

充液挠性航天器时变滑模控制及振动抑制^{*}

时浩翔^{1,2} 宋晓娟^{1,2†}

(1. 内蒙古工业大学 机械工程学院, 呼和浩特 010051)

(2. 内蒙古自治区特种服役智能机器人重点实验室, 呼和浩特 010051)

摘要 针对存在外界未知干扰、参数不确定问题的刚—液—柔多体耦合航天器姿态控制进行了研究. 将液体燃料的晃动等效为球摆模型, 挠性附件假设为欧拉—伯努利梁, 建立了多体耦合航天器动力学方程. 首先, 设计了积分滑模干扰观测器, 使其能够在有限的时间范围内对控制系统的集总扰动实现准确估计; 其次, 以此干扰观测器为基础, 设计了一种时变滑模控制方法, 该控制运用双曲正切函数; 最后, 结合光滑整形技术, 设计出零振动指令光滑器, 从而抑制液体晃动和挠性附件振动. 数值仿真结果表明: 本文所设计的控制方案具有可行性和有效性, 多模态充液挠性航天器在姿态机动过程中所引起的残余振动可以得到有效抑制.

关键词 刚—液—柔耦合航天器, 姿态机动, 干扰观测器, 时变滑模控制, 命令光滑器

中图分类号: V448

文献标志码: A

Time-Varying Sliding Mode Control and Vibration Suppression of Liquid-Filled Flexible Spacecraft^{*}

Shi Haoxiang^{1,2} Song Xiaojuan^{1,2†}

(1. College of Mechanical Engineering, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

(2. Inner Mongolia Autonomous Region Key Laboratory of Special Service Intelligent Robot, Hohhot 010051, China)

Abstract In this paper, attitude control of rigid-liquid-flexible multi-body coupling spacecraft with unknown interference and uncertain parameters is studied. The slosh of liquid fuel is equivalent to the spherical pendulum model, the flexible attachment is assumed to be Euler-Bernoulli beam, and the dynamics equation of spacecraft is established by Lagrangian method. Firstly, an integral sliding mode disturbance observer was designed for a finite time, enabling the designed model to estimate the lumped disturbances of the control system within a specified time range. Then, based on disturbance observer, a time-varying sliding mode control method is designed, which uses hyperbolic tangent function. Finally, a zero-vibration command smoothing device is designed to suppress liquid sloshing and vibration of flexible accessories. The numerical simulation results indicate that the control scheme designed in this paper is feasible and effective, the residual vibration caused by the multi-mode flexible spacecraft during attitude maneuver can be effectively suppressed.

2023-10-24 收到第 1 稿, 2023-11-19 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目 (11962020, 12362004, 12172182, 12132002), 内蒙古自治区高等学校创新团队发展计划支持 (NMGIRT2213), 内蒙古自治区高等学校青年科技人才项目 (NJYT23029, NJYT23067), 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目 (JY20220086, JY20220046), 内蒙古青年创新基金 (2023JQ14), National Natural Science Foundation projects (11962020, 12362004, 12172182, 12132002), Inner Mongolia Autonomous Region Higher Education Innovation Team Development Plan (NMGIRT2213), Youth Science and Technology Talent Project of Higher Education Institutions in Inner Mongolia Autonomous Region (NJYT23029, NJYT23067), Basic Research Funds of Universities Directly under Autonomous Region (JY20220086, JY20220046), Natural Science Foundation of Inner Mongolia (2023JQ14).

[†] 通信作者 E-mail: xjsong0603@163.com

Key words rigid-liquid-flexible coupling spacecraft, attitude maneuver, disturbance observer, time-varying sliding mode control, command smooth

引言

现代大型航天器的结构日益复杂,不但携带大量液体燃料(占到航天器总体质量的40%以上),往往还会携带多种挠性附件(如太阳帆板,空间机械臂,柔性可伸展天线等).而一个非线性且耦合的动力学系统是由航天器的液体燃料,挠性附件和主刚体所组成的,从而为航天器控制带来了极大的挑战.

要消除燃料晃动所诱发的不稳定效应,就必须将液体燃料晃动纳入航天器整体控制系统建模方案中.在建立模型时,各类贮腔内的液体晃动效应常以等效的力学模型进行阐述.例如:基于光滑粒子流体力学^[1]方法,提出一种流量可控的出口边界处理方法,可估算出液体晃动对航天器的影响;在变参数的复合摆等效力学模型^[2]的基础上,采用混合坐标法对一类变质量充液航天器展开动力学建模,从而为航天工程实践提供一定的理论指导和参考;建立液体多模态晃动等效力学模型^[3],结合输入成型和自适应滑模控制设计了复合控制策略.其他还有用浮动坐标法^[4]来模拟柔性体的小幅晃动;质心面模型和运动脉动球模型^[5]模拟液体大幅晃动;变参数复合摆模型^[6]用于模拟液体燃料晃动及消耗.

随着航天器结构日益复杂化,外部扰动多样化,且控制精度不断提高,对充液挠性多体航天器的研究也更加深入.文献[7]提出了一个复合的3DOF刚性摆模型来等效非线性液体晃动,并通过三种不同情况模拟验证了模型的有效性,为分析航天器中液体燃料的大振幅横向晃动和旋转晃动提供了新思路.文献[8]研究了含有板类柔性附件的复杂航天器,在对太阳能帆板的变形进行探究时,采用Kirchhoff-Love薄板模型,然后,通过Hamilton变分原理推导了充液储腔的液体晃动控制方程,并分析了由于柔性附件装配位置的不同,从而对耦合航天器的系统动力学行为产生了较大的干扰.文献[9]研究充液挠性航天器大范围运动,基于凯恩方法建立航天器刚-液-柔耦合系统动力学,采用脉动球模型等效液体燃料的晃动,并考虑柔性帆板振动过程中的动力刚化效应,该动力学模型对航天器动力学分析有重要意义.文献[10]研究了多

体耦合航天器的非线性建模和姿态机动问题,采用改进的运动脉动球模型等效液体的大幅晃动,建立刚-液-柔耦合航天器动力学系统.仿真结果表明,液体晃动会导致航天器姿态机动,从而影响挠性附件的变形.

干扰观测器可以克服环境干扰和参数不确定性对航天器姿态控制精度带来的影响,在实际工程中也被广泛应用.文献[11]基于滑模控制(Sliding Mode Control, SMC)理论和自适应积分滑模控制器(Adaptive Integral Sliding Mode Controller, AISMC)法则,设计出用于挠性航天器的姿态跟踪控制的滑模干扰观测器(Sliding Mode Disturbance Observer-Adaptive Integral Sliding Mode Controller, SMDO-AISMC),既可以实现对滑模干扰观测器(Sliding Mode Disturbance Observer, SMDO)估计和跟踪误差同时收敛,又可以有效抑制由外部干扰和参数不确定引起的扰动.文献[12]将充液挠性航天器的惯性不确定性、外部扰动、液体晃动和柔性附件的耦合归为集总扰动,并设计出模糊干扰观测器(Fuzzy Disturbance Observer, FDO)来估计,可以通过调整设计参数减小估计误差.文献[13]提出了一种固定时间收敛的扰动观测器,但其收敛时间取决于初始状态,其在实际中很难测得.文献[14]运用径向基函数神经网络补偿未知干扰,有效降低了输出饱和的风险.

时变滑模面可随系统状态或时间改变而改变,使系统在任何时刻的状态变量都能够处于滑模上,从而消除趋近阶段,增强系统对高频抖动的抗冲击能力和鲁棒性.文献[15]提出了一种对于输入饱和和执行器线性不确定情况下的时变滑模面,对被控对象无要求.文献[16]将变结构控制方法应用于航天器的姿态机动,并设计了时变滑模面和切换机制,有效解决了航天器非线性机动控制问题.文献[17]将时变滑模控制的指数形式与干扰观测器相结合,能够有效降低系统稳态误差,极大改善了系统的控制精确性.文献[18]提出在不了解系统初始状态前提下的时变滑模面,使得被控系统在接近滑模和到达滑模后都能加速收敛.

零振动光滑整形技术为充液挠性航天器中的

挠性附件振动抑制提供了新途径. 文献[19]对平面桥式起重机进行试验, 证实了该光滑整形技术抑制挠性附件振动的有效性. 文献[20]研究了矩形贮液箱内的液体晃动, 采用了将命令光滑器和输入成型复合的控制方法, 仿真和实验数据显示控制器有良好的振动抑制效果. 文献[21]优化了前人设计的光滑器, 优化后的光滑器既可以更好地抑制液体晃动又对系统参数变化和工作条件变化不敏感. 文献[22]采用遗传算法优化控制器参数, 使系统的平方误差加权指标 (ISE) 和违反控制输入约束的加权惩罚指标最小, 明显提高了系统的鲁棒性.

针对刚—液—柔耦合航天器的姿态机动问题, 本文提出了一种复合控制方法. 考虑航天器在进行姿态机动过程中会受到多种干扰力矩的影响, 且系统各参数不能确定, 设计了积分滑模干扰观测器, 能在有限时间范围内估计系统的集总扰动. 同时结合零振动光滑整形技术设计了命令光滑器, 在保证系统渐近稳定的同时抑制在姿态机动时产生的液体晃动以及柔性附件的振动.

1 充液挠性航天器动力学建模

1.1 航天器姿态动力学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{G}^T(q_0, \mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

$$\mathbf{G}(q_0, \mathbf{q}) = [-\mathbf{q}, q_0 \mathbf{I}_3 - \mathbf{q}^\times] \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$ 为航天器的角速度, $\mathbf{I}_3$ 为单位对角矩阵, $[q_0 \ \mathbf{q}]^T = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 为姿态四元数, 其满足约束条件 $q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$, 以便后文对姿态控制问题阐述简便, 本文仅考虑 $q_0 = 1, \mathbf{q}^\times$ 为叉乘矩阵, 定义为:

$$\mathbf{q}^\times = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.2 充液挠性航天器数学模型

航天器的模型如图 1 所示, O_o -XYZ 为航天器的本体坐标系, 航天器主刚体的质心 O_o 为坐标原点. 液体晃动等效为球摆运动, O_p 为球摆的悬挂点, 摆长为 l , 质量为 m_p , 位移矢量为 $\mathbf{r}_p$. 挠性附件等效为欧拉—伯努利梁, 长度为 l_1 , 单位密度为 ρA , 弯曲刚度为 EI . 本文只考虑航天器的姿态运

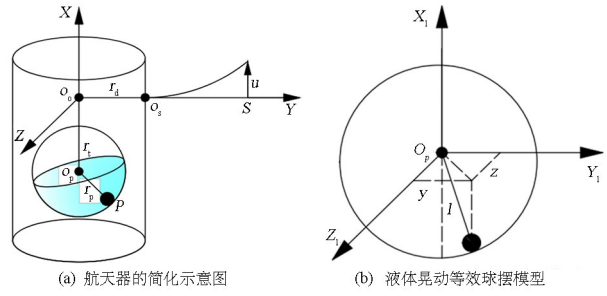


图 1 充液挠性航天器示意图和力学模型
Fig. 1 Schematic diagram and mechanical model of a liquid filled flexible spacecraft

动且航天器只包含一个液体贮液箱, 液体燃料为小幅晃动.

