜色与图 7(a) 一致, 不稳定 $U_{1/2}$ 吸引子用浅蓝色圆点标记。浅绿色区域为倍周期序列吸引子的吸引域, 品红色区域为 0/1 运动的吸引域。由图可见, 随着 ω 减小, 0/1 运动的吸引域分布逐渐分散, 由中心向外辐射呈丝带状分布。当 1/2 运动经倍化分岔转迁为 2/4 运动后, 吸引域形态未发生明显变化。结合图 8(d) 和图 8(e) 可知, 继续减小 ω , 混沌吸引子与吸引域分形边界碰撞, 混沌运动发生边界激变之后突然消失, 因此在图 7(a) 中可观察到混沌运动在特定区间消失。

5 结论

本文考虑了一种单自由度分段光滑机械振动系统, 应用延拓打靶法追踪系统共存周期解, 对系统亚谐振动的复杂分岔及转迁进一步研究, 得到了以下重要结论:

弹性碰撞振动系统中擦边分岔是连续可逆的, 但在擦边分岔的邻域内出现倍化分岔和鞍结分岔的不同组合会导致系统响应发生巨大差异。

亚谐包含域内倍化型擦边分岔普遍存在, 且倍化分岔和擦边分岔不会改变吸引域的拓扑结构。鞍结型擦边分岔使系统响应产生迟滞和跳跃。当不稳定周期运动分支连接两个不同模式的稳定周期运动分支时, 必然存在不稳定周期运动的擦边分岔。混沌吸引子与吸引域分形边界碰撞产生边界激变, 导致混沌运动突然消失。

当倍化分岔邻域内出现鞍结型擦边分岔或鞍结分岔时, 该倍化分岔是亚临界周期倍化分岔, 使得系统倍化响应发生跳跃。

参考文献

- [1] LI G F, WU S P, WANG H B, et al. Global behavior of a simplified model for the micro-vibration molding machine in parameter-state space [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 154: 104039.
- [2] LUO T Q, WANG Z. Periodically forced system with symmetric motion limiting constraints: dynamic characteristics and equivalent electronic circuit realization [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016, 81: 283–302.
- [3] 李冠强, 谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 1–7.
- [4] LI G Q, XIE J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of the double-impact duffing oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 1–7. (in Chinese)
- [5] 李双宝, 马茜茜, 张伟. 非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 9–20.
- [6] LIS B, MA X X, ZHANG W. Research progress in melnikov method for global dynamics of non-smooth systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(2): 9–20. (in Chinese)
- [7] 吕小红. 碰撞—渐进振动系统的亚谐振动与分岔分析[J]. 中国机械工程, 2018, 29(4): 417–422+428.
- [8] LYU X H. Subharmonic vibrations and bifurcations of vibro-impact systems with progression [J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(4): 417–422+428. (in Chinese)
- [9] 陆启韶, 金俐. 具有刚性约束的非线性动力系统的局部映射方法[J]. 固体力学学报, 2005, 26(2): 132–138.
- [10] LU Q S, JIN L. The local map method for non-smooth dynamical systems with rigid constraints [J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, 26(2): 132–138. (in Chinese)
- [11] 徐慧东. 非光滑动力系统周期解的分岔研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2008.
- [12] XU H D. Bifurcation of periodic solutions of non-smooth dynamical systems [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2008. (in Chinese)
- [13] 张锦涛. 分段光滑机械振动系统共存周期解的稳定性与分岔[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2022.
- [14] ZHANG J T. Stability and bifurcation of coexisting periodic solutions for A class of piecewise smooth mechanical vibration system [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiatong University, 2022. (in Chinese)
- [15] 张华彪, 张利娟, 李欣业, 等. 求解非线性振动周期解的参数延续打靶法[J]. 应用力学学报, 2020, 37(4): 1818–1822+1878.
- [16] ZHANG H B, ZHANG L J, LI X Y, et al. Parameter continuation-shooting method for the calculation of periodic solutions of nonlinear vibration [J]. Chi-

- nese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(4): 1818—1822+1878. (in Chinese)
- [10] MA Y, ING J, BANERJEE S, et al. The nature of the normal form map for soft impacting systems [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, 43(6): 504—513.
- [11] KUNDU S, BANERJEE S, ING J, et al. Singularities in soft-impacting systems [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2012, 241(5): 553—565.
- [12] HUMPHRIES N, PIIROINEN P T. A discontinuity-geometry view of the relationship between saddle-node and grazing bifurcations [J]. Physica D: Non-linear Phenomena, 2012, 241(22): 1911—1918.
- [13] JIANG H B, CHONG A S E, UEDA Y, et al. Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 127: 204—214.

点阵夹芯梁在气动力下的振动控制与能量采集

王祥宇 殷健[†]

(沈阳航空航天大学 航空宇航学院, 沈阳 110136)

摘要 本文提出了一种带有振动控制与能量采集的多功能点阵夹芯梁(Multifunctional-Lattice Sandwich Beam, M-LSB)结构。首先, 在点阵夹芯梁内部安装了镍钛合金型非线性能量阱(Nitinol-Nonlinear Energy Sink, N-NES), 以实现振动抑制。其次, 在梁上铺设超磁致伸缩薄片(Giant Magnetostrictive Lamina, GML), 通过GML的维拉里效应实现能量采集。根据哈密顿原理和牛顿第二定律, 建立了气动环境下耦合系统的运动方程。使用龙格—库塔法计算动力学方程得到了有无N-NES时多功能点阵夹芯梁的时域响应, 验证了N-NES的振动控制效果和GML的能量采集效率。结果表明, N-NES可以实现高效的振动抑制, GML可以有效地收集气动环境下点阵夹芯梁的振动能量。

关键词 点阵夹芯梁, 镍钛合金型非线性能量阱, 超磁致伸缩薄片, 能量采集

中图分类号:O322

文献标志码:A

Vibration Control and Energy Harvesting of Lattice Sandwich Beam under Aerodynamic Forces

Wang Xiangyu Zang Jian[†]

(College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract This paper proposed a multifunctional lattice sandwich beam (M-LSB) structure. Firstly, a Nitinol-Steel wire rope nonlinear energy sink (N-NES) is installed inside the lattice sandwich beam to achieve vibration suppression. Secondly, a giant magnetostrictive lamina (GML) that is laid on the beam to achieve energy harvesting through the Villari effect of GML. Based on the the Hamilton's principle and Newton's second law, the equations of motion of the coupled system under aerodynamic environment are established. The time-domain response of the multifunctional lattice sandwich beam with and without N-NES is obtained by using the Runge-Kutta method to calculate the dynamic equations, and the vibration control effect of N-NES and the energy harvesting efficiency of GML are verified. The results show that the N-NES can achieve efficient vibration suppression and the GML can efficiently harvest the vibration energy of the lattice sandwich beam under aerodynamic environment.

