

高速列车转向架蛇行运动 Hopf 分岔控制研究^{*}

文敬涵 曾京[†] 毛冉成

(西南交通大学 轨道交通运载系统全国重点实验室, 成都 610031)

摘要 转向架蛇行运动稳定性直接决定高速列车能否安全和平稳运行,采用主动悬挂技术是提高稳定性的有效途径,但目前针对采用主动控制后的转向架蛇行运动 Hopf 分岔机理和稳定性演变规律的研究还十分缺乏.本文基于高速列车转向架摇头反馈控制下的蛇行运动 Hopf 分岔特性展开研究.建立包含转向架横移、摇头和车体横移的三自由度简化模型,采用作动器替代现有的抗蛇行减振器提供转向架摇头控制力矩,分别选取转向架摇头角位移和角速度作为状态反馈量,设计线性反馈控制器,并通过 Matcont 仿真环境实现 Hopf 分岔和极限环计算.研究表明:对比被动悬挂的分岔特性,转向架摇头角位移和角速度两种主动控制方式均能延后蛇行运动 Hopf 分岔点,即提高系统线性临界速度;摇头角速度控制能降低蛇行运动频率和分岔后极限环幅值;摇头角位移控制会增大蛇行运动频率,而极限环幅值无明显改变.因此,通过引入转向架摇头控制并选取合适控制增益,能够有效提高高速转向架蛇行运动稳定性.

关键词 高速列车, 转向架, 蛇行运动稳定性, 主动控制, Hopf 分岔

中图分类号:U270.1+1

文献标志码:A

Research on Hopf Bifurcation Control of Bogie Hunting Motion of High-Speed Trains^{*}

Wen Jinghan Zeng Jing[†] Mao Rancheng

(State Key Laboratory of Rail Transit Vehicle System, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract The bogie hunting stability directly determines the safe and smooth operation of the train at high speed. The use of active suspension technologies is an efficient way to improve the stability. At present, there is lack of research on the Hopf bifurcation mechanism and stability evolution of bogie hunting motion with applying active control. Hence, the Hopf bifurcation characteristics of hunting motion under the bogie yaw feedback control is studied. A three-degree-of-freedom simplified vehicle model including lateral and yaw motions of the bogie and lateral motion of the carbody is established. The actuator is adopted to replace the existing anti-hunting damper to provide the bogie yaw control torque. The bogie yaw angular displacement and angular velocity are taken as the state feedbacks and design the linear feedback controller. The Hopf bifurcation and limit cycle calculations are realized by using Matcont simulation. The results show that, compared with the bifurcation characteristics of passive suspension, the Hopf bifurcation points can be delayed by introducing two active control methods for bogie yaw angular displacement and velocity, i. e., the linear critical speed of the system is increased. The amplitude of limit cycle and the frequency of hunting motion decrease under the control of bogie yaw angular velocity. While under the control of bogie yaw angular displacement, the frequency of hunting motion increases, and the amplitude of limit cycle has no obvious change. Therefore, under the reasonable selection of con-

2023-09-11 收到第 1 稿,2023-10-04 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金项目资助项目(U2034210), National Natural Science Foundation of China(U2034210).

[†] 通信作者 E-mail:zeng@swjtu.edu.cn

control gain, the use of bogie yaw control can effectively improve the hunting stability of high-speed bogie.

Key words high-speed train, bogie, hunting stability, active control, Hopf bifurcation

引言

蛇行运动是铁道车辆转向架特有的自激振动,其运动稳定性决定了列车服役过程中的最高运行速度.转向架蛇行失稳将显著恶化车辆的运行平稳性和安全性,甚至引发脱轨事故等^[1].蛇行运动具有分岔特性,是车辆系统非线性动力学研究中所关注的重要现象.由于车辆系统具有强非线性,其蛇行运动分岔非常复杂,但基本形式包含以下三种^[2],图1(a)、图1(b)为超临界 Hopf 分岔,图1(c)为亚临界 Hopf 分岔;图中实线表示稳定平衡位置和极限环,虚线则表示不稳定. Hopf 分岔点 A 的车速定义为线性临界速度,为系统的理想临界速度;点 B 为非线性临界速度点,在车速小于 B 点之前,车辆系统是绝对稳定的.车辆在实际轨道上的临界速度通常位于 v_B 和 v_A 之间,见图1(b)、图1(c).