球摆在 O_o -XYZ 的位移矢量 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_t + \mathbf{r}_p$, 速度矢量 $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{r}}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_p$, 文献[12]利用拉格朗日法, 建立球摆动力学方程:

$$\mathbf{A} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_f \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_f \boldsymbol{\eta} + m_p \mathbf{D} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) \dot{\boldsymbol{\eta}} = 0 \quad (4)$$

$$\text{式中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix}, \mathbf{C}_f = \begin{bmatrix} 2c_1 & c_2 \\ c_2 & 2c_3 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} -m_p r_z & 0 & m_p r_x \\ m_p r_y & -m_p r_x & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \frac{m_p g}{l} & 0 \\ 0 & \frac{m_p g}{l} \end{bmatrix}, \mathbf{F}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -2m_p \omega_1 \\ 2m_p \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} r_x \omega_1 \omega_2 - r_y (\omega_1^2 + \omega_2^2) + r_z \omega_2 \omega_3 \\ r_x \omega_1 \omega_3 - r_z (\omega_1^2 + \omega_2^2) + r_y \omega_2 \omega_3 \end{bmatrix}.$$

挠性附件的弹性位移 u , 采用模态分析法 $u = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(y) \epsilon_i(t)$, $\varphi_i(y)$ 为挠性附件的三阶主振动函数, 令 $\boldsymbol{\epsilon}(t) = \mathbf{U} \times \mathbf{n}(t)$. 文献[8]建立挠性附件的动力学方程为:

$$\mathbf{B}_s \ddot{\mathbf{n}}(t) + \mathbf{C}_s \dot{\mathbf{n}}(t) + \mathbf{K}_s \mathbf{n}(t) = 0 \quad (5)$$

式中:

$$\mathbf{K}_s = \text{diag}\{u_i EI \int_0^{l_1} \left[\frac{d^2 \varphi_i(y)}{dy^2} \right]^2 dy\}$$

$$\mathbf{C}_s = \text{diag}\{2\xi_i u_i \sqrt{2EI \int_0^{l_1} \left[\frac{d^2 \varphi_i(y)}{dx^2} \right]^2 dy} \epsilon_i(t)\}$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} b_i = -u_i \rho A \int_0^{l_1} \varphi_i(y) (r_0 + y) dy$$

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{\rho A \int_0^{l_1} \varphi_i^2(y) dy}}, i = 1, 2, 3$$

设航天器的转动惯量为 $\mathbf{J}$, 主刚体的转动惯量为 $\mathbf{J}_b$, 质量为 m_b . 文献[8]得到航天器整体的动力学方程:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}^\times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_s^T \dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\delta}^T \dot{\boldsymbol{\eta}}) + \mathbf{B}_s^T \ddot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\delta}^T \ddot{\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{T}_d - \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (6)$$

式中, $\mathbf{J}_b = \mathbf{J} - m_b \mathbf{r}_p^\times \mathbf{r}_p^\times$, $\mathbf{T}_d$ 为未知干扰力矩, $\boldsymbol{\tau}$ 为控制力矩.

綜上方程(4)~方程(6)为充液挠性多体航天器动力学方程.

2 复合控制器设计

2.1 有限时间积分滑模干扰观测器的设计

为控制方便引入新的状态变量 $\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\zeta}$. 省略掉方程中的高阶小量, 由系统动力学方程可得

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{J}^{-1} [-\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \bar{\mathbf{T}}_d + \boldsymbol{\tau}] \quad (7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} = -(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_f \boldsymbol{\psi} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{K}_f \boldsymbol{\eta} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_f \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\omega}) \quad (8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\psi} - \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\omega} \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = -(\mathbf{C}_s \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}_s \mathbf{n} - \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \boldsymbol{\omega}) \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{B}_s \boldsymbol{\omega} \quad (11)$$

其中集总扰动为:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_d = & \mathbf{T}_d - \boldsymbol{\omega}^\times (\Delta \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_s^T \dot{\mathbf{n}} + \boldsymbol{\delta} \dot{\boldsymbol{\eta}}) - \Delta \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \\ & \boldsymbol{\delta}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_f \boldsymbol{\psi} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{K}_f \boldsymbol{\eta} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}_f \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\omega}) + \\ & \mathbf{B}_s^T (\mathbf{C}_s \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}_s \mathbf{n} - \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s \boldsymbol{\omega}) \end{aligned}$$

式中: $\Delta \mathbf{J} = m_b \mathbf{r}_p^\times \mathbf{r}_p^\times$, $\Delta \mathbf{J}$ 为不确定惯性矩阵.

充液挠性航天器的控制系统可以表示为式(1)、式(7)~式(11).

定义如下符号:

$$\text{sig}^v(x) = |x_1|^v \text{sign}(x_1) + |x_2|^v \text{sign}(x_2) + \cdots + |x_n|^v \text{sign}(x_n)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $0 < v < 1$, $\text{sign}(\cdot)$ 表示符号函数.

引理 1^[10]: 如果存在 $0 < p < 1$, 则不等式

$$\sum_{i=1}^3 |x_i|^{1+p} \geq (\sum_{i=1}^3 |x_i|^2)^{1+p/2} \text{ 成立.}$$

引理 2^[10]: 对于任何实数 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$),

存在 $0 < b < 1$ 使不等式 $(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^b \leq |x_1|^b + |x_2|^b + \cdots + |x_n|^b$ 成立.

引理 3^[19]: 考虑如下系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

其中: $x \in R^n$, $f: U \rightarrow R^n$ 为连续函数.

假设存在连续可微函数 $V: U \rightarrow R^n$ 满足下述条件: $V(x)$ 是正定函数;

存在任何实数 $a_1 > 0$, $0 < a_2 < 1$, 和 $a_3 > 0$ 且为常值时, 如果 $V(x)$ 满足下列任意微分不等式:

$$\dot{V}(x) + a_1 V^{a_2}(x) \leq 0$$

$$\dot{V}(x) + a_3 V(x) + a_1 V^{a_2}(x) \leq 0$$

则系统是全局有限时间稳定的.

引理 4^[19]: 考虑如下系统:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_n = u$$

如果控制器设计为:

$$u = -k_1 \text{sign}(x_1) |x_1|^{\alpha_1} -$$

$$k_2 \text{sign}(x_2) |x_2|^{\alpha_2} - \cdots - k_n \text{sign}(x_n) |x_n|^{\alpha_n}$$

则闭环系统是全局有限时间稳定的. 其中: $\alpha_{i-1} = (\alpha_i \alpha_{i-1}) / (2\alpha_{i+1} - \alpha_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_n = \alpha$, $\alpha_{i+1} = 1$, $\alpha \in (1 - \epsilon, 1)$, $\epsilon \in (0, 1)$; $k_1, k_2, \dots, k_n$ 保证 $s^n + k_n s^{n-1} + \cdots + k_1$ 是 Hurwitz.

设计如下干扰观测器:

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{v} \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau}(t) + \bar{\mathbf{T}}_d(t) \quad (13)$$

$$s_{1i} = \dot{s}_{0i} + \int_0^t [k_{1i} \text{sig}^{\alpha_{1i}}(s_{0i}) + k_{2i} \text{sig}^{\alpha_{2i}}(\dot{s}_{0i})] ds \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\mathbf{T}}}_d(t) = & k_{1i} \text{sig}^{\alpha_{1i}}(s_{0i}) + k_{2i} \text{sig}^{\alpha_{2i}}(s_{0i}) + \\ & \lambda_{1i} \text{sig}^{\beta}(s_{1i}) + \lambda_{2i} s_{1i} + L_i \text{sign}(s_{1i}) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: $\mathbf{s}_0 = [s_{01} \quad s_{02} \quad s_{03}]^T$, $L_i \geq \sup_{t \geq 0} |\dot{\bar{\mathbf{T}}}_d|$, $\alpha_{2i} = \alpha_{1i} / (1 + \alpha_{1i})$, $0 < \alpha_{1i} < 1$.

$k_{1i}, k_{2i}, \alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \lambda_{1i}, \lambda_{2i}, L_i$ ($i = 1, 2, 3$) 均为正常数; $\hat{\bar{\mathbf{T}}}_d(t)$ 为 $\bar{\mathbf{T}}_d(t)$ 的估计值.

注: 式(14)中的积分项确保了滑模观测器能够在有限的时间范围内实现收敛, 通过积分的运算, $\hat{\bar{\mathbf{T}}}_d(t)$ 可得知, 进而颤振现象可以通过此项来进行改善.

定理 1: 针对充液挠性航天器姿态控制系统式(7)~式(11), 设计的干扰观测器为式(12)~式(15), 可以在有限的时间范围内估计到集总干扰.

证明: 由式(12)可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{s}}_0 = & \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \hat{\bar{\mathbf{T}}}_d(t) - \\ & [-\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\tau} + \hat{\bar{\mathbf{T}}}_d(t)] = \tilde{\bar{\mathbf{T}}}_d(t) \end{aligned} \quad (16)$$

将式(14)对时间求导整理可得:

$$\dot{s}_{1i} = -\lambda_{1i} \text{sig}^\beta(s_{1i}) - \lambda_{2i} s_{1i} - L_i \text{sign}(s_{1i}) + \dot{\bar{T}}_d(t) \quad (17)$$

考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 \quad (18)$$

将 V_1 对时间求一阶导数得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{s}_1^T \dot{\mathbf{s}}_1 \\ &= -\sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_{1i} [\lambda_{1i} \text{sig}^\beta(s_{1i}) + \lambda_{2i} s_{1i} + L_i \text{sign}(s_{1i}) - \dot{\bar{T}}_d(t)] \\ &\leq -\sum_{i=1}^3 [\lambda_{1i} \text{sig}^{\beta+1}(s_{1i}) + \lambda_{2i} s_{1i}^2 + L_i \|s_{1i}\| \|\dot{\bar{T}}_d(t)\| \|s_{1i}\|] \\ &\leq -\sum_{i=1}^3 [\lambda_{1i} \text{sig}^\beta(s_{1i}) + \lambda_{2i} s_{1i}] \\ &\leq 2^{(\beta+1)/2} \lambda_1 V_1^{(\beta+1)/2} - \lambda_2 V_1 \end{aligned} \quad (19)$$

式中: $\lambda_1 = \min\{\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{13}\}$, $\lambda_2 = \min\{\lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}\}$.

据引理 3 和式(19)可以推知,在有限的时间范围内,系统能够到达滑动模态 s_1 ,当 $s_1=0$ 时,式(14)可以写成:

$$\ddot{s}_{0i} = -k_{1i} \text{sig}^{a_{1i}}(s_{0i}) - k_{2i} \text{sig}^{a_{2i}}(\dot{s}_{0i}) \quad (20)$$

由引理 4 可得 s_0 在有限时间收敛到 0,定理 1 得证.

2.2 时变线性滑模控制

引理 5^[10]: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \infty)$ 上连续,且其广义积分 $\int_0^\infty f(t)dt$ 存在且有界,则可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

假设 1:控制力矩有界.

选取如下时变滑模面:

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega} + k(t) \mathbf{q} \quad (21)$$

式中 $k(t)$ 为时变控制参数,对时间进行求导可得

$$\dot{k}(t) = -\gamma_k (1 - k_p) \tau_{\max} \mathbf{q}^T [\tanh(s/p^2) + \tanh(k\mathbf{q}/p^2)] - \gamma_k \gamma_c k (\mathbf{q}^T \mathbf{q} + \gamma_d) \quad (22)$$

式中 $0 < k_p < 1$, $\tau_{\max}$ 为控制力矩最大值, $\gamma_k, \gamma_c, \gamma_d$ 为正常数.

$p^2(t)$ 定义为:

$$\begin{aligned} p^2(t) &= p_0^2 e^{-\gamma_p 6\bar{\alpha}(1-k_p)\tau_{\max} t} + \\ &\gamma_p \gamma_c \int_0^t \exp[-\gamma_p 6\bar{\alpha}(1-k_p)\tau_{\max}(t-\sigma)] \times \\ &k(\sigma)^2 [\mathbf{q}(\sigma)^T \mathbf{q}(\sigma) + \gamma_d] d\sigma \end{aligned} \quad (23)$$

式中: $p_0^2 = p^2(0)$, γ_p 为正常数. 由双曲正切函数所满足的性质,正参数 $\bar{\alpha}$ 满足如下不等式关系,其中

x, y 为正参数

$$0 \leq |x| \left[1 - \tanh\left(\frac{x}{y}\right) \right] \leq \bar{\alpha} |y| \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p^2) &= -\gamma_p 6\bar{\alpha}(1-k_p)p^2 + \\ &\gamma_p \gamma_c k^2 (\mathbf{q}^T \mathbf{q} + \gamma_d) \end{aligned} \quad (25)$$

控制律设计为:

$$\boldsymbol{\tau} = -k_p \tau_{\max} \mathbf{q} - \hat{\mathbf{T}}_d - (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(s/p^2) \quad (26)$$

考虑如下李雅普诺夫函数条件:

$$V_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + 2k_p \tau_{\max} (1 - q_0) + \frac{1}{2\gamma_k} k^2 + \frac{1}{\gamma_p} p^2 \quad (27)$$

对其求时间的导数可得:

$$\dot{V}_2 = \boldsymbol{\omega}^T (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + k_p \tau_{\max} \mathbf{q}) + \frac{1}{\gamma_k} \dot{k} + \frac{1}{\gamma_p} \frac{d}{dt}(p^2) \quad (28)$$