Key words lattice sandwich structure, Nitinol-Steel wire rope nonlinear energy sink, giant magnetostrictive lamina, energy harvesting

引言

随着科学技术的飞速发展,航空、航天、航海等领域对高性能复合材料的需求日益增长。相较于传统材料,复合材料展现出众多显著优势,如低比重、高比模量、高比刚度及高比强度等^[1]。2014年,Guo等^[2]采用无压烧结工艺制备了碳化硅蜂窝陶瓷,研究了其性能,证明了该复合材料具有高孔隙率、高强度和较好的抗热震性。为了进一步提升飞行器的载重效率,众多国内外学者将研究重点聚焦于夹芯结构上^[3-5]。这类结构是一种特殊的多层设计,由上下两个面板和中间的芯层构成。其中,面板具有较强的机械性能,而芯层的机械性能则相对较弱。这种结构设计的一大优势是,其独特的分离式面板极大地增加了结构的惯性矩,从而提升了抗弯曲刚度^[6]。值得一提的是,自然界中广泛存在类似的夹芯结构。研究人员在剖析犀鸟喙部和鸟类翼骨时发现,两块骨板之间分布着大量相互连结的骨柱,形成了一种天然的夹芯结构。这一重要发现为夹芯结构的设计提供了宝贵的启示和指导。

Douglas等^[7]提出了一种挤压和电火花加工方法制造锥形点阵夹芯结构,以消除节点故障的发生率,结果发现面板的机械性能受夹层板的几何形状、合金的力学性能和安装模式决定。点阵夹芯结构作为一种多功能新型轻型结构,其适应性主要体现在轻质和高强度的特性,适用于需要减轻结构重量同时保持或提高结构效率的应用场景。例如,可以在航空航天领域中用于减少飞行器的整体质量,从而提高燃油效率和载荷能力,也可用于减振降噪、能量吸收、热控制等多种工况^[8]。其次,点阵夹芯梁的限制主要包括制造复杂性和成本。由于点阵结构的元件组装和连接相对困难,这增加了制造过程的复杂性。此外,虽然点阵夹芯梁的设计提供了很大的灵活性,但这也意味着需要精确的设计和制造过程来满足特定的应用需求,这可能会导致成本增加。在航空领域,由于飞机在飞行过程中发动机的振动会将能量传递到机身和其他部件,且长期的高频振动可能导致结构的疲劳损伤。因此,如何在增强飞机结构强度的同时,实现对机体结构振动的有效控制并将振动能量回收利用,已成为一个关键的研究技术难题。

在现有的振动控制方法中,主动控制方法依赖

于结构本身的振动反馈信号,通过一定的策略可以实时改变结构的参数来抑制振动^[9],而被动控制可以解决高频振动问题。对于振动控制装置,特别是非线性振动控制结构,最典型的是非线性能量阱(NES)^[10-13],其通过非线性弹簧、线性阻尼以及轻质负载以实现靶能量传递,并且 NES 有一定的宽频振动控制能力。NES 的振动控制概念不仅适用于强迫激励系统,也适用于自激励系统^[14]。对于梁结构的振动控制,众多研究已经证实,NES 能以较小的附着质量实现一定的振动控制^[15,16]。该装置可以使主系统中的能量传递到其结构中,且单向不可逆,而多余的能量可以由阻尼耗散。童俊辉等^[17]进行了关于基于 NES 的深海柔性张力腿振动抑制问题的研究,并将其性能与调谐质量阻尼器进行了比较分析。研究结果显示,在相似的情况下,NES 表现出更为显著的振动减缓效果。此外,通过调整 NES 吸振器的参数可以实现最佳的振动控制效果。王国旭等^[18]对简谐激励下双弹簧 NES 的优化进行了探讨,运用差分进化算法和参数分析方法来优化 NES 的参数,并将其与线性吸振器(LVA)的优化结果进行对比。研究结果显示,与 LVA 相比, NES 在实现减振效果时具有更广泛的弹簧刚度范围。此外, NES 的优化参数区域和幅频响应受激励幅值的影响。构建了一种新型吸振模型,将冲击吸振器与非线性能量阱耦合,数值模拟结果验证了这一吸振装置的高效性。李继伟等^[19]分析了各参数对主结构振幅、能量耗散以及振动频率的影响。研究结果表明,适当的间隙和较高的碰撞恢复系数不仅可以增加系统的碰撞运动次数,还能使系统在每次碰撞中更有效地耗散能量。此外,在该系统中,强非线性刚度有利于吸振效果的提升。然而,如何设计 NES 的阻尼,即在保持结构稳定的同时提高其能量吸收效率,仍是一个长期困扰学者们的技术难题。

对于阻尼结构,Carboni 等^[20]提出了一种由镍钛合金和钢丝绳组成的新型非线性被动阻尼器,其具有典型的形状记忆滞后材料非线性特征,可以通过绳间的摩擦持续提供阻尼恢复力,为非线性振动控制机构的阻尼设计提供新思路。Belhaq 等^[21]建立了镍钛合金钢丝绳(Nitinol Steel Wire Ropes, NiTi-ST)的本构方程和非线性滞回模型。Zhang 等^[22]选用 NiTi-ST 以实现复合材料层合板的振动

控制。结果表明, NiTi-ST 对复合材料层合板具有优异的振动控制能力, 对系统固有频率的影响较小。张博文等^[23]提出了一种新型阻尼装置镍钛合金钢丝绳, 仿真结果证实, 这种钢丝绳可作为非线性阻尼器, 来抑制连续体结构振动。

本文将 NES 中的阻尼替换成 NiTi-ST, 组成一种新的减振器 N-NES。镍钛合金钢丝绳的形状记忆和超弹性特性可以增强 NES 系统的减振效果, 使其在各种工程领域, 如土木工程、航空航天和机械领域中的应用更为有效。尽管镍钛合金钢丝绳的制造成本较高, 但其长期耐用性, 降低了成本效益。在制造过程中的精确度要求高, 因为镍钛合金的性能受加工过程中温度和应力的影响, 可能会增加制造难度和成本。对于 NES 系统, 虽然 NES 的制造和维护成本可能高于传统的振动控制系统, 但其在减振效率方面的优势, 可以降低总体成本效益。此外, NES 的设计和优化需要精确的数值模拟和实验验证, 这可能会增加研发的时间和成本。

将环境中存在的其他能量形式变成电能, 是能量采集的主要目的, 以实现传感器等微电子设备持久的电力供应。在实际应用中, 能量采集装置可以将点阵夹芯结构产生的振动能量转化为磁场能量, 进而转化为电能^[24]。振动能量采集器可以分为压电型、静电型和磁致伸缩型^[25]。其中, 压电型能量采集器研究最为广泛。王海等^[26]设计了一种基于预应力梁的压电能量采集器, 提高了压电能量采集器的开路电压。施海天等^[27]设计的 Z 型梁结构的压电能量采集器可以实现多模态共振频率下的振动能量采集。GMM 具有出色的特性, 相较于传统的磁致伸缩材料, GMM 的磁致伸缩系数远大于其几十倍^[28]。GMM 还具备快速的响应速度, 尤其在室温下, 机械能—电能转换率高, 几乎同时发生磁化和应力效应, 适用于制造高灵敏电磁感应器件。而且 GMM 不仅适用于低频, 还适用于超高频^[29]。GMM 的这些特性使其在振动系统、传统电子信息系统、传感系统等领域引发了革命性变化^[30,31]。由于压电材料存在脆性大和易老化等缺点, 因此我们选择了超磁致伸缩材料(GMM)作为研究对象。GMM 的研究需要考虑维拉里效应^[32], 基于该效应超磁致伸缩材料的磁化强度随外力而变化, 从而提供了能量采集装置的工作原理。Wang 等^[33]使用哈密顿原理结合基于欧拉—伯努利梁理论的简谐波

叠加法, 建立了基于磁致伸缩材料的新型振动能量采集器的电路模型。Berbyuk 等^[34]研究了 Gafenol 棒的振动发电特性并建立了磁致伸缩材料棒的线性模型。超磁致伸缩材料 Terfenol-D^[35,36]具有超磁致伸缩应变、能量耦合系数大、动态响应快等优点, 可以广泛用于声纳换能器和超声波装置等动态应用中^[37-39]。在此基础上, 通过测试不同的超磁致伸缩材料(Terfenol-D、Gafenol、Metglas)特性, 获得了不同能量采集器的参数, 并得出了最佳解决方案。根据哈密顿原理、维拉里效应、欧拉—伯努利梁理论和超音速活塞理论获得了梁的动力学方程, 并使用龙格—库塔方法进行了数值模拟, 分析了 GML 参数和气动力参数对能量采集的影响。

本文所采用的能量采集装置 GML, 因其具有能量转换效率高、响应速度快、频率特性好、频带宽等特点, 在声学、传感器和电子器件、微控制领域和阻尼减振系统中有着重要应用。GML 的制作成本较高, 主要由于其含有稀土元素, 这些元素的提取和加工成本较高。而且制造的工艺较为复杂, 导致了成本的增加。但 GML 的伸缩系数大, 比传统磁致伸缩材料能量转换效率高。GML 在能量采集方面的技术挑战主要包括提高材料的能量转换效率、优化材料的性能稳定性、以及开发更加高效的能量采集系统设计。