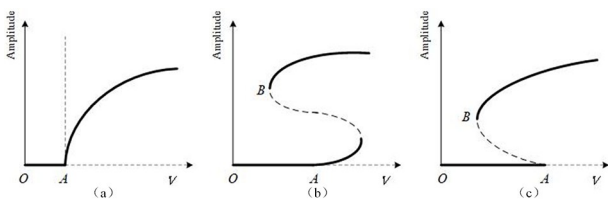


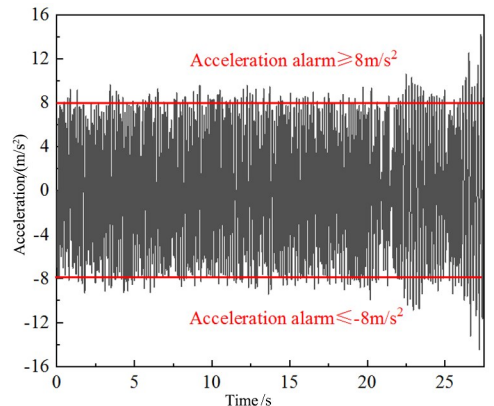
图1 车辆系统典型分岔形式^[2]

Fig. 1 Typical hunting bifurcation forms of vehicle system

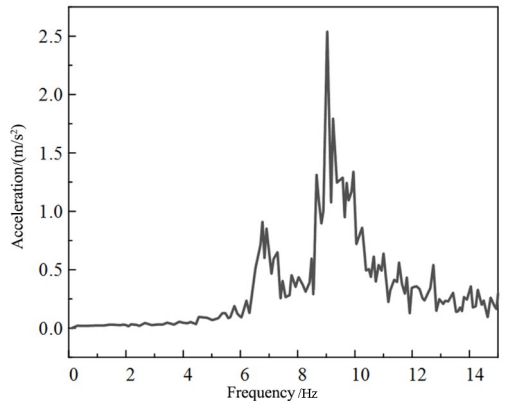
曾京对车辆系统的 Hopf 分岔与极限环特性和失稳点的确定进行了研究^[3]. Wu 等利用延续算法研究轮对系统的分岔特性^[4]. Park 等人研究了不同参数改变对分岔的影响^[5].分岔理论现已成为车辆蛇行稳定性研究的理论基础.

在高速列车长期服役过程中,车轮踏面和钢轨廓形不可避免会发生磨耗,轮轨关系恶化会降低蛇行运动临界速度,引发蛇行失稳^[2].通过线路跟踪试验可以得知,转向架蛇行运动失稳严重时还会引起横向加速度超限报警,如图2(a)所示,并触发列车限速或停车,严重影响列车正常运营秩序.如果轮轨异常接触且等效锥度过大时,也会发生 $8\text{Hz} \sim 10\text{Hz}$ 的转向架高频蛇行失稳,这时蛇行频率容易与车体水平方向的低阶结构模态频率接近,如车体菱形模态,则会引起该模态共振而出现车体剧烈抖

动,如图2(b)所示^[6].我国现有高速列车均采用被动悬挂系统,悬挂参数不可调,在长期服役过程中,由于轮轨的磨耗使车辆系统面临的蛇行运动稳定性问题越来越突出^[7].为拟制转向架蛇行失稳,有效措施是进行车轮镟修和钢轨打磨,即保持正常的车轮和钢轨廓形以及轮轨接触状态,但这会显著缩短车轮和钢轨的使用寿命,造成维护成本增加并降低了运营效率.



(a) 转向架横向加速度时域信号



(b) 车体横向加速度频域信号

图2 高速列车转向架蛇行失稳振动信号
Fig. 2 Vibration signals under bogie instability of high-speed train

目前国家已立项进行时速 400 公里及以上高速列车关键技术研究,届时转向架蛇行运动稳定性问题会更加突出.因此,采用主动悬挂技术以进一步提升高速列车转向架的蛇行运动稳定性是未来的发展方向,值得深入研究.