将式(21)、式(22)、式(25)和式(26)代入式(28)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \boldsymbol{\omega}^T [-\boldsymbol{\omega}^\times \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \tilde{\mathbf{T}}_d - (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(s/p^2)] + \\ &\frac{k}{\gamma_k} \{-\gamma_k (1 - k_p) \tau_{\max} \mathbf{q}^T [\tanh(s/p^2) + \\ &\tanh(k\mathbf{q}/p^2)] - \gamma_k \gamma_c k (\mathbf{q}^T \mathbf{q} + \gamma_d)\} + \frac{1}{\gamma_p} \frac{d}{dt}(p^2) \\ &= \mathbf{s}^T [\tilde{\mathbf{T}}_d - (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(s/p^2)] - \\ &(1 - k_p) \tau_{\max} k \mathbf{q}^T \tanh(s/p^2) - \\ &(1 - k_p) \tau_{\max} k \mathbf{q}^T \tanh(k\mathbf{q}/p^2) - \\ &\gamma_k \gamma_c k (\mathbf{q}^T \mathbf{q} + \gamma_d) + \frac{1}{\gamma_p} \frac{d}{dt}(p^2) \\ &= \mathbf{s}^T [\tilde{\mathbf{T}}_d - (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(s/p^2)] - \\ &k \mathbf{q}^T [\tilde{\mathbf{T}}_d + (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(k\mathbf{q}/p^2)] - \\ &6\bar{\alpha}(1 - k_p) p^2 \end{aligned}$$

由于 $-1 \leq \tanh(x) \leq 1, x \in R$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \sum_{i=1}^3 s_i [\tilde{T}_{di}(t) - (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(s_i/p^2)] - \\ &\sum_{i=1}^3 k p_i [\tilde{T}_{di}(t) + (1 - k_p) \tau_{\max} \tanh(kq_i/p^2)] - \\ &6\bar{\alpha}(1 - k_p) p^2 \leq \|s_i\| \tilde{T}_{di} - (1 - \\ &k_p) \tau_{\max} \sum_{i=1}^3 |s_i| \tanh(s_i/p^2) + (1 - \\ &k_p) \tau_{\max} \tanh(s_i/p^2) (\sum_{i=1}^3 |s_i| - \|s\|_1) - \\ &(1 - k_p) \tau_{\max} \sum_{i=1}^3 k |q_i| \tanh(k |q_i| / p^2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k(1-k_p)\tau_{\max}[\tanh(k|q_i|/p^2) \times \sum_{i=1}^3 |q_i| - \\
& \tanh(k\|q_i\|/p^2)] - k\|p_i\|\tilde{T}_{di} - 6\bar{\alpha}(1-k_p)p^2 \leq \\
& \|s_i\|\tilde{T}_{di} - (1-k_p)\tau_{\max} \sum_{i=1}^3 |s_i| \tanh(s_i/p^2) + \\
& (1-k_p)\tau_{\max}(\sum_{i=1}^3 |s_i| - \|s\|_1) - k\|p_i\|\tilde{T}_{di} + \\
& k(1-k_p)\tau_{\max}(\sum_{i=1}^3 |q_i| - \|q\|_1) - 6\bar{\alpha}(1-k_p)p^2 \leq \\
& -\|s\|_i[(1-k_p)\tau_{\max} - \tilde{T}_{di}] + (1 - \\
& k_p)\tau_{\max} \sum_{i=1}^3 \{|s_i| [1 - \tanh(s_i/p^2)]\} - \\
& \|kq_i\|[(1-k_p)\tau_{\max} - \tilde{T}_{di}] + (1-k_p) \cdot \\
& \tau_{\max} \sum_{i=1}^3 \{|kq_i| [1 - \tanh(kq_i/p^2)]\} - 6\bar{\alpha}(1-k_p)p^2
\end{aligned}$$

根据式(24)可以推出如下

$$\begin{aligned}
& (1-k_p)\tau_{\max} \sum_{i=1}^3 \{|s_i| [1 - \tanh(s_i/p^2)]\} \\
& \leq 3\bar{\alpha}(1-k_p)\tau_{\max}p^2
\end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
& (1-k_p)\tau_{\max} \sum_{i=1}^3 \{|s_i| [1 - \tanh(s_i/p^2)]\} \\
& \leq 3\bar{\alpha}(1-k_p)\tau_{\max}p^2
\end{aligned} \quad (30)$$

将式(29)、式(30)代入得:

$$\dot{V}_2 \leq -(\|s\|_1 + \|kq\|_1)[(1-k_p)\tau_{\max} - \tilde{T}_{di}] \leq 0 \quad (31)$$

由上式可知,控制系统的状态变量 ω, q 均为有界变量.将式(31)两边从0到 ∞ 积分可知

$$\begin{aligned}
V_2(\infty) - V_2(0) & \leq -[(1-k_p)\tau_{\max} - \\
& \tilde{T}_{di}] \int_0^\infty (\|s\|_1 + \|kq\|_1) dt \leq 0
\end{aligned}$$

式中定义 $V_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_2(t)$, $V_2(0) = \lim_{t \rightarrow 0} V_2(t)$.根据引理5可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega = \lim_{t \rightarrow \infty} kq = 0 \quad (32)$$

由式(32)可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} kq = 0$,可以看出不能保证在任何时刻 $\lim_{t \rightarrow \infty} q = 0$.因为时变参数 k 是随时间变化的,如果 $\lim_{t \rightarrow \infty} k = 0$,也可以得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} kq = 0$ 的结果,所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} q = 0$ 的收敛性是不确定的.为此,为了保证 q 快于 k 收敛于0,需要选择合适的控制器参数 $\gamma_k, \gamma_d, k(0)$.在选择这些参数时应注意:

(1)这些参数应可调控,使得 q 的收敛速度快于 k ;

(2)要保证控制器出现可接受的良好控制性能.

上述时变滑模变结构控制器,将传统的滑模控

制器中的符号函数用双曲正切函数取代,从而能够改善传统滑模的控制输入颤振现象.

2.3 零振动指令光滑设计

零振动光滑整形技术作为一种前馈控制,不需要测量挠性附件振动的状态变量和液体晃动的状态变量,只需要对系统原始驱动命令与一系列脉冲进行卷积计算,将这种卷积的运算过程定义为输入成形技术,这一系列脉冲被称为输入整形器,从而产生光滑的驱动命令.使用整形器对原始输入指令做整形处理,从而整形后的指令驱动系统达到抑制液体的晃动或者挠性附件振动的目的.

由系统内液体的晃动方程(4)以及挠性附件的振动方程(5)可知,系统内液体和挠性体的振动均为典型的二阶振动系统,其输出为系统角速度导数的耦合项,所有振动方程的输入均为四元数.因此系统的四元数可作为指令输入对系统进行前馈控制.

定义前馈控制器为 $u(\tau)$,同时定义 $[\bar{q}_{c0} \quad \bar{q}_c^T]^T = [\bar{q}_{c0} \quad \bar{q}_{c1} \quad \bar{q}_{c2} \quad \bar{q}_{c3}]^T$ 作为输入前馈控制器的指令四元数, $[q_{c0} \quad q_c^T]^T = [q_{c0} \quad q_{c1} \quad q_{c2} \quad q_{c3}]^T$ 为经过前馈控制器卷积后的输出指令四元数.

$$\begin{aligned}
[q_{c0} \quad q_c^T]^T & = [q(0) \quad q^T(0)]^T + \\
& \{[\bar{q}_{c0} \quad \bar{q}_c^T]^T - [q(0) \quad q^T(0)]^T\} * u(\tau)
\end{aligned} \quad (33)$$

式中 $[q(0) \quad q^T(0)]^T$ 为姿态四元数的初始值, $*$ 为卷积运算符号, $u(\tau)$ 为待设计的前馈控制器的表达式.

进一步地,定义误差四元数

$$\begin{aligned}
[q_{e0} \quad q_e^T]^T & = [q_{e0} \quad q_{e1} \quad q_{e2} \quad q_{e3}]^T \\
\begin{bmatrix} q_{e0} \\ q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} q_{c0} & q_{c1} & q_{c2} & q_{c3} \\ -q_{c1} & q_{c0} & q_{c3} & -q_{c2} \\ -q_{c2} & -q_{c3} & q_{c0} & q_{c1} \\ -q_{c3} & q_{c3} & -q_{c1} & q_{c0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (34)$$

光滑器设计的基础是振动系统的固有频率 ω_k 和阻尼比 ζ_k .光滑器对原始的驱动命令进行改进,且不会引发系统振荡的光滑命令.典型的二阶振动系统对光滑命令 $u(\tau)$ 的响应如下:

$$\begin{aligned}
f(t) & = \int_{\tau=0}^{t+\infty} u(\tau) \frac{\omega_k}{\sqrt{1-\zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k (t-\tau)} \times \\
& \sin[\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} (t-\tau)] d\tau
\end{aligned} \quad (35)$$

其幅值为

$$A(t) = \frac{\omega_k}{\sqrt{1-\zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \times \sqrt{[S(\omega_k, \zeta_k)]^2 + [C(\omega_k, \zeta_k)]^2} \quad (36)$$

其中

$$S(\omega_k, \zeta_k) = \int_{\tau=0}^{+\infty} u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \times \sin(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau$$

$$C(\omega_k, \zeta_k) = \int_{\tau=0}^{+\infty} u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \times \cos(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau$$

为了消除系统响应的振动,式(36)的振幅应为零,即平滑后的命令 u 不会引起系统的残余振动。此外,为了增强命令光滑器的鲁棒性,需要增加额外的约束,即式(36)的幅值对 ω_k 和 ζ_k 的导数应限制为零,即满足下列条件:

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \sin(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau = 0 \quad (37)$$

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \cos(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau = 0 \quad (38)$$

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} \tau u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \sin(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau = 0 \quad (39)$$

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} \tau u(\tau) e^{\zeta_k \omega_k \tau} \cos(\omega_k \tau \sqrt{1-\zeta_k^2}) d\tau = 0 \quad (40)$$

为了使平滑后的命令与原命令驱动系统处于同一位置,平滑后的命令在时域内的积分应限制为 1,即

$$\int_{\tau=0}^{+\infty} u(\tau) d\tau = 1$$

最后,典型的二阶振动系统的命令光滑器的表达式为

$$u(\tau) = \begin{cases} \tau u_0 e^{-\zeta_k \omega_k \tau}, & 0 \leq \tau \leq T \\ (2T - \tau) u_0 e^{-\zeta_k \omega_k \tau}, & T \leq \tau \leq 2T \\ 0, & \tau \geq 2T \end{cases} \quad (41)$$

其中 $u_0 = \zeta_k^2 \omega_k^2 / (1 - e^{-2\pi\zeta_k / \sqrt{1-\zeta_k^2}})^2$, $T = 2\pi / (\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2})$ 是系统的阻尼振荡周期。

3 仿真结果与比较

选取航天器的转动惯量为

$$J = \begin{bmatrix} 503 & 0 & 0 \\ 0 & 385 & -5 \\ 0 & -5 & 420 \end{bmatrix} \text{ kg/m}^2$$

不确定惯性矩阵为

$$\Delta J = \text{diag}\{0.01\sin(0.1t), 0.02\sin(0.2t), 0.03\sin(0.3t)\}$$

假设航天器的外部干扰力矩为

$$T_d = 0.02 \begin{bmatrix} 3 + 2\sin(0.1t) \\ 2 + 3\sin(0.2t) \\ 1 + 2\cos(0.3t) \end{bmatrix} (\text{N} \cdot \text{m}).$$

液体等效模型相关参数选取:

$$m_p = 10 \text{ kg}, l = 0.228 \text{ m}, r_x = 0.8 \text{ m}, r_y = r_z = 0,$$

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.05, g = 1.689 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

挠性附件相关参数为:

$$E = 7 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, l_1 = 3 \text{ m}, r_0 = 0.65 \text{ m}, I = 3 \times 10^{-9} \text{ m}^2, \rho = 2.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, A = 1.125 \times 10^{-2} \text{ m}^2.$$

各阶模态阻尼系数为:

$$\zeta_1 = 0.01, \zeta_2 = 0.007, \zeta_3 = 0.005.$$

干扰观测器相关参数选取为:

$$\beta = 0.5, k_{11} = k_{12} = k_{13} = 2, k_{21} = k_{22} = k_{23} = 1,$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0.7, \lambda_{11} = \lambda_{12} = \lambda_{13} = 3,$$

$$\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 3, L_1 = L_2 = L_3 = 100;$$

时变滑模控制参数设计如下:

$$\bar{\alpha} = 0.24, k_p = 0.4, \gamma_c = 1, \gamma_p = 0.02,$$

$$\gamma_d = 0.08, \gamma_k = 0.005, p^2(0) = 1.2, k_0 = 2;$$

零振动指令光滑器参数设计如下:

$$\omega_k = 0.0996, \zeta_k = 0.01$$

为对本文所提出的控制器的有效性和鲁棒性进行考证,提出了以下两种仿真形式。

情形一:对本文所设计的基于干扰观测器的时变滑模控制器,结合零振动指令光滑器之后的复合控制器,进行仿真研究。仿真结果如图 2~图 7。

仿真分析如下:

(1)图 2 给出了系统集总扰动的估计值和实际值的响应曲线图,可以看出在有限的时间范围内,航天器的集总扰动 $\bar{T}_d$ 能够被合理地估计,尤其在对稳态响应区间进行干扰估计时,干扰误差估计精准,因此,此观测器的观测性能较好。

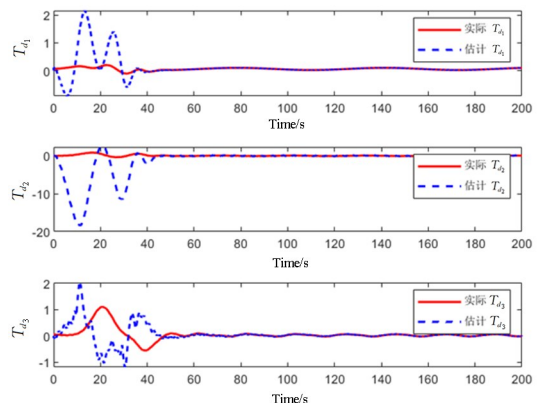


图 2 干扰力矩及其估计值响应

Fig. 2 Interference torque and its estimated value response

(2)图 3 和图 4 分别给出了系统角速度和姿态四元数响应曲线图,可以看出角速度和姿态四元数在 50 秒左右收敛到平衡位置;加入零振动指令光滑器后的角速度及姿态四元数超调量略有减小.