本文提出了一种具备振动控制与能量采集的多功能点阵夹芯梁(M-LSB)结构。采用镍钛合金非线性能量阱(N-NES)作为点阵夹芯梁内部的振动控制器, 以实现振动抑制。其次, 在梁表面铺设超磁致伸缩薄片(GML), 通过 GML 的维拉里效应实现能量采集。基于哈密顿原理和牛顿第二定律, 建立了气动环境下耦合系统的运动方程。使用龙格—库塔法计算动力学方程得到了有无 N-NES 时多功能点阵夹芯梁的时域响应, 验证了 NES 中的质量、阻尼和非线性刚度对振动控制的影响, N-NES 的振动控制效果和 GML 的能量采集效率。

1 动力学建模

多功能点阵夹芯梁结构在气动力作用下的力学模型如图 1 所示。如图 1(a)所示, GML 铺设在点阵夹芯梁上。梁的长度和宽度分别为 L 和 b 。芯层的厚度为 h_c 。点阵夹芯梁上下面板的厚度为 h_f 。GML 的厚度为 t_m 。GML 能量采集器的简化电路

如图 1(b)所示,其中 $v(t)$ 和 $i(t)$ 分别为 GML 能量采集器产生的电压和电流与时间的关系。外部负载电阻为 R_L 。如图 1(c)所示,在点阵夹芯结构的芯层内安装 N-NES。 k 和 m 分别是 N-NES 的立方非线性刚度和附加小质量块。N-NES 的阻尼是一根镍钛合金钢丝绳。 u_m 是 N-NES 的位移。 x_N 是点阵夹芯梁上 N-NES 的位置。镍钛合金钢丝绳的力可按以下方式计算^[40]:

$$\begin{aligned} F_{Ni} = & k_1 [u_m - w(x_N, t)] + \\ & k_3 [u_m - w(x_N, t)]^3 + c_1 [\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ & r_{21} [u_m - w(x_N, t)]^2 [\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ & r_{12} [u_m - w(x_N, t)] [\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)]^2 \quad (1) \end{aligned}$$

其中, k_1 、 k_3 、 c_1 、 r_{21} 和 r_{12} 为镍钛合金钢丝绳的刚度系数、线性阻尼系数和非线性阻尼系数。

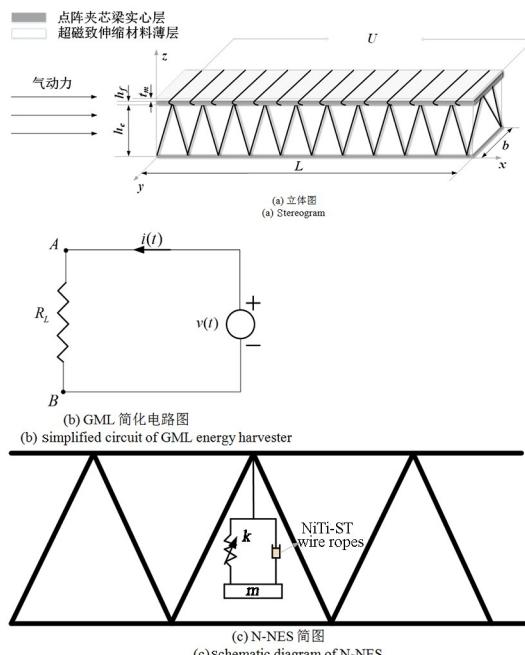


图 1 点阵夹芯在内部安装 N-NES 并在上面板铺设 GML
Fig. 1 Lattice sandwich beam installed N-NES and laid on GML

图 2(a)展示了一个晶格单元。点阵夹芯梁桁架的长度和倾斜度分别为 l 和 α 。 θ 表示形变后芯层法线的偏转角。铺设 GML 点阵夹芯梁的动力学方程基于以下假设:

(1)点阵夹芯梁的上下面板非常薄,剪切变形可以忽略不计。因此,欧拉-伯努利梁理论可用于夹芯梁模型。

(2)垂直于结构中平面的法向应力可忽略不计,即侧向位移与纵向坐标 z 无关,可表示为: $\epsilon_z = \partial w / \partial z = 0$ 。

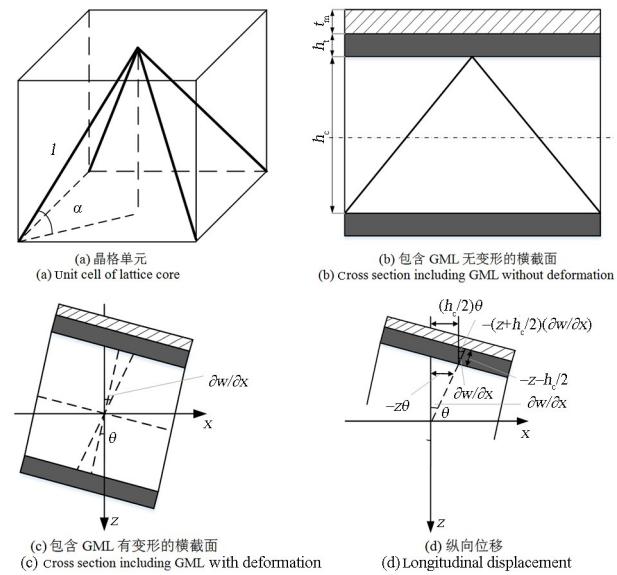


图 2 点阵夹芯梁的局部
Fig. 2 Local part of lattice sandwich beam

根据前面两个假设和图 2 中的几何关系,点阵夹芯梁上下面板和芯层的位移可分别表示如下:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{h_c}{2}\theta - \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}, & w_t &= w \\ u_b &= -\frac{h_c}{2}\theta - \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}, & w_b &= w \\ u_c &= -z\theta, & w_c &= w \end{aligned} \quad (2)$$

其中, w 为横向位移, z 为纵向位移。

根据冯·卡门的大变形理论,结构的应变-位移关系为:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xt} &= \frac{h_c}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \epsilon_{xb} &= -\frac{h_c}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \epsilon_{xc} &= -z\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \gamma_{xxc} &= \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

上板、下板和芯层的材料是各向同性的。它们的本构方程,即结构的应力应变关系为:

$$\begin{aligned} \sigma_{xt} &= E\epsilon_{xt} = E\left[\frac{h_c}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(z + \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ \sigma_{xc} &= E_c\epsilon_{xc} = E_c\left[-z\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \\ \sigma_{xb} &= E\epsilon_{xb} = E\left[-\frac{h_c}{2}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(z - \frac{h_c}{2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \end{aligned} \quad (4)$$

其中, E 是实心层的杨氏模量, E_c 和 G_c 分别是芯

层的杨氏模量和剪切模量,它们可以求得:

$$\begin{aligned} E_c &= E \sin^2(\alpha\bar{\rho}) \\ G_c &= \frac{1}{8} E \sin^2(2\alpha\bar{\rho}) \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $\bar{\rho}$ 是相对密度,即材料单胞的体积分数,计算公式如下:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{2\pi r_c^2}{l^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha} \quad (6)$$

式中, ρ_c 和 ρ 分别为晶核的密度和材料的密度. 点阵夹芯梁的结构参数和超磁致伸缩材料参数如表 1 所示.