杨绍普等从轨道车辆载荷分析与减振方法等三个方面介绍了轨道车辆动力学与控制研究进展,给该领域研究者提供借鉴和参考^[8];姚远等提出横

向惯性振动器控制策略抑制转向架蛇行运动^[9,10]；晏永等采用线性二次型优化理论设计了主动悬挂系统,利用遗传算法得到最优控制器,在提高蛇行稳定性方面有改善作用^[11]。因此,通过采用主动悬挂代替传统悬挂是提升高速列车转向架蛇行运动稳定性及其对轮轨接触关系的适应性的有效途径。

从国内外学者关于蛇行稳定性与主动控制开展的研究可以看出,针对采用主动控制后的蛇行运动分岔机理和稳定性演变规律的研究还十分缺乏。已有研究基本仍停留在轮对的主动控制分岔理论的分析上^[12,13],而本文目的是开展基于转向架摇头控制的蛇行运动 Hopf 分岔机理研究,并深入分析主动控制下的高速转向架的分岔特性。

1 建立数学模型

铁道车辆特有的轮轨滚动接触相互作用关系,使其具有强非线性特性。如果以完整的车辆系统来对其非线性动力学进行分析和求解将十分复杂,所以往往根据研究目标的不同建立相应的简化模型。本文研究重点是转向架蛇行运动稳定性问题,而蛇行运动是横移与摇头的耦合运动。为了方便研究转向架蛇行运动机理,可近似将轮对和构架刚性地约束成一个整体,即简化为刚性转向架,并通过二系悬挂与车体连接,由此建立包含转向架横移 y_b 、转向架摇头 ψ_b 和车体横移 y_c 三个自由度的半车简化模型,并满足如下基本假设:

- (1)认为车辆在平直光滑轨道上运行;
- (2)将实测的轮轨接触几何关系用轮对横移函数表示,即考虑等效锥度;
- (3)轮对在垂向始终与钢轨保持接触,轮对具有轮缘;
- (4)抗蛇行减振器采用传统 Maxwell 模型。

将现有高速转向架二系并列的两个抗蛇行减振器中的一个替换为作动器进行主动控制,见图 3。

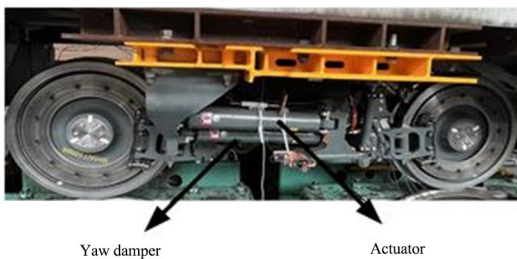


图 3 作动器安装位置

Fig. 3 Installation position of actuator

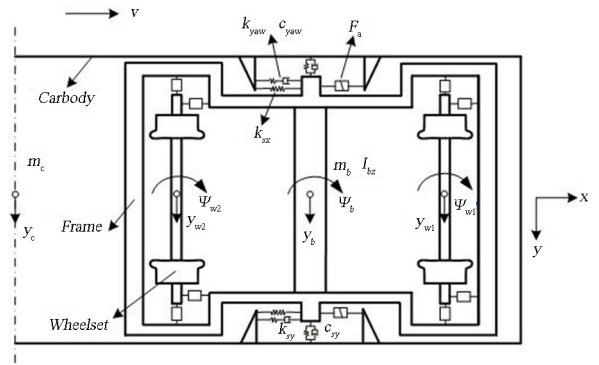


图 4 半车—转向架系统动力学模型

Fig. 4 Dynamic model of semi-carbody and bogie system

控制力将模拟理想的转向架摇头力矩,与传统的抗蛇行减振器并联冗余设置。

半车—转向架系统动力学模型如图 4 所示,

系统的运动微分方程可表示如下

$$\begin{aligned}
 m_b \ddot{y}_b &= 2k_{sy}(y_c - y_b) + 2c_{sy}(\dot{y}_c - \dot{y}_b) + \sum_{i=1}^2 (F_{cyil} + F_{cyir}) + \sum_{i=1}^2 F_{ti} \\
 I_{bz} \ddot{\psi}_b &= -2l_s^2 k_{sx} \psi_b + l_{yaw} [k_{yaw}(x_{yawr} - x_{yawl}) - 2l_{yaw} \psi_b] + M_c + 2l_{yaw} F_a + l_b (F_{t1} - F_{t2}) \\
 m_c \ddot{y}_c &= -[2k_{sy}(y_c - y_b) + 2c_{sy}(\dot{y}_c - \dot{y}_b)] \\
 c_{yaw} \dot{x}_{yaw(l,r)} &= -k_{yaw}(x_{yaw(l,r)} \mp l_{yaw} \psi_b) \quad (1)
 \end{aligned}$$

