文章编号:1672-6553-2024-22(6)-011-005 DOI:10.6052/1672-6553-2023-127

非完整系统 Appell 方程的保辛算法研究*

张可心 解加芳†
(北方工业大学 理学院,北京 100144)

摘要 本文利用待定张量法对非完整系统 Appell 方程进行 Birkhoff 化,并根据生成函数的构造原理确定生成函数,给出 Birkhoff 辛格式,最后通过具体的 Appell 方程算例进行理论验证和仿真模拟,从一定程度上说明了保辛算法随着时间演变更具有效性和优越性.

关键词 非完整系统, Appell 方程, 保辛算法
中图分类号:O316 **文献标志码**:A

Research on Preserving Symplectic Algorithm for Appell Equations of Nonholonomic Systems*

Zhang Kexin Xie Jiafang†
(College of Science, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

Abstract In this paper, the undetermined tensor method is used to Birkhoffize the Appell equation for a nonholonomic system. The generating functions are obtained according to the construction principle of generating functions, and then a Birkhoff symplectic scheme is given. Finally, a specific example of Appell equation is provided to verify the above theory and simulate this example. The results show that the preserving algorithm is more effective and superior with the evolution of time.

Key words nonholonomic system, Appell equation, preserving symplectic algorithm

引言

Appell 方程[1,2]最早可以追溯到 1899 年法国数学家 Appell 的著作《理性力学》,这个方程不仅适用于完整系统,而且适用于非完整力学系统[3]. 20 世纪八十年代,我国著名学者梅凤翔教授在《高等分析力学》一书中,把力学系统[4]十多种形式的运动微分方程划分为三大体系,Appell 体系成为了分析力学理论中的三大力学体系之一,Appell 方程也成为非完整力学系统中独具特色的一类方程. 多年来,我国学者对非完整系统中一阶 Nielsen 方程、Lagrange 方程的研究以及应用等方面取得了较多的成果,但针对非完整系统中高阶 Appell 方程的算法研究工作相对较少,这对于非完整力学系统的理论研究成果在实际问题中的应用有较大的影响.

关于 Birkhoff 系统动力学的研究是分析动力学中一个比较重要的研究方向.在分析动力学中,Birkhoff 系统动力学是以 Birkhoff 方程和 Pfaff-Birkhoff 原理[5]为基础建立起来的,是对 Hamil-

2023-11-15 收到第 1 稿,2023-12-21 收到修改稿.
* 国家自然基金资助项目(12172003), National Natural Science Foundation of China (12172003).
† 通信作者 E-mail:jia3409457@126.com

ton系统动力学的推广[6]，完整系统和非完整系统一般都能通过各种形式进行Birkhoff化.因此，利用Birkhoff函数研究高阶带有非完整约束动力学系统的保结构算法具有重要的实际意义.本文以Appell方程作为研究对象，采用待定张量法[7]对该方程进行Birkhoff化，求解出满足条件的协变分量，得到Birkhoff函数和Birkhoff函数组，其次根据生成函数的构造原理[8]确定生成函数，确定Appell方程的Birkhoff辛格式[9]，最后通过算例验证上述理论分析的正确性，分别采用Runge-Kutta方法和Birkhoff辛算法对其进行数值模拟计算[10]，发现Birkhoff辛算法在长期跟踪后更加准确.

1 非完整系统的高阶Appell方程的Birkhoff化

设力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,\cdots,n)$确定，系统受到g个理想m阶非完整约束：

$$\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}=\varphi_\beta(q_s,\dot{q}_s,\cdots,\overset{(m-1)}{q}_s,\overset{(m)}{q}_\sigma,t)$$
$$\begin{pmatrix}\beta=1,\cdots,g;\varepsilon=n-g;\sigma=1,\cdots,\varepsilon;\\ s=1,\cdots,n;m=0,1,2,\cdots\end{pmatrix}\tag{1}$$

根据万有D' Alembert原理可以得到该力学系统的Appell方程[11]：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\overset{(m-2)}{S}}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial\overset{(m-2)}{S}}{\partial\overset{(m)}{q}_{\varepsilon+\beta}}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}=\widetilde{Q}_\sigma\\&\widetilde{Q}_\sigma=Q_\sigma+\sum_{\beta=1}^{g}Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\overset{(m)}{q}_\sigma}\end{aligned}\right.,(m\geqslant 2)\tag{2}$$

其中S为加速度能量，Q_σ为广义力.