表 1 点阵夹芯梁的结构参数和超磁致伸缩材料参数
Table 1 Structural parameters of lattice sandwich beam and parameters of giant magnetostrictive material

Parameters	Value
h_t	1.0×10^{-3} m
h_c	1.5×10^{-2} m
ρ	7830 kg/m^3
L	0.8m
b	0.1m
l	2.1×10^{-2} m
α	$\pi/4$
E	210GPa
k	4000 N/m^3
c	3 Ns/m
m	3.0×10^{-3} kg
t_m	0.5×10^{-3} m

维拉里效应描述了超磁致伸缩材料在外力改变的情况下由应力和应变引起的磁化状态变化,从而产生电能,是能量采集器的工作原理. 当改变 GML 的磁化强度和内部磁场时,磁通量也随之变化,点阵夹芯梁的振动能量转化为磁能. 根据法拉第电磁感应定律,GML 将磁场能量转化为电能,进而获得振动能量. GML 的本构方程为:

$$\begin{bmatrix} \sigma_g \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^H & -e \\ e & \mu_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_g \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中, σ_g 和 ϵ_g 分别为 GML 的应力和应变. \mathbf{H} 是磁场强度. \mathbf{B} 是磁感应强度. E^H 是 GML 的杨氏模量. μ_σ 是恒定应力下的磁导率. $e = E^H d$, d 为压磁系数. 根据超磁致伸缩材料的一般理论,当材料沿 x 轴弯曲时,材料沿 z 轴会产生轴向应变和磁化. 在本文中, GML 处于模式 33(3 表示 z 轴), 即

$$d = d_{33}.$$

N-NES 安装在点阵夹芯结构的芯层内. N-NES 产生的力施加在梁上可以写成:

$$\begin{aligned} F &= k[u_m - w(x_N, t)]^3 + \\ k_1[u_m - w(x_N, t)] + k_3[u_m - w(x_N, t)]^3 + \\ c_1[\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ r_{21}[u_m - w(x_N, t)]^2[\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ r_{12}[u_m - w(x_N, t)][\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

根据牛顿第二定律,N-NES 的动力学平衡方程可推导为:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_m + k[u_m - w(x_N, t)]^3 + k_1[u_m - w(x_N, t)] + \\ k_3[u_m - w(x_N, t)]^3 + c_1[\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ r_{21}[u_m - w(x_N, t)]^2[\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)] + \\ r_{12}[u_m - w(x_N, t)][\dot{u}_m - \dot{w}(x_N, t)]^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

根据哈密顿原理,系统的动力学方程如下:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(T - U + W_M) + \delta W] dt = 0 \quad (10)$$

其中, δ 是变分符号. T 是梁的动能. U 是势能. W_M 是磁能, δ_W 是外载荷做的虚功. 计算公式如下:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[\int_{V_t} \rho (\dot{u}_t^2 + \dot{w}^2) dV + \int_{V_b} \rho (\dot{u}_b^2 + \dot{w}^2) dV + \right. \\ &\quad \left. \int_{V_c} \rho_c (\dot{u}_c^2 + \dot{w}^2) dV + \int_{V_g} \rho_g (\dot{u}_g^2 + \dot{w}^2) dV \right] \\ U &= \frac{1}{2} \left[\int_{V_t} \sigma_{xt} \epsilon_{xt} dV + \int_{V_b} \sigma_{xb} \epsilon_{xb} dV + \right. \\ &\quad \left. \int_{V_c} (\sigma_{xc} \epsilon_{xc} + \tau_{xzc} \gamma_{xzc}) dV + \int_{V_g} \sigma_g \epsilon_g dV \right] \\ W_M &= \frac{1}{2} \int_{V_g} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV \\ \delta W &= \int_A \Delta p \delta w dA + F \delta w \end{aligned} \quad (11)$$

其中 V_t , V_b 和 V_c 分别是顶层、底层和芯层的体积. V_g 是 GML 薄层的体积. A 是梁的表面积. Δp 是垂直于梁表面的外部压力. 根据超音速活塞理论, 气动压力为:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \xi \frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial x} \\ \xi &= \frac{\rho_\infty U_\infty (2 - M_\infty^2)}{(M_\infty^2 - 1)^{3/2}}, \zeta = -\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \\ q_\infty &= \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2, h = 2h_f + h_c + h_g \end{aligned} \quad (12)$$

其中, ρ_∞ 、 U_∞ 和 M_∞ 分别为空气密度、超音速气流速度和马赫数, h 是梁厚度的总和. 气动参数见表 2.

表2 超音速气流的参数

Table 2 Parameters of supersonic flow

Parameters	Value
ρ_∞	1.288kg/m ³
U_∞	1.67
M_∞	500m/s

在后续工作中,我们采用了假设模态法。对于简支边界梁,通常采用正弦函数和余弦函数作为假设模态函数。因此横向位移 w 和旋转角度 θ 的近似值为:

$$\begin{aligned} w &= \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)g(t) = \varphi^T g \\ \theta &= \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)f(t) = \psi^T f \end{aligned} \quad (13)$$

其中, φ 和 ψ 是振动系统的模态函数, g 和 f 是广义坐标。根据欧拉—伯努利梁理论,GML 的轴向应变近似为:

$$\epsilon_g = -h_m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -h_m \ddot{\varphi}(x)g(t) \quad (14)$$

其中 h_m 可表示为:

$$h_m = \frac{t_m h + h^2}{2(\lambda t_m + h)}, \lambda = \frac{E^H}{E_b} \quad (15)$$

根据安培定则,在不考虑边际效应的情况下,磁场强度 H 为:

$$H = \frac{Ni}{L} \quad (16)$$

其中, N 代表感应线圈的匝数, i 代表感应电流。

将上述方程代入公式(11),可以得到 T 、 U 和 δW 的表达式,然后将得到的结果和公式(13)代入公式(10),可以得到梁的动力学方程为:

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + C_{\Delta p}\dot{X} + (K + K_N + K_{\Delta p})X &= F \\ \nu &= G^T \dot{X} - Li \end{aligned} \quad (17)$$

其中, M 是结构的质量矩阵, $C_{\Delta p}$ 是气动阻尼矩阵, K 、 K_N 和 $K_{\Delta p}$ 分别为结构刚度矩阵、非线性刚度矩阵和气动刚度矩阵。 X 是梁的广义坐标向量, 表示为 $X = [g^T, f^T]^T$ 。 G 是梁的机电耦合系数向量。 L 是感应线圈的等效电感。 ν 是负载电阻器的输出电压。 G 和 L 的表达式如下:

$$\begin{aligned} G &= \frac{Nd_{33}E^HA_mh_m}{L} \int_0^L \ddot{\varphi}(x)dx \\ L &= \frac{\mu_0 N^2 A_m}{L} \end{aligned} \quad (18)$$

如图3(a)所示,气动环境中未铺设 GML、铺设 GML、安装 NES 并铺设 GML 和安装 N-NES 并铺设 GML 的点阵夹芯梁的振动抑制效果对比。从图3(a)中看出,铺设 GML 前后梁的振幅衰减变化几乎一致,说明 GML 对梁振幅衰减影响很小。安装 NES 后,梁的振幅衰减非常明显,如图3(a)中蓝色部分。这一现象说明,NES 对点阵夹芯梁具有减振效果。之后将 NES 替换为 N-NES, 振幅衰减趋势如图3(a)中的绿色部分,对比蓝色部分,显然,N-NES 的减振效果要优于传统 NES。在图3(b)中,对比气动环境中铺设 GML、安装 NES 并铺设 GML 和安装 N-NES 并铺设 GML 的点阵夹芯梁的输出电压。从图中看出,输出电压变化趋势与振幅变化趋势一致,说明 GML 具有将振动产生的能量转化为电能并采集的功能,这一结论为之后能量采集的研究做了铺垫。

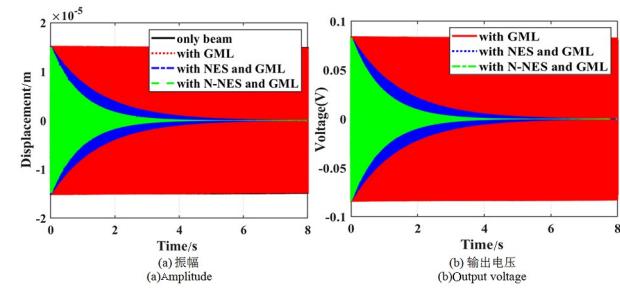


Fig. 3 点阵夹芯梁铺设 GML 前后、安装 NES 和 N-NES
Fig. 3 Lattice sandwich beam laying GML before and after, installing NES and N-NES