式中 $F_{cyil(r)}$ 、 $F_{cxil(r)}$ 分别为横向和纵向蠕滑力, F_{ti} 为轮缘力, M_c 为蠕滑力引起的力矩, F_a 为控制力, x_{yaw} 为 Maxwell 模型中点位移。(i=1,2,1 为前轮对,2 为后轮对;l 为左轮,r 为右轮)

式中其他参数在表 1 中列出^[14]。

表 1 系统参数

Table 1 System parameters

Notations	Values	Units	Parameters
m_b	2200	kg	Mass of bogie frame
m_c	1.8e4	kg	Half mass of carbody
I_{bz}	2336	kg·m ²	Yaw inertia of bogie frame
l_s	0.95	m	Half distance of suspension system
l_{yaw}	1.275	m	Half distance of yaw dampers
k_{yaw}	6e6	N/m	Stiffness of yaw damper
c_{yaw}	2e5	N·s/m	Damping of yaw damper
b	0.7465	m	Half distance of wheel/rail contact points
l_b	1.25	m	Half distance of wheelbase
r_0	0.46	m	Wheel rolling radius
k_{sy}	1.66e5	N/m	Secondary lateral stiffness
k_{sx}	1.66e5	N/m	Secondary longitudinal stiffness
c_{sy}	5e4	N·s/m	Damping of secondary lateral damper

1.1 轮轨蠕滑力

由于轮对和转向架之间刚性连接,轮对和转向架摇头角相等,轮对横移量 y_w 和构架中心横移量 y_b 之间的关系为:

$$y_{wi} = y_b + (-1)^{i+1} l_b \psi_b \quad (2)$$

图 5 为以 y_{wi} 为自变量拟合出的轮轨型面磨损条件下的等效锥度 λ 曲线^[15].

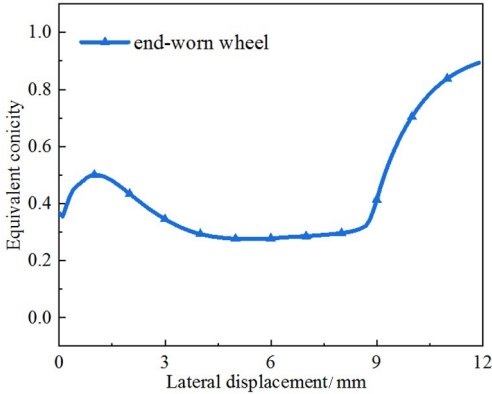


图 5 等效锥度拟合曲线
Fig. 5 Equivalent conicity fitting curve

车轮在钢轨上以速度 v 向前运行时,由于车轮和钢轨之间存在相对滑动会产生速度差,这种相对滑动称为蠕滑,蠕滑引起轮轨接触斑上的切向力称为蠕滑力^[16].本文考虑的蠕滑力采用 Kalker 线性理论,且只考虑纵向蠕滑力与横向蠕滑力,不考虑自旋蠕滑力,根据蠕滑率的定义,纵向和横向蠕滑率如下:

$$\begin{cases} \xi_{x(l,r)} = 1 - r_{l,r}/r_0 \mp b\dot{\psi}_w/v \\ \xi_{y(l,r)} = (\dot{y}_w/v - \psi_w) \cos(\delta_{l,r} \pm \varphi_w) \end{cases} \quad (3)$$

则纵向和横向蠕滑力为

$$\begin{cases} F_{cx1l} = -f_{11}(\lambda_i y_{wi}/r_0 + b\dot{\psi}_{wi}/v) \\ F_{cx1r} = -F_{cx1l} \\ F_{cy1l} = -f_{22}(\dot{y}_{wi}/v - \psi_{wi}) \\ F_{cy1r} = F_{cy1l} \end{cases} \quad (4)$$