(3)图 5 给出了控制力矩响应曲线对比图,可以看出控制力矩在 50 秒左右收敛到平衡位置,加入零振动指令光滑器后控制力矩的稳态区间误差精度更小,控制系统的稳定性更好.

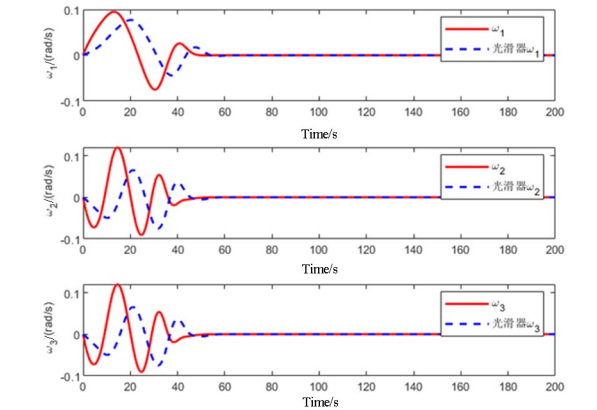


图 3 角速度响应
Fig. 3 Angular velocity response

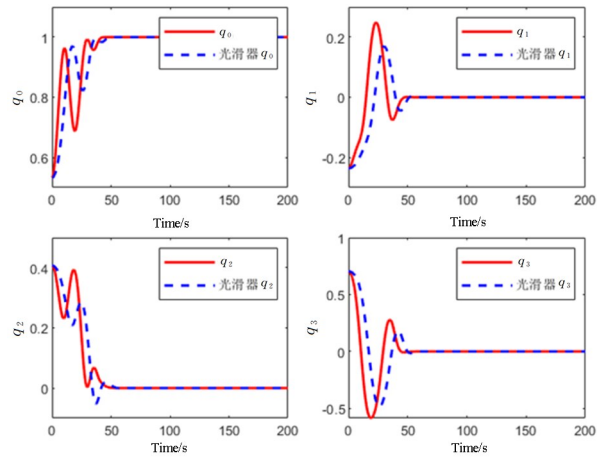


图 4 姿态四元数响应
Fig. 4 Attitude quaternion response

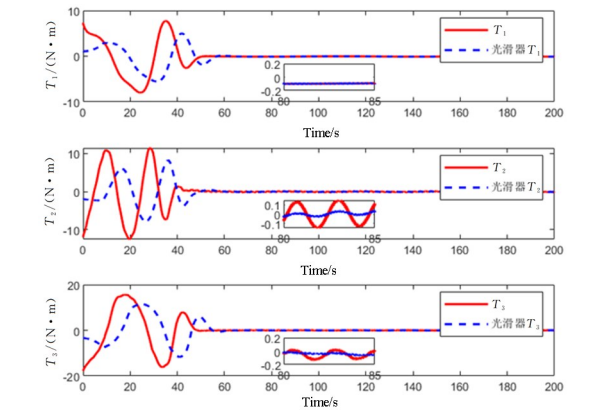


图 5 控制力矩响应
Fig. 5 Control torque response

(4)图 6 和图 7 给出液体晃动的位移和挠性附件振动的模态坐标响应曲线对比图,可以看出加入零振动指令光滑器后液体晃动以及挠性附件的振动响应大幅度减小.证明了复合控制器对系统振动抑制的有效性.

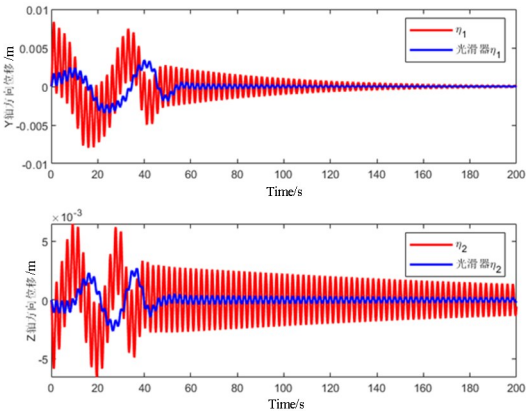


图 6 液体晃动位移响应
Fig. 6 Liquid sloshing displacement response

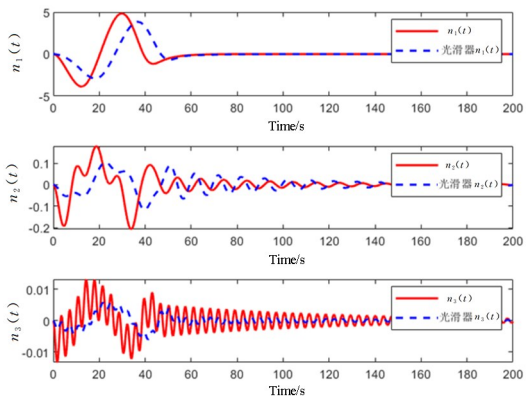


图 7 挠性附件的三阶模态坐标响应
Fig. 7 Third order modal coordinate response of flexible attachments

情形二:对文献[15]所提出的时变滑模控制器进行仿真对比探究,为了更加方便对控制效果进行比较,将文献[15]设计的控制器在充液挠性控制式(1)、式(17)~式((21)的环境下进行数值仿真分析,如图 8~图 10.

通过观察上述仿真结果图,可知如下结论:

(1)对比图 3 和图 8 中的角速度响应曲线图,图 3 的角速度收敛到平衡位置需要 50 秒左右,图 8 中的角速度收敛到平衡位置则约需要 65 秒左右,而且图 3 的稳态区间的误差精度更小,拥有更高的控制精度.

(2)对比图 4 和图 9 中的姿态四元数响应曲线图,图 4 的姿态四元数收敛到平衡位置需要 50 秒左右,图 9 中的姿态四元数收敛到平衡位置则需要

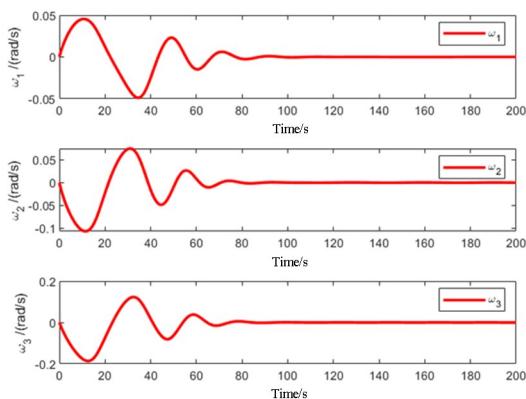


图 8 基于文献[15]控制器的角速度响应

Fig. 8 Angular velocity response of controller based on reference [15]

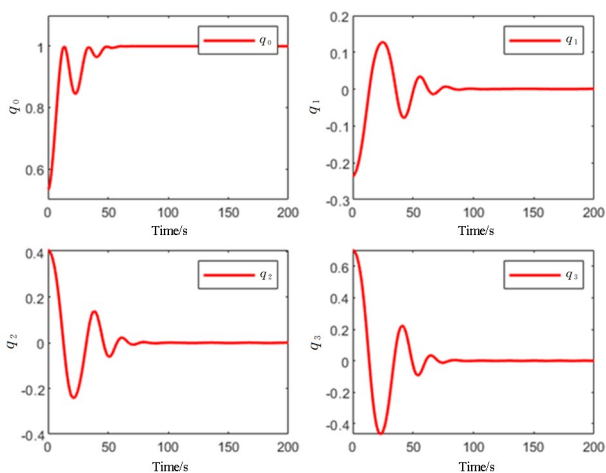


图 9 基于文献[15]控制器的姿态四元数响应

Fig. 9 Attitude quaternion response of controller based on reference [15]

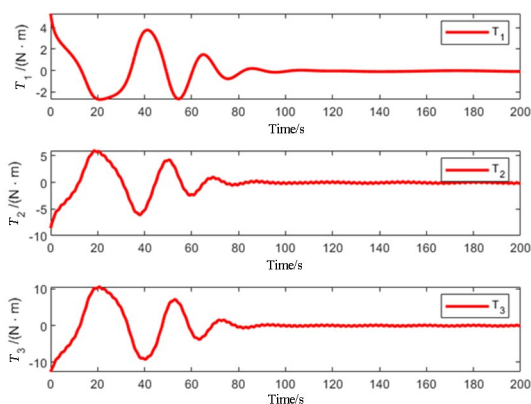


图 10 基于文献[15]控制器的控制力矩响应

Fig. 10 Control torque response of controller based on reference [15]

100 秒左右,且图 4 在稳态区间的控制精度更高,两种控制相比之下,本文所设计的复合控制器拥有较好的瞬态响应。

(3)对比图 5 和图 10 中的控制力矩响应曲线图,图 5 的控制力矩收敛到平衡位置需要 50 秒左

右,图 10 中的控制力矩收敛到平衡位置需要 100 秒左右,而且存在连续抖动的现象,对控制器产生不良影响.两种控制相比之下,本文所设计的复合控制器拥有较好的稳定性。

4 结论

本文研究充液挠性航天器姿态机动与振动抑制问题,将液体晃动等效为球摆模型,挠性附件等效为欧拉伯努利梁,采用拉格朗日方法建立了充液挠性航天器的姿态动力学模型.考虑系统存在外部未知干扰、参数不确定的情形,设计了航天器姿态机动控制器.所设计的控制系统有如下优势:

(1)设计的时变滑模控制器,使系统的状态变量也可以在有限时间内渐近稳定,且通过 Lyapunov 函数证明了系统的稳定性。

(2)设计的积分滑模观测器,可以在有限时间内准确估计系统所受到的集总扰动。

(3)针对液体晃动和挠性附件振动,设计的命令光滑器,实现了姿态机动稳定的同时抑制了因姿态机动引起的液体晃动以及挠性附件的振动响应。

参考文献

- [1] 于强,王天舒. 充液航天器变质量液体大幅晃动的 SPH 分析方法[J]. 宇航学报, 2021, 42(1): 22—30.
- [2] YU Q, WANG T S. SPH method for large-amplitude liquid sloshing with variable mass in liquid-filled spacecraft [J]. Journal of Astronautics, 2021, 42(1): 22—30. (in Chinese)
- [3] 刘峰,岳宝增,马伯乐,等. 燃料消耗下充液航天器等效动力学建模与分析[J]. 力学学报, 2020, 52(5): 1454—1464.
- [4] LIU F, YUE B Z, MA B L, et al. Equivalent dynamics modeling and analysis of liquid-filled spacecraft with fuel consumption [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2020, 52(5): 1454—1464. (in Chinese)
- [5] 宋晓娟,王宏伟,吕书锋. 输入饱和的充液航天器抗干扰有限时间滑模控制[J]. 控制与决策, 2021, 36(5): 1078—1086.
- [6] SONG X J, WANG H W, LYU S F. Anti-disturbance finite-time sliding mode control for liquid-filled spacecraft with input saturation [J]. Control and