2 仿真结果与分析

本文使用龙格—库塔法求解动力学方程,得到了点阵夹芯梁振幅的时域响应和 GML 采集能量的变化。对不同构型镍钛合金钢丝绳参数进行对比讨论,以选择最佳构型作为 N-NES 中的阻尼进行振动控制,并且讨论了梁的不同位置处的振幅变化,以及气动力参数变化对振动控制的影响。讨论了超磁致伸缩材料对能量采集效率的影响,选择效果最好的作为 GML 的材料,接着讨论了关于 GML 相关参数对能量采集的影响。最后讨论 N-NES 安装的位置对振幅变化和 GML 输出功率的影响。

2.1 振动控制分析

为了实现更佳的振动抑制效果,深入研究了 NES 各项参数的调整对主系统振动抑制效果的影

响。在保持其他参数不变的前提下,分别调整 NES 的质量 m 、阻尼系数 c 和非线性刚度 k ,进行仿真。得到的振动时域结果如图 4~图 6 所示。

在图 4 中,通过改变 NES 中质量块的质量对点阵夹芯梁振动抑制效果进行了对比。改变 m 讨论了三种情况分别为: $m=0.003\text{kg}$, $m=0.005\text{kg}$, $m=0.01\text{kg}$ 。结果显示,在仿真时间达到 8 秒后,在 $m=0.005\text{kg}$ 和 $m=0.01\text{kg}$ 两种情况下,点阵夹芯梁的振幅衰减至接近零。而在 $m=0.003\text{kg}$ 的情况下,明显看出梁的振幅衰减远大于零。此外,对振幅衰减速率进行比较发现,在 $m=0.01\text{kg}$ 情况下,主系统的振幅衰减速率明显快于 $m=0.005\text{kg}$ 情况下的速率。综上所述,NES 中质量块的质量对主系统振动抑制效果有显著影响:质量越大,振动抑制效果越好,振幅衰减速度越快,衰减至同一振幅值所需时间越短。

如图 5 所示,NES 的阻尼系数对振动控制效果的影响与质量块的质量对振动控制效果的影响非常相似。选取了三个不同 NES 中阻尼的数值,来对比振动控制效果。从图中可以看出,当 NES 的阻

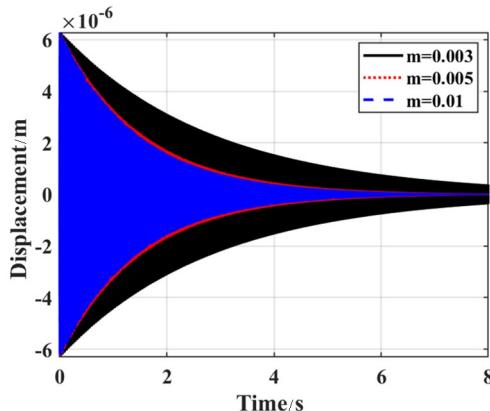


图 4 改变质量对振动控制的影响
Fig. 4 Effect of changing mass on vibration control

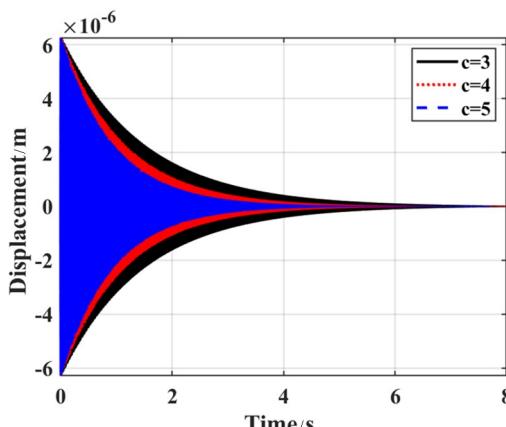


图 5 改变阻尼对振动控制的影响

Fig. 5 Effect of changing damping on vibration control

尼系数为 5 时,主系统的振幅在 4 秒后衰减接近零;而当阻尼系数分别为 4 和 3 时,达到相同效果所需时间为 6 秒和 8 秒。这表明,在一定范围内,增加 NES 的阻尼系数将提升主系统振动幅度的衰减速率。此外,即使是轻微的阻尼系数改变也会引起明显的振动控制效果变化,表明了阻尼系数对振动控制效果的显著影响。

图 6 显示了不同的 NES 非线性刚度主系统振幅时域响应的对比。选取了三个不同的非线性刚度值: $k=800\text{N/m}^3$, $k=4000\text{N/m}^3$, $k=16000\text{N/m}^3$ 进行仿真,结果如图 6 所示。在图 6(a)中,三种 NES 非线性刚度情况下,振幅变化区别并不是十分明显。因此,对时间为 7.36~7.46 秒的局部进行了放大,如图 6(b)所示。这个局部放大图更清晰地展示了三种情况下的振幅时域响应情况。可以看出,随着非线性刚度的增大,振动幅值会减小。

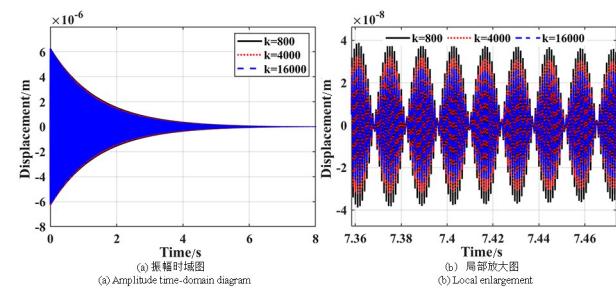


图 6 改变非线性刚度对振动控制的影响
Fig. 6 Effect of varying nonlinear stiffness on vibration control

为了更好地验证减振效果,图 7 对不同构型的镍钛合金钢丝绳进行了比较。表 3 列出了不同构型的镍钛合金钢丝绳参数。

表 3 不同构型的镍钛合金钢丝绳参数

Table 3 Parameter values of different Nitinol-Steel wire ropes configurations

S_{nj}	$k_1(\text{N/m})$	$k_3(\text{N/m}^3)$	$c_1(\text{Ns/m})$	$r_{21}(\text{Ns/m}^3)$	$r_{12}(\text{Ns}^2/\text{m}^3)$
S1a	—	4.16×10^8	118.2	1.699×10^6	5.249×10^4
S2a	5966	—	52.1	1.259×10^5	9876
S2b	4523	—	16.5	1.077×10^5	2608
S3a	6016	3.23×10^7	50.0	3.396×10^5	2.26×10^4

可以看出,S1a 的振动抑制效果最差,S2a 和 S2b 的振动抑制效果相似,而 S3a 的振动抑制效果最好。因此,S3a 构型被用于后续分析。

从图 8 可以看出梁的振幅变化在 4 秒后衰减至最小值,而且衰减效果十分明显。由此可以得出

结论,N-NES 对气动环境下点阵夹芯梁的整体减振效果显著。

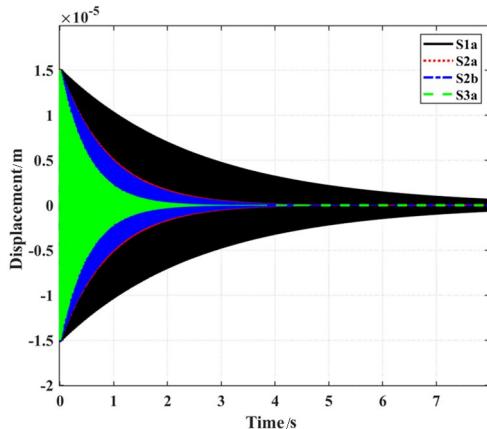


图 7 安装不同构型镍钛合金钢丝绳的 N-NES 时梁的振幅衰减比较

Fig. 7 Comparison of the amplitude attenuation for different configurations of Nitinol-Steel wire ropes