又非自治的Birkhoff方程具有下述形式[11,12]：

$$K_{\mu v}(t,z)\dot{z}^\mu-\left(\frac{\partial B(t,z)}{\partial z^\mu}+\frac{\partial F_\mu(t,z)}{\partial t}\right)=0,\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{3}$$

在上式中$K_{\mu v}$为Birkhoff张量，可以表示为[13]

$$K_{\mu v}=\frac{\partial F_v}{\partial z^\mu}-\frac{\partial F_\mu}{\partial z^v},(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{4}$$

针对上述高阶Appell方程进行Birkhoff化，首先需要将其化为标准的一阶形式[14]：

$$\dot{z}^\mu-\sigma^\mu(z,t)=0\ (\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{5}$$

令

$$x_s=q_s,x_{n+s}=\dot{q}_s,\cdots,x_{(m-1)n+s}=\overset{(m-1)}{q}_s,\quad(s=1,\cdots,n)\tag{6}$$

$$z^\nu=x_\nu,\sigma^s=x_{n+s},\cdots,\sigma^{(m-2)n+s}=x_{(m-1)n+s},$$
$$\sigma^{(m-1)n+s}=h_s,\ (s=1,\cdots,n)\tag{7}$$

可以得到：

$$\dot{z}^\nu=\sigma^\nu,\ (\nu=1,2,\cdots,mn)\tag{8}$$

由于Birkhoff系统中变量z^μ的个数只能为偶数，当变量个数为奇数时，需要增加一个方程：

$$\dot{z}^0=1\text{ 或 }z^0=t\tag{9}$$

其次，根据

$$\frac{\partial K_{\mu v}}{\partial t}+\frac{\partial K_{\mu v}}{\partial z^\rho}+K_{\mu\rho}\frac{\partial\sigma^\rho}{\partial z^v}-K_{v\rho}\frac{\partial\sigma^\rho}{\partial z^\mu}=0\tag{10}$$

可以列出m个以待定分量$K_{\mu v}$为未知函数的一阶线性偏微分方程，并由此解出一组满足条件的协变分量$K_{\mu v}$，同时还要求$\det(K_{\mu v})\neq 0$.

式(3)中的Birkhoff函数组F_μ可以由下面两种方法求得：

(1) 利用Santilli第二方法[14]

$$F_\mu(z,t)=\left[\int_0^1\tau K_{\mu v}(\tau z,t)\mathrm{d}\tau\right]z_v\tag{11}$$

(2) 当$\mu<v$时，Birkhoff函数组$F_\mu=-K_{\mu v}z^v$

当$\mu=v$时，Birkhoff函数组$F_\mu\equiv 0$ (12)

式(3)中的Birkhoff函数B可以按照Cauchy-Kovalevskaya方程构造[15-17]：

$$\frac{\partial B(z,t)}{\partial z^\mu}=K_{\mu v}(z,t)\sigma^\mu-\frac{\partial F_\mu(z,t)}{\partial t},\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{13}$$

对其分别进行积分并整理，可以得到Birkhoff函数B.

最后，由于Birkhoff方程总是自伴随的，则需要验证B和F_μ是否满足自伴随条件[18]：

$$K_{\mu v}+K_{v\mu}=0\tag{14a}$$

$$\frac{\partial K_{\mu v}}{\partial z^\tau}+\frac{\partial K_{v\tau}}{\partial z^\mu}+\frac{\partial K_{\tau\mu}}{\partial z^v}=0\tag{14b}$$

$$\frac{\partial K_{\mu v}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z^\mu}\left(\frac{\partial B}{\partial z^v}+\frac{\partial F_v}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial z^v}\left(\frac{\partial B}{\partial z^\mu}+\frac{\partial F_\mu}{\partial t}\right)\tag{14c}$$