- Decision, 2021, 36(5): 1078–1086. (in Chinese)
- [4] 王博洋, 刘铸永, 郑鹏飞. 哑铃型航天器刚—柔耦合动力学建模与仿真分析[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(6): 25–32.
- WANG B Y, LIU Z Y, ZHENG P F. Rigid-flexible dynamic modeling and simulation of dumbbell spacecraft [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(6): 25–32. (in Chinese)
- [5] DENG M L, YUE B Z. Attitude dynamics and control of liquid filled spacecraft with large amplitude fuel slosh [J]. Journal of Mechanics, 2017, 33(1): 125–136.
- [6] NAVABI M, DAVOODI A, REYHANOGLU M. Optimum fuzzy sliding mode control of fuel sloshing in a spacecraft using PSO algorithm [J]. Acta Astronautica, 2020, 167: 331–342.
- [7] LIU F, YUE B Z, TANG Y, et al. 3DOF-rigid-pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks [J]. Journal of Sound Vibration, 2019, 460: 114907.
- [8] 闫玉龙, 申云峰, 岳宝增. 含板类柔性附件的充液航天器动力学研究[J]. 宇航学报, 2020, 41(5): 531–540.
- YAN Y L, SHEN Y F, YUE B Z. Research on dynamics of liquid-filled spacecraft carrying plate-type flexible appendages [J]. Journal of Astronautics, 2020, 41(5): 531–540. (in Chinese)
- [9] DENG M L, YUE B Z. Nonlinear model and attitude dynamics of flexible spacecraft with large amplitude slosh [J]. Acta Astronautica, 2017, 133: 111–120.
- [10] UMAIR JAVAID, ZHEN Z Y. Robust adaptive attitude control of flexible spacecraft using a sliding mode disturbance observer [J]. Aerospace Engineering, 2022, 36(11): 2235–2253.
- [11] DOU L Q, DU M M, ZHANG X Y, et al. Fuzzy disturbance observer-based sliding mode control for liquid-filled spacecraft with flexible structure under control saturation [J]. IEEE Access, 2019, 7: 149810–149819.
- [12] GAO J W, FU Z M, ZHANG S. Adaptive fixed-time attitude tracking control for rigid spacecraft with actuator faults [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2019, 66(9): 7141–7149.
- [13] WANG H W, LU S, SONG X J. Adaptive neural network variable structure control for liquid-filled spacecraft under unknown input saturation [J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2020, 2020: 6515626.
- [14] SHARMA R, TEWARI A. Optimal nonlinear tracking of spacecraft attitude maneuvers [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2004, 12(5): 677–682.
- [15] 方艺忠, 陆宇婷, 韩拓, 等. 导弹增量式自适应容错控制系统设计[J]. 北京航空航天大学学报, 2022, 48(5): 920–928.
- FANG Y Z, LU Y T, HAN T, et al. Design of missile incremental adaptive fault tolerant control system [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2022, 48(5): 920–928. (in Chinese)
- [16] CONG B L, LIU X D, CHEN Z. Exponential time-varying sliding mode control for large angle attitude eigenaxis maneuver of rigid spacecraft [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2010, 23(4): 447–453.
- [17] CORRADINI M L, ORLANDO G. Brief paper: linear unstable plants with saturating actuators: robust stabilization by a time varying sliding surface [J]. Automatica, 2007, 43(1): 88–94.
- [18] JIN Y Q, LIU X D, QIU W, et al. Time-varying sliding mode controls in rigid spacecraft attitude tracking [J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2008, 21(4): 352–360.
- [19] XIE X M, HUANG J, ZANG Q. Vibration reduction for flexible systems by command smoothing [J]. Mechanical Systems & Signal Processing, 2013, 39(1/2): 461–470.
- [20] ZANG Q, HUANG J, LIANG Z. Slosh suppression for infinite modes in a moving liquid container [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(1): 217–225.
- [21] ZANG Q, HUANG J. Dynamics and control of three-dimensional slosh in a moving rectangular liquid container undergoing planar excitations [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62(4): 2309–2318.
- [22] SUN H B, HOU L L, ZONG G D, et al. Composite anti-disturbance attitude and vibration control for flexible spacecraft [J]. IET Control Theory and Applications, 2017, 11(14): 2383–2390.

分段光滑机械振动系统亚谐振动的复杂分岔^{*}

张锦涛^{1†} 吕小红² 金花² 刘芳璇¹

(1. 西安铁路职业技术学院 牵引动力学院, 西安 710026)

(2. 兰州交通大学 机电工程学院, 兰州 730070)

摘要 以一类单自由度分段光滑机械振动系统为研究对象. 数值计算两参数平面上亚谐振动的模式及分布区域. 利用延拓打靶法对亚谐波包含域内亚谐振动的分岔特征、稳定性及转迁规律进行了详细研究. 结果表明: 弹性碰撞振动系统中擦边分岔是连续可逆的. 在亚谐波包含域内, 倍化型擦边分岔普遍存在, 鞍结型擦边分岔和亚临界周期倍化分岔使系统响应发生跳跃和迟滞. 高频亚谐波包含域内多吸引子共存, 混沌吸引子发生边界激变而突然消失.

关键词 分段光滑, 周期解, 打靶法, Floquet 乘子, 分岔

中图分类号: O322; TH113.1

文献标志码: A

Complex Bifurcation of Sub-harmonic Vibrations for a Class of Piecewise Smooth Mechanical Vibration System^{*}

Zhang Jintao^{1†} Lv Xiaohong² Jin Hua² Liu Fangxuan¹

(1. School of Traction Power, Xi'an Railway Vocational & Technical Institute, Xi'an 710026, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

Abstract A class of single-degree-of-freedom piecewise smooth mechanical vibration systems was studied. The modes and distribution regions of sub-harmonic vibrations in the two-parameter plane are numerically calculated. The bifurcation characteristics, stability and transmigration laws of sub-harmonic vibrations in the sub-harmonic inclusion regions are investigated in detail by using the continuation shooting method. The results show that the grazing bifurcation is continuous in the elastic impact system. In the sub-harmonic inclusion regions, PD-type grazing bifurcation are prevalent, and SN-type grazing bifurcation and subcritical period-doubling bifurcation cause jumps and hysteresis phenomenon of system response. Multiple attractors coexist in the high-frequency sub-harmonic inclusion regions, and the chaotic attractor ends up at the boundary crisis.

Key words piecewise smooth, periodic motion, shooting method, Floquet multipliers, bifurcation

引言

机械系统工作时零部件之间由于间隙的存在

不可避免地会产生冲击, 这种冲击会缩短机器使用寿命, 降低机器性能. 近年来, 机械振动系统中丰富的动力学行为, 引起了国内外学者的广泛关注.

2023-11-26 收到第 1 稿, 2024-01-22 收到修改稿.

^{*} 西安铁路职业技术学院 2024 年度立项课题(XTZY24K01), 2024 Established Project of Xi'an Railway Vocational & Technical Institute (XTZY24K01).

[†] 通信作者 E-mail: Zjtao928@163.com

考虑弹性约束的碰撞系统是机械系统简化模型之一. Li^[1]建立了一种微振动成型机简化模型,研究系统两参数平面上周期运动分布的分布特征. Luo^[2]研究了具有对称弹性约束的两自由度碰撞系统,并设计了一种用于分析对称约束碰撞系统的电子电路. 李冠强等^[3]研究了双边碰撞 Duffing 振子的对称性和尖点分岔等. 李双宝等^[4]分析了非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展. 吕小红^[5]研究了碰撞—渐进振动系统的亚谐振动与分岔. 碰撞系统由于约束的存在,很多学者应用数值和解析的方法对系统周期运动的稳定性与分岔进行了大量研究. 陆启韶等^[6]提出了非光滑动力系统局部映射的方法,应用半解析法分析周期运动的稳定性和分岔. 徐慧东^[7]对分段光滑系统周期解的稳定性及擦边分岔进行了详细的研究和推导. 还有学者对分段光滑振动系统周期解提出了一种延拓算法,并给出了相应的计算实例^[8,9].

碰撞系统从无冲击到冲击状态的过渡会引起擦边现象,由擦边引起的动力学行为和分岔一直是这一领域的研究重点. Yue^[10]和 Kundu^[11]分别研究了四种可能的软碰撞系统的规范形映射在擦边轨道邻域内的特征. Humphries^[12]用不连续几何方法研究了碰撞振子的擦边分岔机理及擦边分岔附近的鞍结分岔. Jiang^[13]运用延拓追踪法研究了单自由度单侧弹性约束和刚性约束两种冲击振动模型的擦边分岔及其附近的光滑分岔.

碰撞系统在部分参数域内存在大量亚谐振动,表现出更为复杂的动力学特性,已有的研究报道对其分岔行为进行了大量研究,但是对分岔引起的失稳和转迁特征没有完全揭示. 本文以分段光滑机械振动系统为研究对象,对系统两参数平面上亚谐振动的模式及分布区域进行计算. 应用延拓打靶法追踪系统稳定与不稳定亚谐振动的分岔与转迁,详细分析了擦边邻域内的复杂分岔和高频亚谐包含域内的多吸引子共存及不连续分岔.

1 力学模型及运动微分方程

考虑图 1 所示的分段光滑机械振动系统的力学模型. 冲击振子的质量为 M ,被刚度为 K_1 的线性弹簧和阻尼系数为 C 的粘性阻尼器连接于固定支承,并且质块 M 受到一简谐激励 $P\sin(\Omega T)$ 的作用. 用刚度为 K_2 的线性弹簧表示弹性约束,质块

与右侧弹性约束的间隙为 B . X 表示质块 M 的位移. 引入无量纲参数: $x = K_1 X/P$, $b = K_1 B/P$, 令 $\mu_k = K_2/(K_1 + K_2)$, $\xi = C/(2\sqrt{K_1 M})$, $t = T\sqrt{K_1/M}$, $\omega = \Omega\sqrt{M/K_1}$. 则系统的无量纲运动微分方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x = \sin(\omega t) & x \leq b \\ \ddot{x} + 2\xi\dot{x} + x + \frac{u_k}{1-u_k}(x-b) = \sin(\omega t) & x > b \end{cases} \quad (1)$$

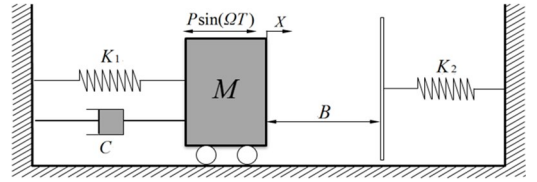


图 1 力学模型
Fig. 1 Mechanical model

当 $x \leq b$ 时,设解流形 $\phi_1(t)$ 在 t_0 时刻初值为 $z_0 = (x_0, \dot{x}_0)^T$ 则

$$\phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi(t-t_0)} \{a_1 \cos[\gamma_1(t-t_0)] + b_1 \sin[\gamma_1(t-t_0)]\} + A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t) \\ e^{-\xi(t-t_0)} \{(\gamma_1 b_1 - \xi a_1) \cos[\gamma_1(t-t_0)] - (\gamma_1 a_1 + \xi b_1) \sin[\gamma_1(t-t_0)]\} + A_1 \omega \cos(\omega t) - B_1 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

当 $x > b$ 时,设解流形 $\phi_2(t)$ 在 t_1 时刻初值为 $z_1 = (x_1, \dot{x}_1)^T$ 点出发,则

$$\phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-\xi(t-t_1)} \{a_2 \cos[\gamma_2(t-t_1)] + b_2 \sin[\gamma_2(t-t_1)]\} + A_2 \sin(\omega t) + B_2 \cos(\omega t) + kb \\ e^{-\xi(t-t_1)} \{(\gamma_2 b_2 - \xi a_2) \cos[\gamma_2(t-t_1)] - (\gamma_2 a_2 + \xi b_2) \sin[\gamma_2(t-t_1)]\} + A_2 \omega \cos(\omega t) - B_2 \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(2)和式(3)中, $\gamma_1 = \sqrt{1-\xi^2}$, $\gamma_2 = \sqrt{1/(1-\mu_k)-\xi^2}$, A_1, B_1 及 A_2, B_2 为振幅常数. a_1, b_1 及 a_2, b_2 是与初始条件相关的积分常数.