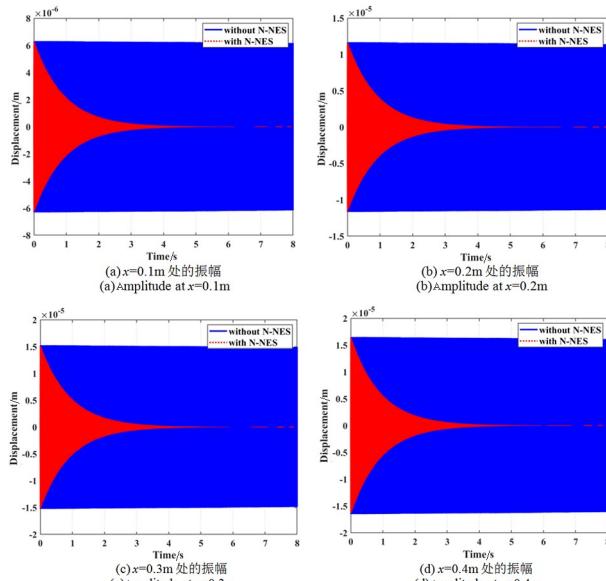


图 8 梁的不同位置的振幅比较

Fig. 8 Comparison of the vibration suppression effect for different positions attached to the beam

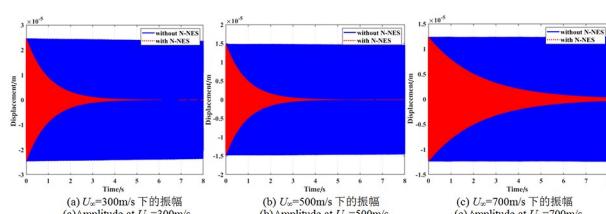


图 9 不同气流速度下有无 N-NES 的振幅比较

Fig. 9 Comparison of amplitude with different airflow velocity: without N-NES, with N-NES

此外,还对气动参数进行了讨论,以获得更有效的结果。减振结果如图 9、图 10 所示。结果表明,N-NES 在气动环境下对点阵夹芯梁的振动抑制效果明显。

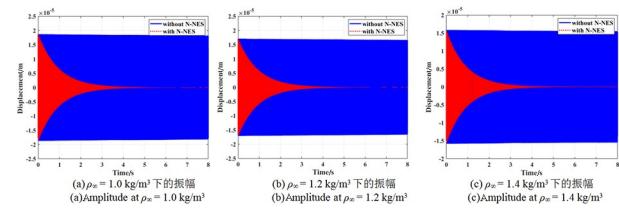


图 10 不同空气密度下有无 N-NES 的振幅比较
Fig. 10 Comparison of amplitude with different airflow density: without N-NES, with N-NES

2.2 能量采集研究

本节对气动环境下超磁致伸缩薄片的输出电压、输出功率和能量采集进行了时域分析。此外,还选择了三种不同的超磁致伸缩材料进行比较。选择能量采集效率最高的材料作为后续能量采集研究,并讨论了 GML 参数和气动参数对能量采集效果的影响。

表 4 不同材料制成的 GML 的结构特性

Table 4 Structural properties of GML fabricated from different materials

Parameters	Value
μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$
μ_σ	$230\mu_0 \text{ H/m}$
N	1000
R_0	36.4
R_L	50
E^H of Terfenol-D	110GPa
E^H of Gafenol	70GPa
E^H of Metglas	110GPa
d_{33} of Terfenol-D	11m/A
d_{33} of Gafenol	34m/A
d_{33} of Metglas	80m/A

三种超磁致伸缩材料的参数如表 4 所示。 R_0 是线圈的内阻。如图 11 所示,不同超磁致伸缩材料的 GML 在气动环境中的输出电压。显然,在三种超磁致伸缩材料中,Metglas 材料的输出电压最高,而 Terfenol-D 材料的输出电压最低,所以采用 Metglas 材料作为 GML 能量采集器。

图 12 为不同气流速度下采集能量的变化,可以看出,当 GML 厚度恒定时,采集能量与空气速度的变化趋势相反,采集能量随气流速度的增加而减小,因为气动阻尼增加,导致梁的振幅减小。而增加 GML 的厚度可以采集更多的振动能量。但需要

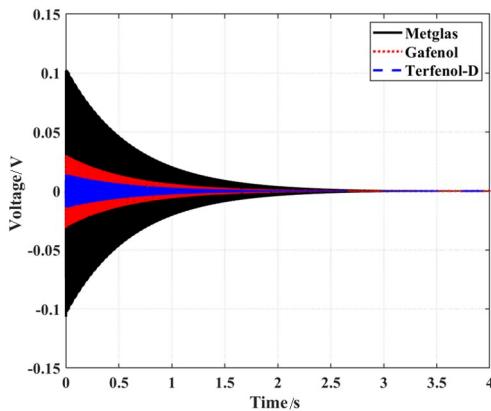


图 11 不同材料 GML 输出电压

Fig. 11 GML output voltage for different materials

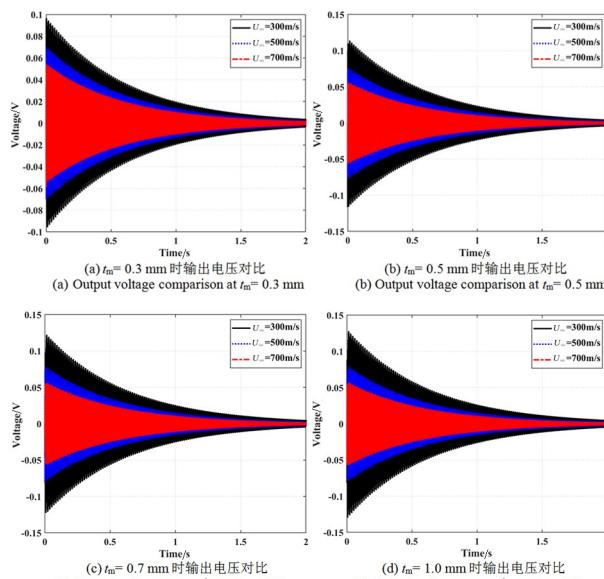


图 12 GML 能量采集器仿真:不同空气流速下的输出电压

Fig. 12 GML energy harvester simulation: output voltage at different flow rates

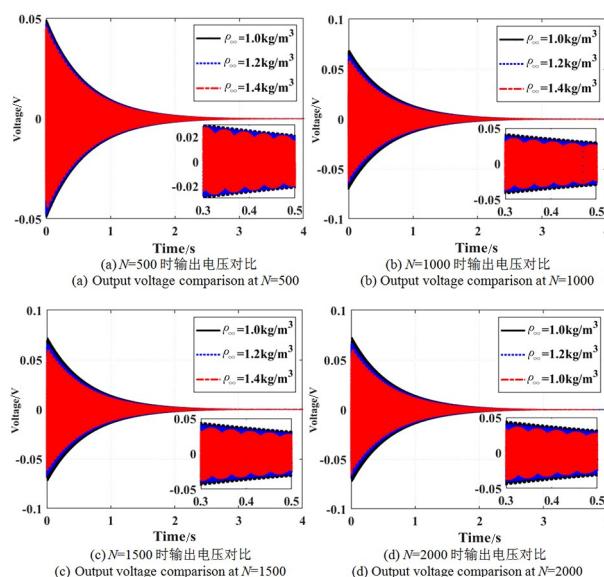


图 13 GML 能量采集仿真:不同空气密度下的输出电压

Fig. 13 GML energy harvester simulation: output voltage at different air densities

注意的是,厚度过厚会改变梁的物理结构特性,影响结构的振幅,同时也会增加制造成本.