2 Appell方程的广义辛差分格式

假设存在一个带参数的可微映射$h:\beta\mapsto\hat{\beta}=g(\beta,t,t_0)$，当其满足下面条件

$$\left(\frac{\partial g}{\partial\beta}\right)^T K[g(\beta,t,t_0),t]\frac{\partial g}{\partial\beta_i}=K(\beta,t_0)\tag{15}$$

并假定Birkhoff系统的一个离散的相流为$\beta_{i+1}=$

$\Phi(\beta_i, t_i)$,则可以将 Birkhoff 辛映射定义为

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i}\right)^T K(\beta_{i+1}, t_{i+1}) \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_i} = K(\beta_i, t_i) \tag{16}$$

如果上述相流决定的 Φ 能够保持离散的 $K(\beta, t)$ 辛格式,那么这种离散格式被称为 Birkhoff 方程的保辛算法.

生成函数法是现在比较成熟的一种保辛算法,生成函数的构造定理为:设 $\beta \to \beta' = h(\beta, t, t_0)$:$R^{2n} \to R^{2n}$ 是一个辛映射,其 Jacobi 矩阵可以表示为 $h_\beta(\beta, t, t_0) = U(\beta, t, t_0)$,如果 U 可以满足横截条件 $|C_\gamma U + D_\gamma| \neq 0$,则存在梯度映射 $\varphi \to \varphi' = g(\varphi, t, t_0)$,其 Jacobi 矩阵可以表示为 $g_\varphi(\varphi, t, t_0) = V(\varphi, t, t_0)$,并且是对称的,还存在一个生成函数 $\phi(\varphi, t, t_0)$,使得

$$\begin{aligned} & g(\varphi, t, t_0) = \phi_\varphi(\varphi, t, t_0) \\ & \varphi_1[h(\beta, t, t_0), \beta, t, t_0] \\ & = g\{\varphi_2[h(\beta, t, t_0), \beta, t, t_0], t, t_0\} \end{aligned} \tag{17}$$

根据上述构造定理,设 R^{4n} 上存在自身到自身的一个带有参数 t 和 t_0 的可逆映射,此映射为:

$$\alpha(t, t_0): \begin{pmatrix} \beta' \\ \beta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(\beta', \beta, t, t_0) \\ \alpha_2(\beta', \beta, t, t_0) \end{pmatrix} \tag{18}$$

映射 α 的映射矩阵为:

$$\boldsymbol{\alpha}_*(\beta', \beta, t, t_0) = \begin{pmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ C_\alpha & D_\alpha \end{pmatrix} \tag{19}$$

映射 α 需要将一个 $\widetilde{K}$-Lagrange 子流形映射到一个 J_{4n}-Largange 子流形,当且仅当

$$\boldsymbol{\alpha}_*^{\mathrm{T}} \widetilde{J}_{4n} \boldsymbol{\alpha}_* = \begin{pmatrix} K(\beta', t) & 0 \\ 0 & -K(\beta, t_0) \end{pmatrix} \tag{20}$$

为了计算方便,我们令 $B_\alpha = 0, C_\alpha = 0$,从而可以计算出 A_α, D_α.

根据

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \varphi'}{\partial \beta'} \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_1(\beta', \beta, t, t_0) \\ &= A_\alpha K^{-1}\left(-\frac{\partial B}{\partial z^\mu} - \frac{\partial F_\mu}{\partial t}\right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial t} \end{aligned} \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\alpha_2(\beta', \beta, t, t_0) \\ &= C_\alpha K^{-1}\left(-\frac{\partial B}{\partial z^\mu} - \frac{\partial F_\mu}{\partial t}\right) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{21b}$$

因此,$\varphi, \varphi', \alpha_1, \alpha_2$ 可以求出.