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 - A_1 \cos(\omega t_0) - B_1 \sin(\omega t_0) \\ b_1 &= [\dot{x}_0 + \xi a_1 + A_1 \omega \sin(\omega t_0) - B_1 \omega \cos(\omega t_0)]/\gamma_1 \\ a_2 &= x_1 - A_2 \cos(\omega t_1) - B_2 \sin(\omega t_1) - \mu_k \\ b_2 &= [\dot{x}_1 + \xi a_2 + A_2 \omega \sin(\omega t_1) - B_2 \omega \cos(\omega t_1)]/\gamma_2 \end{aligned} \quad (4)$$

2 系统的 Poincaré 映射

令 $z = (x, \dot{x})^T \in R^2$, 定义边界函数:

$$h(z) = x - b \quad (5)$$

由于弹性约束的存在,质块 M 存在两种工作状态,即与弹性约束接触或分离. 因此可将相空间划分为 $G_1 = \{(z, t) : h(z) < 0\}$ 和 $G_2 = \{(z, t) : h(z) > 0\}$ 两部分. 这两种工作状态在非光滑分界面 Σ_1 和 Σ_2 处进行切换. 可定义为:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{(z, t) : h(z) = 0, \dot{x} > 0\} \\ \Sigma_2 &= \{(z, t) : h(z) = 0, \dot{x} < 0\} \end{aligned} \quad (6)$$

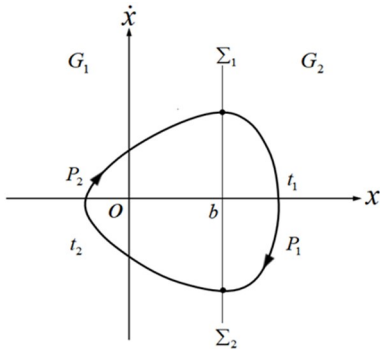


图 2 1/1 运动轨线
Fig. 2 Trajectory of 1/1 periodic motion

定义两个局部映射 $P_1 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ 和 $P_2 : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$. 在非光滑分界面上质块 M 运动状态切换,但区域 G_1 和 G_2 的向量场完全相等,因此其跳跃矩阵为单位阵^[7]. 用 p/n 区分周期运动类型,其中 n 表示力周期数, p 表示质块 M 与右侧约束接触次数. 设零时刻 1/1 运动的解流形从 Σ_1 出发,分别经过时间 t_1 和 t_2 穿越 G_2 和 G_1 区域返回 Σ_1 ,则其 Poincaré 映射可复合为 $P = P_2 \cdot P_1$. 复合映射 P 对应的 Jacobi 矩阵 $DP = DP_2 \times DP_1$, 而

$$DP_1 = \frac{\partial \phi_1(t)}{\partial z_0} \Big|_{t=t_1}, DP_2 = \frac{\partial \phi_2(t)}{\partial z_1} \Big|_{t=t_1+t_2} \quad (7)$$

在利用打靶法^[3,8]求得系统周期解的同时,可求得系统雅可比矩阵的特征值,应用 Floquet 理论可以判断周期运动的稳定性,结合延续算法可以研究系统分岔演化过程.

3 擦边邻域内的复杂分岔

为了研究系统亚谐振动的分岔特征,本文应用基于 Poincaré 映射的延拓打靶法^[8,9]及 Floquet 理论求解系统的共存周期解与稳定性. 通过仿真计算双参数 (ω, b) 平面系统的分岔图以确定亚谐振动的分布区域,进而分析系统亚谐振动的分岔与转

迁. 选取基本参数 $\mu_k = 0.9, \xi = 0.06$ 数值计算系统的双参数分岔图,如图 3 所示. 图中用不同颜色表示不同类型的 p/n 周期振动,未标注的黑色区域表示长周期或混沌运动. 图中,在 $p/1$ 和 $(p+1)/1$ 运动的参数域分界处存在很多 $(2p+1)/2$ 和 $2p/2$ 类亚谐波周期运动的小区域,为方便描述,称之为亚谐包含域. 下面以图 3 所示的亚谐包含域为研究对象,进行单参数延拓分岔分析.

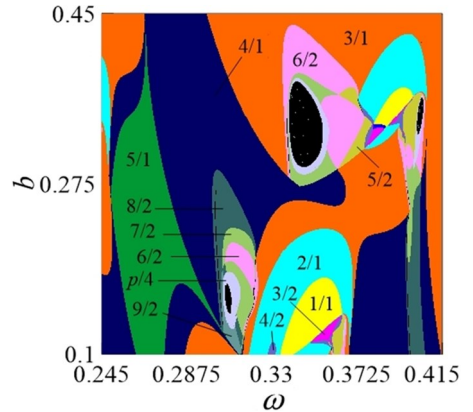


图 3 双参数分岔图
Fig. 3 Two-parameter bifurcation diagram

取间隙 $b = 0.36$, 延拓计算之前,首先在系统的状态空间选择一个考察区域 $\Omega = (x, \dot{x}) = (-2 \leq x \leq 1, -0.8 \leq \dot{x} \leq 0.8)$, 然后将状态平面 Ω 划分为 $100 \times 100 = 10\,000$ 个小网格. 以每个小网格的中心点为初始值应用打靶法计算系统的周期解,则共有 10 000 个初始值需要考察. 当 $\omega = 0.345$ 时,求得系统有 2 个不稳定的周期解,分别以每个周期解为初值进行延拓计算,结果如图 4(a)所示. 图中用品红色“◇”表示倍化分岔点(PD),蓝色“·”表示擦边分岔点(GR),红色“·”表示鞍结分岔点(SN),实线表示稳定周期解,虚线表示不稳定的周期解,用 Up/n 标注不稳定的 p/n 运动. 图 4(b)为数值计算的单参数分岔图,图 4(c)~(e)为图 4(a)的局部放大. 由图可知,该亚谐包含域内存在两种不稳定的基本周期振动,分别是 $U3/1$ 运动和 $U2/1$ 运动,两者通过擦边分岔相互转迁,通过倍化分岔改变稳定性. 在擦边分岔邻域内主要存在倍化分岔和鞍结分岔的不同组合,部分参数下还存在混沌运动.

由图 4(a)可见,该亚谐包含域的左边界为 $3/1$ 运动的周期倍化分岔曲线. 随 ω 增大, $3/1$ 运动通过倍化型擦边分岔(PD_1 - GR_1)转迁为 $7/2$ 运动,两分岔点间的间隔 $\Delta\omega = 0.001\,525\,49$. 即当 ω 增

加至 $\omega=0.336\ 598\ 87(\text{PD}_1)$ 时,3/1运动通过倍化分岔转迁为6/2运动,同时产生不稳定的U3/1运动,对应的Floquet乘子为 $(-1.000\ 01, -0.106\ 50)$.紧接着,6/2运动在 $\omega=0.338\ 124\ 36(\text{GR}_1)$ 时发生擦边分岔转迁为稳定的7/2运动.结合图4(a)、图4(b)可知,稳定的7/2运动经倍周期序列进入混沌,又经倍周期序列退出混沌转迁为7/2运动.在

此分岔过程中,7/2运动的两个倍化分岔点 PD_2 和 PD_3 之间,不稳定的U7/2运动和U3/1运动及倍周期序列运动或混沌运动共存.在 $\omega=0.345$ 时,系统中混沌运动与不稳定的U3/1运动及不稳定的U7/2运动共存,系统的相图和Poincaré映射图如图5(a)~(c)所示.进一步增大 ω ,7/2运动经连续的擦边分岔转迁为5/2运动.

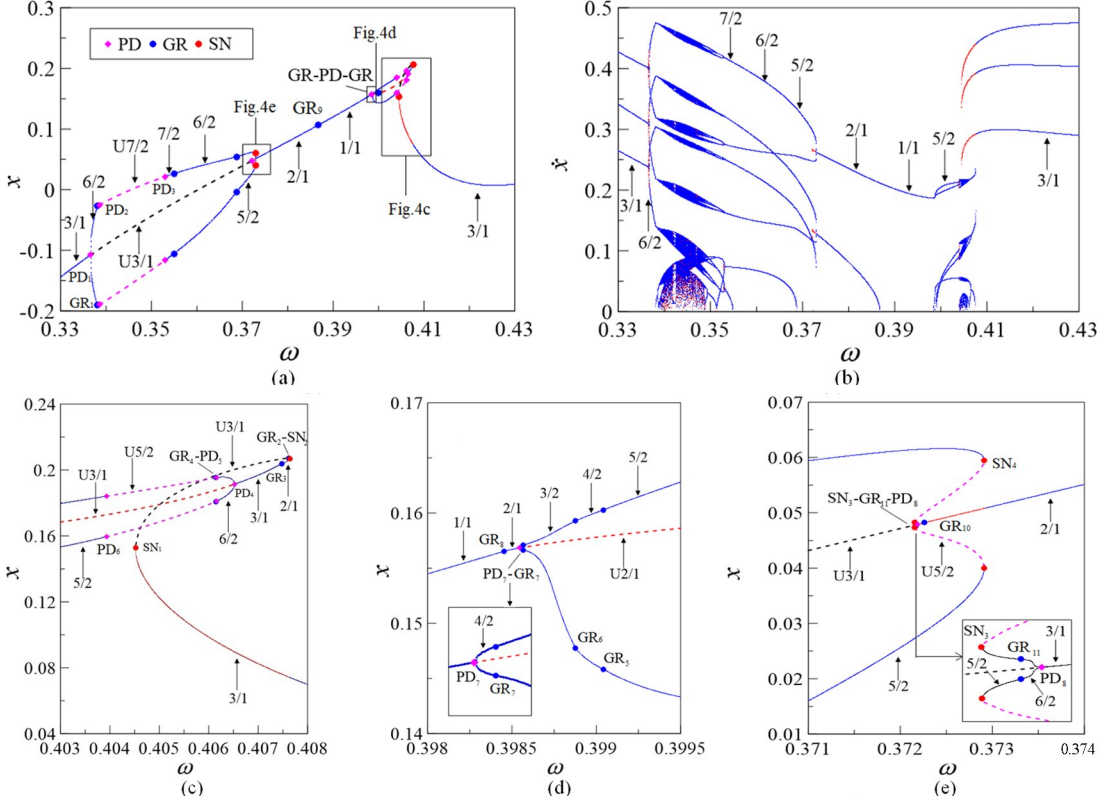


图4 $b=0.36$ 时系统随激励频率 ω 变化的分岔图及其局部放大
Fig. 4 Bifurcation diagram and local amplification of the system with excitation frequency ω when $b=0.36$

将图4(a)中 $\omega \in [0.403, 0.408]$ 局部放大,如图4(c)所示.该亚谐包含域的右边界形成迟滞域,多种周期运动共存.当 ω 减小至 $\omega=0.404\ 519\ 93(\text{SN}_1)$ 时,对应的Floquet乘子为 $(0.155\ 01, 0.999\ 99)$,3/1运动发生鞍结分岔跳跃到混沌运动.在 $\omega=0.406\ 524\ 21(\text{PD}_4)$ 时,减小 ω ,3/1运动经周期倍化分岔转迁为6/2运动.进一步减小 ω ,6/2运动经倍化型擦边分岔($\text{PD}_5\text{-GR}_4$)转迁为U5/2运动. PD_5 和 GR_4 间隔 $\Delta\omega=0.000\ 016\ 3$,不同于倍化型擦边分岔 $\text{PD}_1\text{-GR}_1$,这里的 GR_4 为不稳定周期运动的擦边分岔.当 $\omega=0.406\ 158\ 25(\text{PD}_5)$ 时,6/2运动经倍化分岔失稳,不稳定的U6/2在 $\omega=0.406\ 141\ 95(\text{GR}_4)$ 通过擦边分岔转迁为U5/2运动,随后U5/2运动在 PD_6 恢复稳定性.在 PD_5 和 PD_6 之间,不稳定的U3/1运动稳定性保持不变,分别与不稳定的U5/2

运动,U6/2运动及稳定的倍周期序列和混沌运动共存.当 $\omega=0.406\ 524\ 21(\text{PD}_4)$ 时,增大 ω ,不稳定的U3/1运动经倍化分岔恢复稳定.随后3/1运动经鞍结型擦边分岔($\text{SN}_2\text{-GR}_3$)而消失, SN_2 和 GR_3 两分岔点间隔 $\Delta\omega=0.000\ 163\ 94$,即在 $\omega=0.407\ 474\ 89(\text{GR}_3)$ 时3/1运动经擦边分岔转迁为2/1运动,而2/1运动在 $\omega=0.407\ 638\ 83(\text{SN}_2)$ 时经鞍结分岔而失稳,产生向 ω 减小方向弯曲的U2/1运动.减小 ω ,失稳后的U2/1运动在 $\omega=0.407\ 620\ 11(\text{GR}_2)$ 通过擦边分岔转迁为U3/1运动, SN_2 和 GR_2 两分岔点间隔 $\Delta\omega=0.000\ 018\ 72$.可见,在鞍结分岔点 SN_2 附近同时存在一个稳定周期运动的擦边分岔点 GR_3 和一个不稳定周期运动的擦边分岔点 GR_2 .进一步减小 ω ,不稳定的U3/1运动在 SN_1 处恢复稳定.在 SN_1 和 SN_2 之间形成的迟滞域内,多种类型的周期

运动共存. 在 $\omega = 0.405$ 时, 系统中有五种类型的运动共存, 包括一个稳定的周期运动 $3/1$, 三个不稳定的周期运动(两个 $U3/1$ 运动和 $U5/2$ 运动)和混沌运动, 其共存的相图和 Poincaré 映射如图 5(d)~(h) 所示. 图 6(a)~(c) 为 $b = 0.36$ 时系统共存周期解随

激励频率 ω 变化的吸引域, 倍周期序列的吸引域用黄色表示, 绿色区域为红色 $3/1$ 运动的吸引域. 由图可见, 随着 ω 减小, 蓝色 $3/1$ 运动发生周期倍化分岔之后, 吸引域的拓扑结构未发生变化, 只是面积有所增大.