如图 13 所示,不同线圈匝数和不同空气密度下 GML 能量采集器的输出电压随时间变化的时域图.输出电压随着线圈匝数的增加而增加,随着空气密度的增加而减小.这是因为线圈匝数越多,电磁感应效应越强,导致输出电压越高.而空气密度越大,气动阻力越大,GML 振动幅度越小,导致输出电压越低.线圈的内阻取决于匝数,表 5 列出了不同线圈匝数对应的负载电阻值,通过改变线圈匝数以选择最佳的负载电阻,来提高 GML 能量采集器的性能.

表 5 不同线圈匝数 N 对应的负载电阻 R_L

Table 5 Load resistance R_L for various numbers N of coil turns

Parameters	$N = 500$	$N = 1000$	$N = 1500$	$N = 2000$
R_L / Ω	18.2	36.4	54.6	72.8

在文中,考虑到能量采集效率和线圈内阻(即能量损耗),选择 $N = 1000$ 作为能量采集器参数.

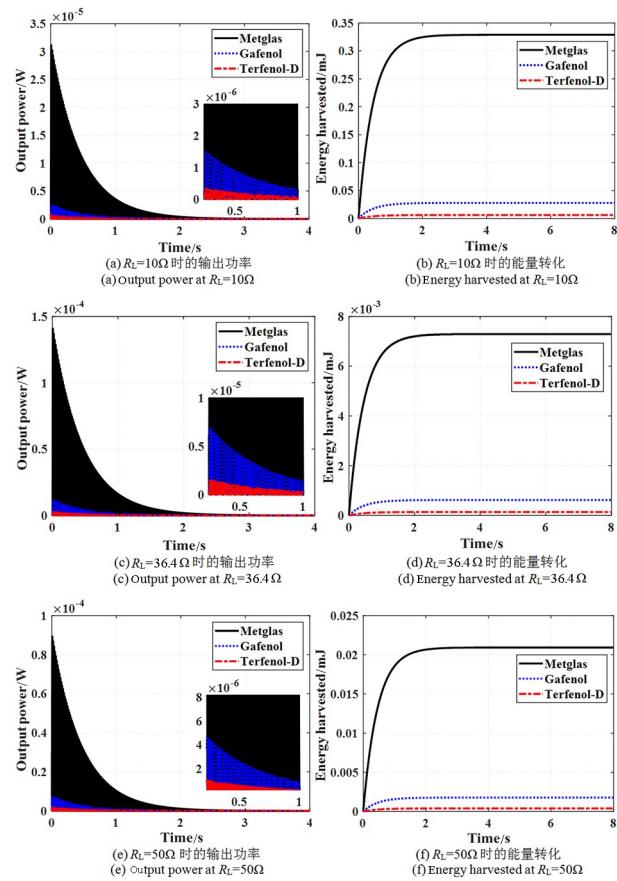


图 14 使用不同材料 GML 能量采集器

Fig. 14 Simulation of GML energy harvester with different materials

GML材料对能量采集的影响显而易见。如图14(a)~(e)所示,随着负载电阻的增加,输出功率也随之增加。图14(b)、图14(d)和图14(f)表示GML对能量转化的影响。可以看出,Metglas的能量采集效率最高。

得出结论,GML能有效地在梁振动过程中采集能量,其中Metglas对能量采集效率提升最大,并且在 R_L 在 $30\Omega \sim 40\Omega$ 范围内时,GML输出功率具有最优值,因为本文线圈内阻设为 36.4Ω ,当外阻和内阻数值相同时,输出功率最大。通过正确设计GML参数可以更有效地采集能量。

2.3 优化

为了更系统地表示不同位置处安装N-NES的点阵夹芯梁的振动抑制情况和铺设GML时梁不同

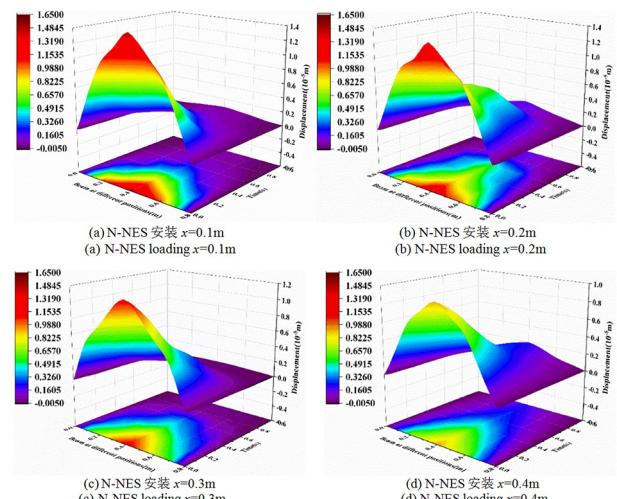


图15 N-NES不同安装位置时振幅

Fig. 15 N-NES loaded beam displacements at different locations

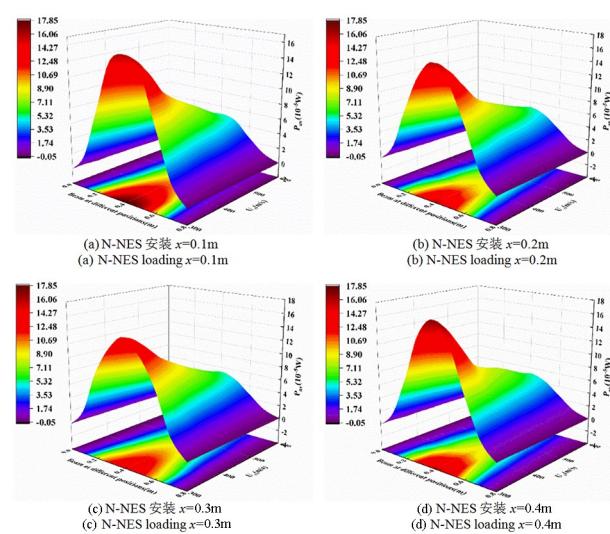


图16 不同来流速度下GML的平均输出功率

Fig. 16 Effect of air velocity on output power for N-NES at different positions

位置的输出功率情况,我们对气动环境下的梁模型进行了三维仿真,以便进行更直观的分析。

图15表示了N-NES不同安装位置梁的振幅—位置—时间关系三维图。从图15中可以看出,N-NES越靠近梁的中点,减振效果越好,并且N-NES能够实现全局减振。

图16显示了在不同空气速度下,在第一秒内点阵夹芯梁不同位置的输出功率。在梁中点安装N-NES时,能量采集效率最高。输出功率在梁中点处最高,气流速度会影响GML能量采集的效率,这与上一节的讨论是一致的。

3 结论

本文提出了在点阵夹芯梁芯层中安装N-NES并在梁上铺设GML以形成新型多功能点阵夹芯结构。运动方程由哈密顿原理、牛顿第二定律推导得出。通过数值仿真获得了振动时域响应和能量采集情况。可以得出以下结论:

(1)N-NES可实现有效的振动控制,铺设超磁致伸缩薄片可实现有效的振动能量收集,且不会改变点阵夹芯梁的物理特性。

(2)NES可以通过改变质量、阻尼和非线性刚度,来得到更好的振动控制效果。

(3)可以通过改变钢丝绳构型来改变N-NES的振动抑制效果,从而获得更好的振动控制。

(4)N-NES对点阵夹芯梁的全局减振效果优于NES。

(5)通过优化超磁致伸缩材料和GML能量采集器的参数,可以提高能量采集的效率。

(6)在三种超磁致伸缩材料中,Metglas材料的能量采集效率最高。

参考文献

- [1] STEEVES C A, HE M Y, EVANS A G. The influence of coatings on the performance of structural heat pipes for hypersonic leading edges [J]. Journal of the American Ceramic Society, 2009, 92(2): 553–555.
- [2] GUO X Z, CAI X B, ZHU L, et al. Preparation and properties of SiC honeycomb ceramics by pressureless sintering technology [J]. Journal of Advanced Ceramics, 2014, 3(1): 83–88.