利用生成函数 $\phi(\omega, t, t_0) = \alpha(t, t_0)$,可以构造广义 Birkhoff 辛格式.对步长 $\tau > 0$ 取一个适当的值,令

$$\psi_\varphi^{(m)}(\varphi, t_0 + \tau, t_0) = \sum_{i=0}^{m} \tau^i \phi_\varphi^{(i)}(\varphi, t_0), \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{22}$$

从而得到一个有 m 阶精度的 $K(\beta, t)$-辛离散格式,使得

$$\begin{aligned} & \beta = \beta^k \to \beta^{k+1} = \beta' \\ & \alpha_1(\beta^{k+1}, \beta^k, t_{k+1}, t_k) \\ & = \psi_\omega^{(m)}[\alpha_2(\beta^{k+1}, \beta^k, t_{k+1}, t_k), t_{k+1}, t_k] \end{aligned} \tag{23}$$

3　算例

已知某系统的加速度能量为:

$$S = \frac{1}{2}(\ddot{q}_1^2 + \ddot{q}_2^2) \tag{24}$$

且该系统受到的非完整约束为:

$$\ddot{q}_2 = t\ddot{q}_1 - \dot{q}_1 \tag{25}$$

在此我们考虑 $Q_1 = 0, Q_2 = \dot{q}_1$ 的情况,可以由式(2)得到该系统的 Appell 方程:

$$(t^2 + 1)\ddot{q}_1 - 2t\dot{q}_1 = 0 \tag{26}$$

对其求解,可以得到:

$$q_1 = \frac{-t^3 - 3t + 3}{3}, q_2 = -\frac{t^4}{12} + \frac{t^2}{2} + t + 1 \tag{27}$$

首先,令

$$z^1 = q_1, z^2 = q_2, z^3 = \dot{q}_1, z^4 = \dot{q}_2 \tag{28}$$

则该 Appell 方程可以表为一阶标准形式:

$$\begin{aligned} & \dot{z}^1 = z^3, \dot{z}^2 = z^4, \\ & \dot{z}^3 = \frac{2tz^3}{(1+t^2)}, \dot{z}^4 = t\dot{z}^3 - z^3. \end{aligned} \tag{29}$$

其次,设 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu v}$ 为:

$$\boldsymbol{K}_{\mu v} = \begin{bmatrix} 0 & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ -K_{12} & 0 & K_{23} & K_{24} \\ -K_{13} & -K_{23} & 0 & K_{34} \\ -K_{14} & -K_{24} & -K_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

其中,$\Omega_{\mu v}$ 为待定分量,根据式(10)可以列出常微分方程组:

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}K_{12}}{\mathrm{d}t} = 0, \ \frac{\mathrm{d}K_{13}}{\mathrm{d}t} - K_{14} = 0, \ \frac{\mathrm{d}K_{14}}{\mathrm{d}t} + K_{12} = 0, \\ & \frac{\mathrm{d}K_{23}}{\mathrm{d}t} - K_{24} = 0, \ \frac{\mathrm{d}K_{24}}{\mathrm{d}t} = 0, \\ & \frac{\mathrm{d}K_{34}}{\mathrm{d}t} + K_{14} - K_{23} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

解上述常微分方程组可得:

$$\begin{aligned} & K_{12} = -1, \quad K_{13} = \frac{1}{2}t^2, \quad K_{14} = t, \\ & K_{23} = t, \quad K_{24} = 1, \quad K_{34} = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

则 Birkhoff 张量为：

$$\boldsymbol{K}_{\mu v}=\begin{bmatrix}0 & -1 & \dfrac{t^2}{2} & t\\ 1 & 0 & t & 1\\ -\dfrac{t^2}{2} & -t & 0 & 0\\ -t & -1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{33}$$

最后，Birkhoff 函数组可以按照式(12)进行构造：

$$\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\\F_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -K_{12} & -K_{13} & -K_{14}\\ 0 & 0 & -K_{23} & -K_{24}\\ 0 & 0 & 0 & -K_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z^1\\z^2\\z^3\\z^4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}z^2-\dfrac{1}{2}t^2z^3-tz^4\\ -tz^3-z^4\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{34}$$