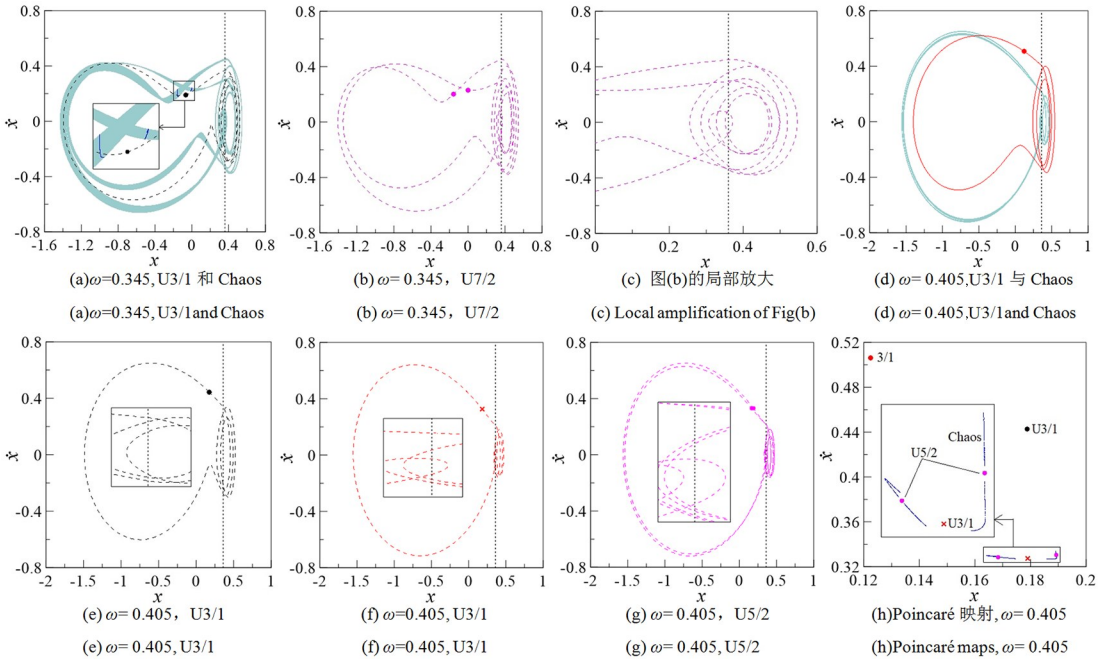


图 5 相图和 Poincaré 映射
Fig. 5 Trajectories and Poincaré maps

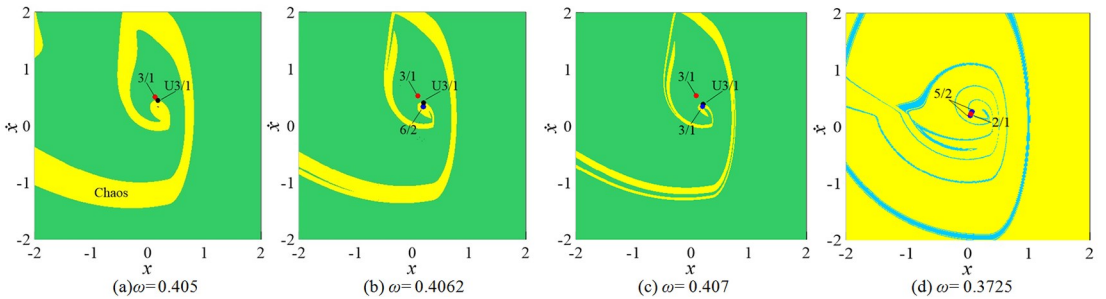


图 6 $b = 0.36$ 时随激励频率 ω 变化的吸引域
Fig. 6 Basins of attraction with excitation frequency ω when $b = 0.36$

局部放大图 4(a)中 $\omega \in [0.398, 0.3995]$, 如图 4(d) 所示. 由图可见, 随着 ω 增大, 在 $\omega = 0.39845492(\text{GR}_8)$ 时 $1/1$ 运动发生擦边分岔转迁为 $2/1$ 运动. 随后, $2/1$ 运动通过倍化型擦边分岔 (PD_7 - GR_7) 转迁为 $3/2$ 运动. 在 $\omega = 0.39854560(\text{PD}_7)$ 时 $2/1$ 发生倍化分岔转迁为 $4/2$ 运动, 同时产生不稳定的 $U2/1$ 运动, 分岔点对应的 Floquet 乘子 $(-0.99999, -0.15091)$. 在倍化分岔点附近, $\omega = 0.39856601(\text{GR}_7)$ 时, $4/2$ 运动发生擦边分岔转迁为 $3/2$ 运动. 进一步增大 ω , $3/2$ 运动在 $\omega = 0.39887752(\text{GR}_6)$ 又通过擦边分岔转迁回 $4/2$

运动, 紧接着又在 $\omega = 0.39904161(\text{GR}_5)$ 由 $4/2$ 运动擦边转迁为 $5/2$ 运动. 结合图 4(a) 可知, 在此分岔过程中不稳定的 $U2/1$ 运动稳定性不变, 从 PD_7 之后分别与其他稳定周期运动共存. 直至 $\omega = 0.40003806$ 时, 不稳定的 $U2/1$ 运动经擦边分岔转迁为不稳定的 $U3/1$ 运动.

当 $\omega < 0.39845492(\text{GR}_8)$ 时, 如图 4(a) 所示, 随着 ω 的减小, $1/1$ 运动在 $\omega = 0.38677508(\text{GR}_9)$ 发生擦边分岔转迁为 $2/1$ 运动. 进一步减小 ω , 如图 4(e) 所示, $2/1$ 运动在 $\omega = 0.37226382(\text{GR}_{10})$ 经过擦边分岔转迁为 $3/1$ 运动. 减小 ω 至 ω

$=0.372\ 183\ 10(\text{PD}_8)$ 时,对应的 Floquet 乘子为 $(-0.131\ 88, -0.999\ 99)$, $3/1$ 运动经倍化分岔转迁为 $6/2$ 运动,同时产生不稳定的 $U3/1$ 运动.当 $\omega = 0.372\ 173\ 58(\text{GR}_{11})$ 时, $6/2$ 运动经擦边分岔转迁为 $5/2$ 运动.继续减小 ω ,当 $\omega=0.372\ 153\ 86(\text{SN}_5)$ 时,对应的 Floquet 乘子为 $(0.017\ 39, 0.999\ 97)$, $5/2$ 运动经鞍结分岔失稳,且产生了沿 ω 增大方向弯曲的 $U5/2$ 运动,直至 $\omega=0.372\ 911\ 30(\text{SN}_4)$ 时, $U5/2$ 恢复稳定.在倍化分岔点 PD_8 产生了不稳定的 $U3/1$ 运动,且倍化分岔产生的稳定周期运动存在极短的区间(SN_3 和 PD_8 间隔 $\Delta\omega=0.000\ 029\ 24$)后跳跃到共存的 $5/2$ 运动,因此,该倍化分岔是亚临界周期倍化分岔(SN_3 - GR_{11} - PD_8).其本质是在倍化分岔点的极小邻域内发生鞍结分岔(SN_3),使系统响应发生跳跃和迟滞.由于亚临界周期倍化分岔的存在,不稳定的 $U5/2$ 连接上下两个共存的周期解分支,形成一个迟滞域.在迟滞域内稳定的 $5/2$ 运动及不稳定的 $U5/2$ 运动保持稳定性不变,分别和下解支的 $2/1$ 运动、 $3/1$ 运动、 $6/2$ 运动及 $5/2$ 运动共存.在 $\omega=0.3725$ 时 $2/1$ 运动和 $5/2$ 运动的吸引域如图 6(d)所示, $2/1$ 运动的吸引域由中心向外辐射,呈丝带状分布,对初值稍加扰动,系统可能跃迁到 $5/2$ 运动,而 $5/2$ 运动的吸引域面积大,分布集中,显然此时系统中 $5/2$ 运动的稳定性强于 $2/1$ 运动.

综上所述,在擦边分岔的邻域内发现主要存在倍化分岔和鞍结分岔,形成了倍化型擦边分岔(PD - GR)和鞍结型擦边分岔(SN - GR),还存在一种复杂的亚临界周期倍化分岔(SN - GR - PD),其实质为在周期倍化分岔的极小邻域内出现鞍结分岔或鞍结型擦边分岔.擦边分岔既可以是稳定周期运动的擦边也可以是不稳定周期运动的擦边.

4 高频亚谐包含域内的不连续分岔

高频小间隙参数域内, $0/1$ 运动和 $1/1$ 运动之间的亚谐包含域内存在大量共存吸引子,使得亚谐振动的转迁变得更为复杂.直接数值积分和延拓打靶法结合,对共存亚谐振动的转迁进行详细分析.

固定间隙 $b=0.3$,通过增加和减小参数直接数值积分计算系统分岔图,运用延拓打靶法,对亚谐包含域内共存的周期一运动、周期二运动和周期三运动进行延拓追踪,结果如图 7(a)所示,图 7(b)和图 7(c)为图 7(a)的局部放大.图中 BC 表示

混沌的边界激变,其余分岔点和符号标注与图 4(a)一致.

通过胞映射法和延拓打靶法在 SN_1 和 SN_2 之间,发现稳定和不稳定的周期三运动与 $1/1$ 运动共存,如图 7(a)、图 7(b)所示.增加 ω ,绿色的 $3/3$ 运动在 $\omega=1.951\ 157\ 72(\text{GR}_1)$ 处经擦边分岔转迁为 $2/3$ 运动,共存周期运动的相图和 Poincaré 映射如图 7(d)、图 7(e)所示.而 $2/3$ 运动在 $\omega=1.968\ 446\ 91[\text{SN}_2, \text{Floquet 乘子为}(0.316\ 91, 0.999\ 98)]$ 和不稳定的 $U2/3$ 运动重合后经鞍结分岔消失.当 ω 减小时, $3/3$ 运动在 $\omega=1.896\ 332\ 98[\text{SN}_1, \text{Floquet 乘子为}(0.303\ 42, 0.999\ 97)]$ 处和不稳定的 $U3/3$ 运动相重合,经鞍结分岔消失.由图 7(b)中局部放大可知,在 $\omega=1.911\ 794\ 90(\text{SN}_3)$ 和 $\omega=1.912\ 185\ 41(\text{SN}_4)$ 之间,一个非常狭小的参数区间($\Delta\omega=0.000\ 390\ 51$)内存在稳定的周期三运动,其分岔过程和绿色的 $3/3$ 运动相似.当 ω 增加时, $2/3$ 运动发生了鞍结型擦边分岔(GR_2 - SN_4)转迁为不稳定的 $U3/3$ 运动.当 ω 减小时, $2/3$ 运动在 SN_3 经鞍结分岔转迁为不稳定的 $U2/3$ 运动.不稳定的 $U3/3$ 连接 SN_1 和 SN_4 ,不稳定的 $U2/3$ 连接 SN_2 和 SN_3 ,因此在 SN_1 和 SN_2 之间形成多种类型周期运动共存.系统共存吸引子的吸引域如图 8(a)~(c)所示,其中吸引子的颜色与图 7(a)一致.品红色区域为黑色 $2/3$ 运动的吸引域,蓝色区域为绿色 $3/3$ 运动的吸引域,黄色区域为 $1/1$ 运动的吸引域.由图可见, $1/1$ 运动和 $3/3$ 运动的吸引域相互嵌套,而存在区间很小的黑色 $2/3$ 运动的吸引域缠绕在 $3/3$ 运动吸引域的边界处.随 ω 增加, $3/3$ 运动经擦边分岔(GR_1)转迁为 $2/3$ 运动,分岔前后的吸引域如图 8(b)、图 8(c)所示.由图可见, $1/1$ 运动吸引域的分布变得相对集中,而 $2/3$ 擦边前后吸引域的拓扑结构未发生突变,其吸引子与位于吸引域边界上的 $U2/3$ 吸引子逐渐靠近.