考虑横向和纵向蠕滑系数相同,即 $f = f_{11} = f_{22}$,则由轮轨横向和纵向蠕滑力作用于刚性转向架的摇头力矩为

$$M_c = (F_{cx1l} - F_{cx1r} + F_{cx2l} - F_{cx2r})b + [F_{cx1l} + F_{cx1r} - (F_{cx2l} + F_{cx2r})]l_b = 4f[(b^2 + l_b^2)\dot{\psi}_b/v + \lambda b y_b/r_0] \quad (5)$$

1.2 轮缘力

轮缘接触力 F_l 为一复杂的非线性函数.目前

研究中普遍将其简化考虑为分段线性函数,如图 6(a)所示,由于函数不是连续的,不适合用于分岔分析;为了计算极限环,引用文献[17]中的指数函数来代替分段线性函数,如图 6(b)所示,通过 matlab 中曲线拟合工具进行拟合得到式(6),其中 $p_1 = 0.0003906, q_1 = -1645$.

$$F_{li} = p_1 e^{q_1 y_{wi}} - p_1 e^{-q_1 y_{wi}} \quad (6)$$

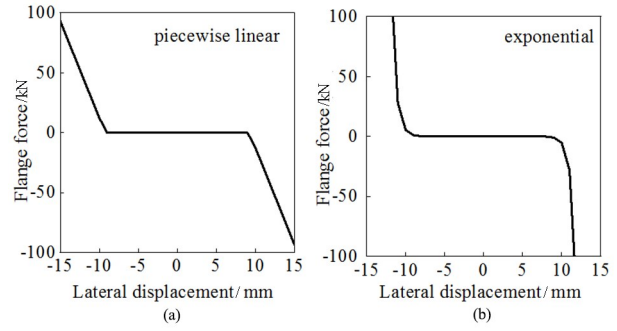


图 6 轮缘力函数曲线
Fig. 6 Flange force function curve

1.3 控制力

传统的抗蛇行减振器具有刚度与阻尼特性,因此执行主动控制的作动器也通过刚度与阻尼系数对车辆系统进行控制.控制力 F_a 如式(7)所示.式中, k_a 和 c_a 分别为刚度和阻尼控制增益, ψ_b 与 $\dot{\psi}_b$ 分别表示控制变量为转向架摇头位移与摇头速度.当 $k_a = c_a = 0$ 时,车辆系统处于被动悬挂状态.

$$F_a = k_a \psi_b + c_a \dot{\psi}_b \quad (7)$$

于是,采用 Matcont 仿真环境通过延续算法可以实现转向架非线性系统分岔计算.分别采用摇头位移与摇头速度作为控制变量,探究控制反馈和增益对 Hopf 分岔特性的影响.

2 基于摇头位移反馈控制的 Hopf 分岔特性

当采用位移线性控制时,选取刚度控制增益 k_a 介于 $0 \sim 2 \times 10^6$ N/m 之间,图 7 表示不同位移控制增益下车辆系统的 Hopf 分岔图.可以看出随着 k_a 增大,系统的 Hopf 分岔点延后,表明该控制力可以提高线性临界速度; $k_a = 0$ 时,分岔后出现了一段不稳定极限环,随着 k_a 增大不稳定极限环会逐渐消失,但并不会影响分岔类型,在位移线性控制下分岔类型始终为超临界分岔.

图 8 为构架横向加速度在不同刚度增益下与车速的关系.可以看出刚度增益 k_a 对构架加速度

影响不大。

导向轮对位移与转向架蛇行频率的关系如图9所示。显而易见,当加入控制力后,随着 k_a 增大,在转向架移量相同的情况下,转向架蛇行运动频率越来越大。这说明引入摇头位移控制将提高转向架蛇行运动频率,若蛇行频率进一步提高至 $8\text{Hz}\sim 10\text{Hz}$,接近车体的弹性模态,有可能引起“抖车”现象,进而降低车辆的乘坐舒适性,因此 k_a 的取值不宜过大。