并将求出的 F_μ 和已知的 Birkhoff 张量 $\boldsymbol{K}_{\mu v}$ 代入式(13)中，得到：

$$\frac{\partial B}{\partial z^1}=\frac{2t^3-t}{(1+t^2)}z^3,\ \frac{\partial B}{\partial z^2}=-\frac{5t^2+1}{(1+t^2)}z^3,$$

$$\frac{\partial B}{\partial z^3}=-\frac{1}{2}t^2z^3-tz^4,\ \frac{\partial B}{\partial a^4}=-tz^3-z^4. \tag{35}$$

对上述式子分别进行积分并整理，可以得到：

$$B=-t^2(z^3)^2-\frac{(z^4)^2}{2}+\frac{2t^3-t}{(1+t^2)}z^1z^3+\frac{5t^2+1}{(1+t^2)}z^2z^3-tz^3z^4 \tag{36}$$

通过验证，上面求出的 F_μ 和 B 都满足自伴随条件式(14).因此，根据式(1)可以将该系统的 Appell 方程化为 Birkhoff 形式：

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & \dfrac{t^2}{2} & t\\ 1 & 0 & t & 1\\ -\dfrac{t^2}{2} & -t & 0 & 0\\ -t & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-t^2+1\\ -2t\\ -\dfrac{t^3}{3}+t+1\\ -t^2+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\dfrac{t^5}{6}-\dfrac{t^3}{2}+\dfrac{t^2}{2}+3t\\ -\dfrac{t^4}{3}-t^2+t+2\\ \dfrac{t^4+3t^2}{2}\\ t^3+t\end{bmatrix} \tag{37}$$

我们对该题采用二阶 Runge-Kutta 法与辛算法进行计算，为了说明两种数值之间的差别，我们通过比较两种数值方法计算所得数值解和精确解之间的相对误差. 同时，为了计算更加方便我们将初始值设为：$q_1(0)=1$，$q_2(0)=1$，并令 $C_1=C_3=C_4=1$，$C_2=-1$，在计算过程中，我们取步长为 $\tau=0.0001$，通过图 1 的比较，可以清楚地发现在长期跟踪下，Birkhoff 辛算法的数值结果更加精确，误差也更小，因此，保辛算法与传统 Runge-Kutta 法经过比较，Birkhoff 算法更加具有优越性.

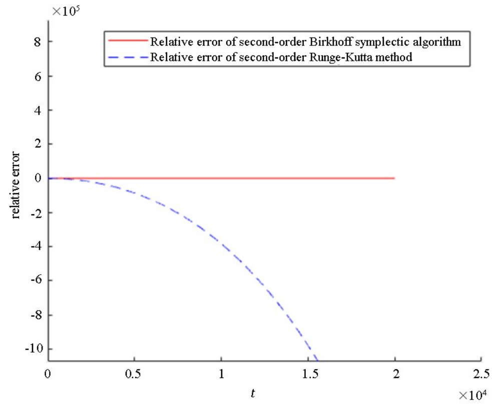

图 1　Birkhoff 辛算法和二阶 Runge-Kutta 算法相对误差对比图

Fig.1　Comparison of relative errors of Birkhoff symplectic algorithm and second-order Runge-Kutta method

4　结论

本文以高阶非完整 Appell 方程作为研究对象，利用待定张量法对其进行 Birkhoff 化，构造出 Birkhoff 函数并确定了 Birkhoff 函数组，根据生成函数的构造原理确定生成函数，进而给出了 Appell 方程的 Birkhoff 辛格式.通过对高阶带有非完整约束的 Appell 方程的算例仿真，发现 Birkhoff 保辛算法的误差更小，更加具有优越性.

参考文献

[1] APPELL P. Traitè de Mécanique Rationnelle [M]. Paris: Gauthier-Villars, 1953.

[2] 张毅，蔡锦祥. 事件空间中非完整力学系统的 Herglotz-d' Alembert 原理与守恒律[J]. 动力学与控制学报，2022，20(2)：15－21.

ZHANG Y, CAI J X. Herglotz-d'alembert principle and conservation law for nonholonomic mechanical systems in event space [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(2): 15－21. (in Chinese)

[3] 梅凤翔. 关于 Appell 方程：分析力学札记之二十八

[J]. 力学与实践，2016，38(3)：310－316.