结合图 7(a)和图 7(c)可见, $0/1$ 运动在 $\omega=2.079\ 418\ 23(\text{GR}_4)$ 通过擦边分岔转迁为 $1/1$ 运动.进一步减小 ω , $1/1$ 运动发生了亚临界周期倍化分岔(SN_5 - GR_3 - PD_2)跳跃到 $2/2$ 运动.其本质为 $1/1$ 运动在 $\omega=2.078\ 591\ 09(\text{PD}_2)$ 通过倍化分岔[Floquet 乘子为 $(-0.695\ 82, -0.999\ 99)]$ 产生 $2/2$ 运动和不稳定的 $U1/1$ 运动. $U1/1$ 运动在 $\omega=2.024\ 864\ 82(\text{PD}_1)$ 经倍化分岔恢复稳定.而 $2/2$

运动在 $\omega=2.078\ 482\ 15(\text{GR}_3)$ 经擦边分岔转迁为 $1/2$ 运动. 随后 $1/2$ 运动又在 $\omega=2.078\ 273\ 20(\text{SN}_5)$ 经鞍结分岔[Floquet 乘子为 $(0.484\ 53, 0.999\ 98)$]失稳,产生向 ω 增大方向弯曲的 $\text{U}1/2$ 运动,直至 $\omega=2.845\ 888\ 40[\text{SN}_6]$,Floquet 乘子为 $(0.589\ 14, 0.999\ 98)$ 再次恢复稳定. 此时减小 ω , $1/2$ 运动在 $\omega=2.356\ 642\ 79(\text{PD}_3)$, Floquet 乘子为 $(-0.999\ 99, -0.527\ 42)$ 经倍化分岔转迁为

$2/4$ 运动. 在 $\omega=2.290\ 859\ 64(\text{GR}_5)$, $2/4$ 运动擦边转迁为 $3/4$ 运动,其相图和 Poincaré 映射如图 7(f) 所示. 进一步减小 ω , 周期运动经倍周期分岔序列进入混沌,在此分岔过程中, $0/1$ 运动的稳定性保持不变与分岔序列共存, $\omega=2.2$ 时系统共存的相图和 Poincaré 映射如图 7(g) 所示. 继续减小 ω , 混沌运动在一段参数区间内突然消失,又突然出现,最后经逆倍周期分岔退出混沌最终转迁为 $1/1$ 运动.

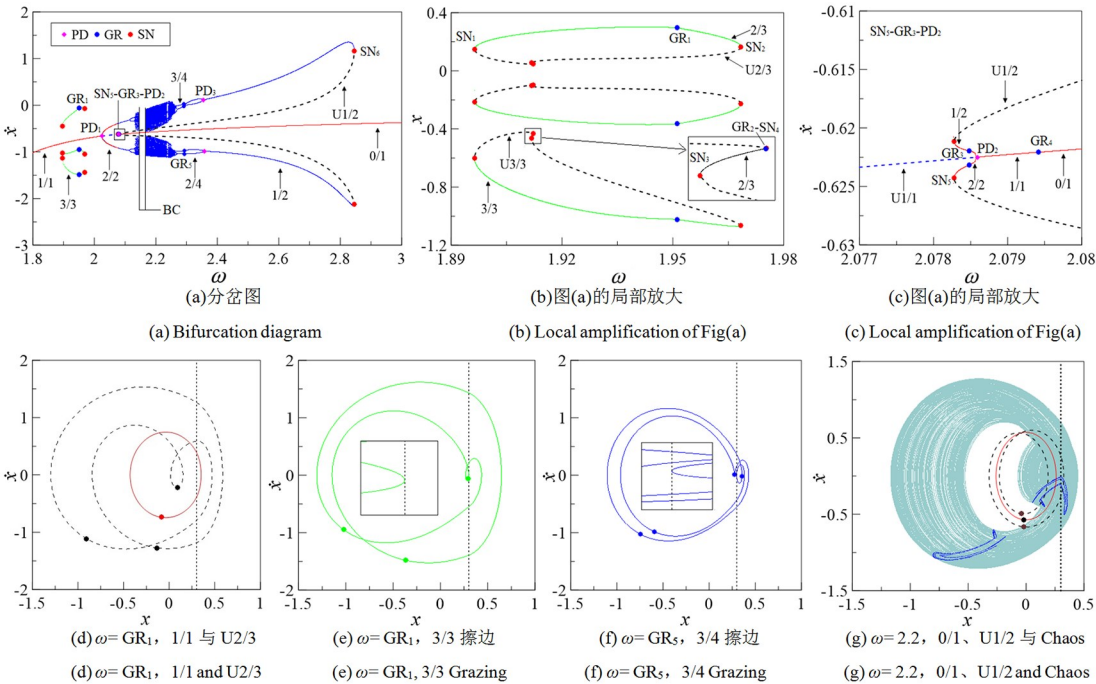


图 7 $b=0.3$ 时系统的响应, (a)~(c) 分岔图及其局部放大, (d)~(g) 相图和 Poincaré 映射

Fig. 7 Response of the system when $b=0.3$, (a)~(c) bifurcation diagram and local amplification, (d)~(g) trajectories and Poincaré maps

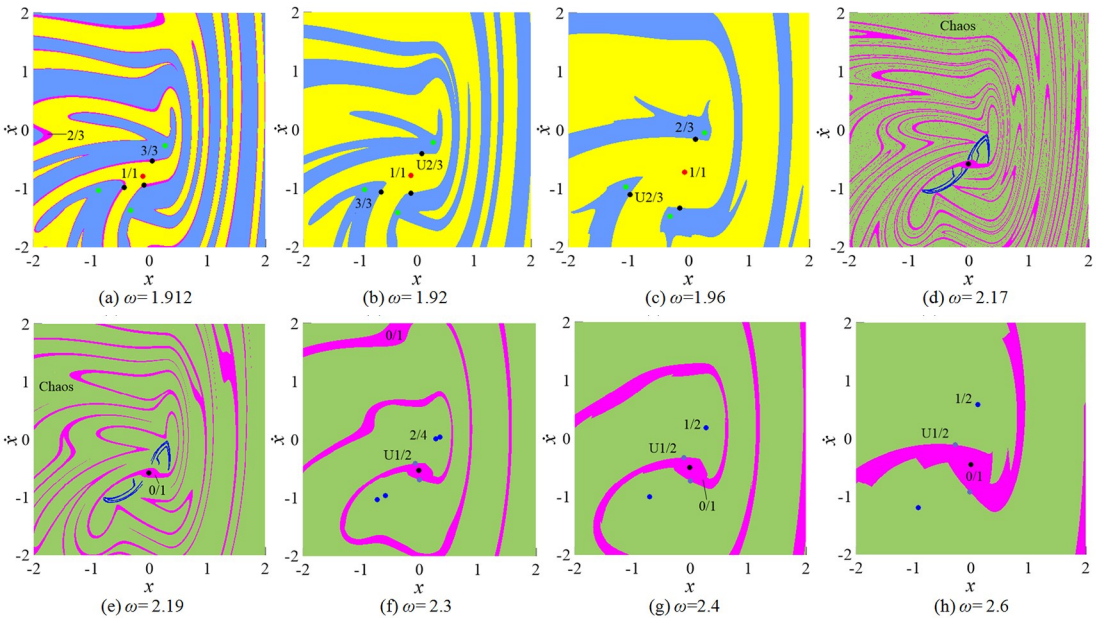


图 8 随激励频率 ω 变化的吸引域

Fig. 8 Basins of attraction with excitation frequency ω

在 SN_5 和 SN_6 之间多种类型的吸引子共存, 计算 $0/1$ 运动和倍周期分岔序列的吸引域, 如图 8(d)~(h)所示, 图中稳定吸引子的颜色与图 7(a)一致, 不稳定 $U1/2$ 吸引子用浅蓝色圆点标记. 浅绿色区域为倍周期序列吸引子的吸引域, 品红色区域为 $0/1$ 运动的吸引域. 由图可见, 随着 ω 减小, $0/1$ 运动的吸引域分布逐渐分散, 由中心向外辐射呈丝带状分布. 当 $1/2$ 运动经倍化分岔转迁为 $2/4$ 运动后, 吸引域形态未发生明显变化. 结合图 8(d)和图 8(e)可知, 继续减小 ω , 混沌吸引子与吸引域分形边界碰撞, 混沌运动发生边界激变之后突然消失, 因此在图 7(a)中可观察到混沌运动在特定区间消失.

5 结论

本文考虑了一种单自由度分段光滑机械振动系统, 应用延拓打靶法追踪系统共存周期解, 对系统亚谐振动的复杂分岔及转迁进一步研究, 得到了以下重要结论:

弹性碰撞振动系统中擦边分岔是连续可逆的, 但在擦边分岔的邻域内出现倍化分岔和鞍结分岔的不同组合会导致系统响应发生巨大差异.

亚谐包含域内倍化型擦边分岔普遍存在, 且倍化分岔和擦边分岔不会改变吸引域的拓扑结构. 鞍结型擦边分岔使系统响应产生迟滞和跳跃. 当不稳定周期运动分支连接两个不同模式的稳定周期运动分支时, 必然存在不稳定周期运动的擦边分岔. 混沌吸引子与吸引域分形边界碰撞产生边界激变, 导致混沌运动突然消失.

当倍化分岔邻域内出现鞍结型擦边分岔或鞍结分岔时, 该倍化分岔是亚临界周期倍化分岔, 使得系统倍化响应发生跳跃.

参考文献

[1] LI G F, WU S P, WANG H B, et al. Global behavior of a simplified model for the micro-vibration molding machine in parameter-state space [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 154: 104039.

[2] LUO T Q, WANG Z. Periodically forced system with symmetric motion limiting constraints: dynamic characteristics and equivalent electronic circuit re-

alization [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2016, 81: 283–302.

[3] 李冠强, 谢建华. 双边碰撞 Duffing 振子的对称性、尖点分岔与混沌[J]. 动力学与控制学报, 2021, 19(5): 1–7.

LI G Q, XIE J H. Symmetry, cusp bifurcation and chaos of the double-impact duffing oscillator [J]. Journal of Dynamics and Control, 2021, 19(5): 1–7. (in Chinese)

[4] 李双宝, 马茜茜, 张伟. 非光滑系统全局动力学 Melnikov 方法的研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(2): 9–20.

LI S B, MA X X, ZHANG W. Research progress in melnikov method for global dynamics of non-smooth systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(2): 9–20. (in Chinese)

[5] 吕小红. 碰撞—渐进振动系统的亚谐振动与分岔分析[J]. 中国机械工程, 2018, 29(4): 417–422+428.

LYU X H. Subharmonic vibrations and bifurcations of vibro-impact systems with progression [J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(4): 417–422+428. (in Chinese)

[6] 陆启韶, 金俐. 具有刚性约束的非线性动力系统的局部映射方法[J]. 固体力学学报, 2005, 26(2): 132–138.

LU Q S, JIN L. The local map method for non-smooth dynamical systems with rigid constraints [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2005, 26(2): 132–138. (in Chinese)

[7] 徐慧东. 非光滑动力系统周期解的分岔研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2008.

XU H D. Bifurcation of periodic solutions of non-smooth dynamical systems [D]. Chengdu: South-west Jiaotong University, 2008. (in Chinese)

[8] 张锦涛. 分段光滑机械振动系统共存周期解的稳定性与分岔[D]. 兰州: 兰州交通大学, 2022.

ZHANG J T. Stability and bifurcation of coexisting periodic solutions for A class of piecewise smooth mechanical vibration system [D]. Lanzhou: Lanzhou Jiatong University, 2022. (in Chinese)

[9] 张华彪, 张利娟, 李欣业, 等. 求解非线性振动周期解的参数延续打靶法[J]. 应用力学学报, 2020, 37(4): 1818–1822+1878.

ZHANG H B, ZHANG L J, LI X Y, et al. Parameter continuation-shooting method for the calculation of periodic solutions of nonlinear vibration [J]. Chi-

nese Journal of Applied Mechanics, 2020, 37(4): 1818–1822+1878. (in Chinese)

[10] MA Y, ING J, BANERJEE S, et al. The nature of the normal form map for soft impacting systems [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2008, 43(6): 504–513.

[11] KUNDU S, BANERJEE S, ING J, et al. Singularities in soft-impacting systems [J]. Physica D: Non-linear Phenomena, 2012, 241(5): 553–565.

[12] HUMPHRIES N, PIIROINEN P T. A discontinuity-geometry view of the relationship between saddle-node and grazing bifurcations [J]. Physica D: Non-linear Phenomena, 2012, 241(22): 1911–1918.

[13] JIANG H B, CHONG A S E, UEDA Y, et al. Grazing-induced bifurcations in impact oscillators with elastic and rigid constraints [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2017, 127: 204–214.