- [3] STEEVES C A, WADLEY H N G, MILES R B, et al. A magnetohydrodynamic power panel for space reentry vehicles [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2007, 74(1): 57–64.
- [4] RIZOV V, SHIPSHA A, ZENKERT D. Indentation study of foam core sandwich composite panels [J]. *Composite Structures*, 2005, 69(1): 95–102.
- [5] LIU H, LV Z, WU H. Nonlinear free vibration of geometrically imperfect functionally graded sandwich nanobeams based on nonlocal strain gradient theory [J]. *Composite Structures*, 2019, 214: 47–61.
- [6] PAN S D, WU L Z, SUN Y G, et al. Fracture test for double cantilever beam of honeycomb sandwich panels [J]. *Materials Letters*, 2008, 62(3): 523–526.
- [7] QUEHEILLALT D T, MURTY Y, WADLEY H N G. Mechanical properties of an extruded pyramidal lattice truss sandwich structure [J]. *Scripta Materialia*, 2008, 58(1): 76–79.
- [8] LI X D, CONG F L, ZHANG Y W, et al. Effect of high-low temperature on the compressive and shear performances of composite sandwich panels with pyramidal lattice truss cores [J]. *Composite Structures*, 2022, 292: 115675.
- [9] ZHANG Y W, LI Z, XU K F, et al. A lattice sandwich structure with the active variable stiffness device under aerodynamical condition [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2021, 116: 106849.
- [10] CHEN L Q, LI X, LU Z Q, et al. Dynamic effects of weights on vibration reduction by a nonlinear energy sink moving vertically [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 451: 99–119.
- [11] ZHANG Z, LU Z Q, DING H, et al. An inertial nonlinear energy sink [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2019, 450: 199–213.
- [12] TRIPATHI A, GROVER P, KALMÁR-NAGY T. On optimal performance of nonlinear energy sinks in multiple-degree-of-freedom systems [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 388: 272–297.
- [13] DING H, CHEN L Q. Designs, analysis, and applications of nonlinear energy sinks [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, 100(4): 3061–3107.
- [14] ZHANG Y W, LU Y N, ZHANG W, et al. Nonlinear energy sink with inerter [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 125: 52–64.
- [15] ZANG J, CAO R Q, ZHANG Y W, et al. A lever-enhanced nonlinear energy sink absorber harvesting vibratory energy via giant magnetostrictive-piezoelectricity [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2021, 95: 105620.
- [16] ZANG J, CAO R Q, FANG B, et al. A vibratory energy harvesting absorber using integration of a lever-enhanced nonlinear energy sink and a levitation magnetoelectric energy harvester [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 484: 115534.
- [17] 童俊辉, 彭剑, 左云, 等. 基于非线性能量阱的深海柔性张力腿的振动抑制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(1): 30–35.
- TONG J H, PENG J, ZUO Y, et al. Vibration suppression of deep-sea flexible tension legs based on nonlinear energy sink [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2023, 21(1): 30–35. (in Chinese)
- [18] 王国旭, 丁虎, 陈立群. 简谐激励下双弹簧非线性能量阱的优化[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(6): 46–51.
- WANG G X, DING H, CHEN L Q. Optimization of a nonlinear energy sink with double springs and harmonic excitation [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2021, 19(6): 46–51. (in Chinese)
- [19] 李继伟, 赵泽福. 冲击减振器与非线性能量阱耦合系统的振动抑制研究[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 76–81.
- LI J W, ZHAO Z F. Vibration reduce for an impact damper coupled with nonlinear energy sink [J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, 18(2): 76–81. (in Chinese)
- [20] CARBONI B, LACARBONARA W. Nonlinear vibration absorber with pinched hysteresis: theory and experiments [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, 142(5): 04016023.
- [21] CARBONI B, LACARBONARA W. A new vibration absorber based on the hysteresis of multi-configuration NiTiNOL-steel wire ropes assemblies [J]. *MATEC Web of Conferences*, 2014, 16: 01004.
- [22] ZHANG Y W, WANG Z J, CAO M, et al. Vibration control of composite laminate via NiTiNOL-steel wire ropes: modeling, analysis, and experiment [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, 204: 110775.
- [23] 张博文, 贤健. 湿热环境下铺设镍钛合金钢丝绳功能梯度梁的振动控制[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(11): 19–26.

- ZHANG B W, ZANG J. Vibration control of functionally graded beam coupled with NiTiNOL-steel wire ropes under hygrothermal environment [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(11): 19–26. (in Chinese)
- [24] ZHANG Y W, SU C, NI Z Y, et al. A multifunctional lattice sandwich structure with energy harvesting and nonlinear vibration control [J]. Composite Structures, 2019, 221: 110875.
- [25] GUO X G, ZHANG Y L, FAN K Q, et al. A comprehensive study of non-linear air damping and “pull-in” effects on the electrostatic energy harvesters [J]. Energy Conversion and Management, 2020, 203: 112264.
- [26] 王海, 徐罡, 杨春来, 等. 预应力式压电能量采集器的模型和试验分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(7): 88—96.
- WANG H, XU G, YANG C L, et al. Model and test analysis of prestressed piezoelectric energy harvester [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(7): 88—96. (in Chinese)
- [27] 施海天, 魏莎, 丁虎, 等. Z型梁结构压电式能量采集性能分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(4): 93—100.
- SHI H T, WEI S, DING H, et al. Performance analysis of piezoelectric energy harvesting of a Z-shaped beam [J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(4): 93—100. (in Chinese)
- [28] YAN R G, LIU W Y, WU Y C, et al. Reactor vibration reduction based on giant magnetostrictive materials [J]. AIP Advances, 2017, 7(5): 056677.
- [29] WANG Z S, WANG H B, LIU X H. Dynamic response of the output force of giant magnetostrictive materials [J]. International Journal of Mechanics and Materials in Design, 2020, 16(4): 685—691.
- [30] CHENG G, YONG K, KE J. Modeling the dynamic behavior of manipulator joint based on giant magnetostrictive material [J]. The Review of Scientific Instruments, 2023, 94(6): 065016.
- [31] FANG Z W, ZHANG Y W, LI X, et al. Integration of a nonlinear energy sink and a giant magnetostrictive energy harvester [J]. Journal of Sound and Vibration, 2017, 391: 35—49.
- [32] RIESGO G, ELBAILE L, CARRIZO J, et al. Villari effect at low strain in magnetoactive materials [J]. Materials, 2020, 13(11): 2472.
- [33] WANG L, YUAN F G. Vibration energy harvesting by magnetostrictive material [J]. Smart Materials and Structures, 2008, 17(4): 045009.
- [34] BERBYUK V. Vibration energy harvesting using Galfenol-based transducer [C]//Active and Passive Smart Structures and Integrated Systems 2013. Bellingham, Washington: SPIE, 2013.
- [35] ZHAN Y S, LIN C H. A constitutive model of coupled magneto-thermo-mechanical hysteresis behavior for giant magnetostrictive materials [J]. Mechanics of Materials, 2020, 148: 103477.
- [36] ZHOU H M, LI M H, LI X H, et al. An analytical and explicit multi-field coupled nonlinear constitutive model for Terfenol-D giant magnetostrictive material [J]. Smart Materials and Structures, 2016, 25(8): 085036.
- [37] CHEN Y K, YANG X, YANG M Z, et al. Characterization of giant magnetostrictive materials using three complex material parameters by particle swarm optimization [J]. Micromachines, 2021, 12(11): 1416.
- [38] HUANG W M, WU X Q, GUO P P. Variable coefficient magnetic energy losses calculation model for giant magnetostrictive materials [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2021, 57(2): 6300505.
- [39] BERBYUK V, SODHANI J. Towards modelling and design of magnetostrictive electric generators [J]. Computers & Structures, 2008, 86(3/4/5): 307—313.
- [40] ZANG J, LIU P P, ZHANG Y W, et al. The performance of nonlinear vibration control via NiTiNOL-Steel wire ropes [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, 2023, 118: 107058.