[4] LIU S X，LIU C，HUA W，et al. Generalized Birkhoffian representation of nonholonomic systems and its discrete variational algorithm [J]. Chinese Physics B，2016，25：114501.

[5] 宋端，崔金超，刘世兴，等. 高阶非完整系统的广义 Birkhoff 表示[J]. 动力学与控制学报，2013，11(2)：97－101.

SONG D，CUI J C，LIU S X，et al. Generalized birkhoffian representation of high-order nonholonomic systems [J]. Journal of Dynamics and Control，2013，11(2)：97－101. (in Chinese)

[6] 傅景礼，郑世旺. 相对论性约束力学系统的 Birkhoff 表示[J]. 云南大学学报(自然科学版)，2000，22(3)：194－198.

FU J L，ZHENG S W. Birkhoff's representation of relativistic holonomic constraint mechanical systems [J]. Journal of Yunnan University (Natural Sciences)，2000，22(3)：194－198. (in Chinese)

[7] 崔金超，宋端，郭永新. 构造 Birkhoff 函数(组)的待定张量法[J]. 物理学报，2012，61(24)：324－330.

CUI J C，SONG D，GUO Y X. The method of undetermined tensor for constructing Birkhoffian functions [J]. Acta Physica Sinica，2012，61(24)：324－330.(in Chinese)

[8] SU H L，QIN M Z. Symplectic schemes for birkhoffian system [J]. Communications in Theoretical Physics，2004，41(3)：329.

[9] 苏红玲，秦孟兆. 微分方程的广义辛算法[M]. 北京：北京大学出版社，2015.

SU H L，QIN M Z. Generalized symplectic algorithms for differential equations [M]. Beijing：Peking University Press，2015.(in Chinese)

[10] 解加芳，庞硕，邹杰涛，等. 非完整系统 Boltzmann-Hamel 方程的 Birkhoff 化及其广义辛算法 [J]. 物理学报，2012，61(23)：1－5.

XIE J F，PANG S，ZOU J T，et al. The Borkhoffian expression of Boltzmann-Hamel equation of nonholonomic system and its generalized symplectic geometric algorithm [J]. Acta Physica Sinica，2012，61(23)：1－5.(in Chinese)

[11] 梅凤翔. 非完整系统力学基础 [M]. 北京：北京工业学院出版社，1985.

[12] 张毅. 关于 Mei 对称性与 Noether 对称性的关系——以 Birkhoff 系统为例[J]. 动力学与控制学报，2016，14(1)：26－30.

ZHANG Y. Relation between the Mei symmetry and the Noether symmetry—taking the Birkhoff system as an example [J]. Journal of Dynamics and Control，2016，14(1)：26－30.(in Chinese)

[13] SANTILLI R M. Foundations of theoretical mechanics II [M]. Berlin，Heidelberg：Springer Berlin Heidelberg，1983.

[14] 梅凤翔. 广义 Birkhoff 系统动力学[M]. 北京：科学出版社，2013.

[15] 邱志平，姜南. 力学数值计算中的保辛算法[M]. 北京：科学出版社，2023.

[16] 崔金超，陈漫，廖翠萃. 关于 Birkhoff 逆问题中 Santilli 方法的研究[J]. 物理学报，2018，67(5)：18－26.

CUI J C，CHEN M，LIAO C C. On Santilli's methods in Birkhoffian inverse problem [J]. Acta Physica Sinica，2018，67(5)：18－26. (in Chinese)

[17] 张毅. 时间尺度上约束 Birkhoff 系统的 Noether 对称性与守恒量[J]. 动力学与控制学报，2019，17(5)：482－486.

ZHANG Y. Noether symmetries and conserved quantities of constrained birkhoffian systems on time scales [J]. Journal of Dynamics and Control，2019，17(5)：482－486. (in Chinese)

[18] 丁光涛. Birkhoff 系统 Noether 逆定理的解法[J]. 动力学与控制学报，2010，8(2)：100－104.

DING G T. The solutions for Noether's inverse theorem of Birkhoffian system [J]. Journal of Dynamics and Control，2010，8(2)：100－104. (in Chinese)