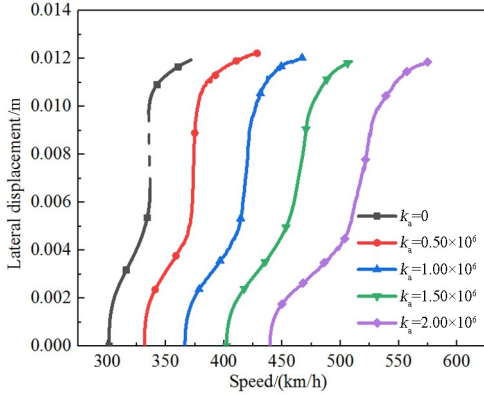


图7 车辆系统在不同刚度增益 k_a 下分岔图
Fig. 7 Bifurcation diagram of vehicle system at different stiffness gain

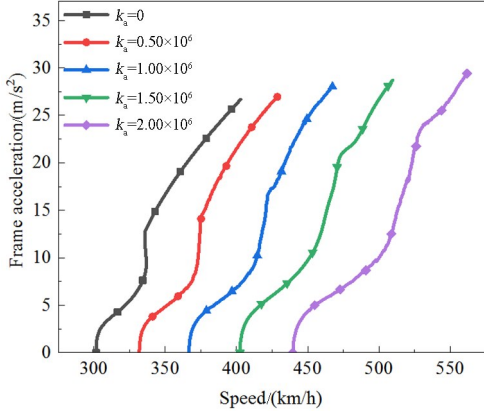


图8 不同刚度增益 k_a 下构架加速度幅值
Fig. 8 Acceleration amplitude of bogie frame at different stiffness gain

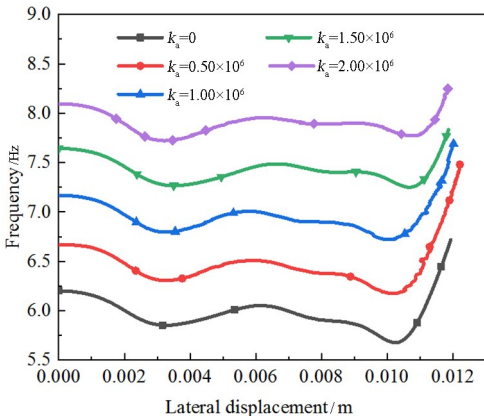


图9 刚度增益 k_a 对转向架蛇行频率影响
Fig. 9 Influence of stiffness gain on hunting frequency of bogie

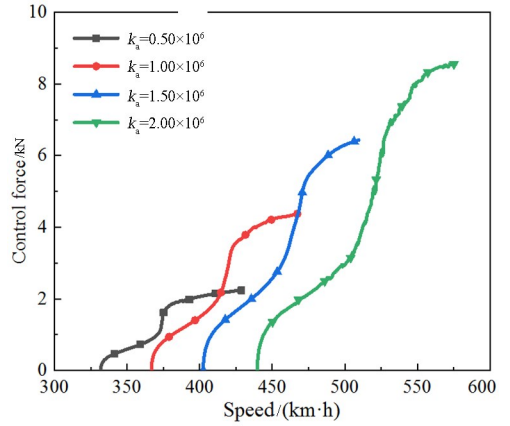


图10 刚度增益 k_a 对控制力影响
Fig. 10 Influence of stiffness gain on control force

图10为控制力随着运行速度变化的曲线。可以看出随着控制增益 k_a 成倍增大, F_a 变化趋势一致。

3 基于摇头速度反馈控制的Hopf分岔特性

当采用速度线性控制时,选取阻尼控制增益 c_a 介于 $0\sim 1\times 10^5\text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 之间,图11表示出了不同速度控制增益下车辆系统的Hopf分岔图。与位移线性控制类似,随着 c_a 增大,车辆系统的线性临界速度提高,但增幅较位移控制较小;Hopf分岔点后,随着速度进一步增加,极限环幅值逐渐增大,与摇头角位移控制不同,速度控制的引入会导致出现不稳定极限环的现象加剧, c_a 越大,出现不稳定极限环的速度区间越大,但分岔类型依旧为超临界分岔。同时增益 c_a 变大,分岔后极限环上升趋势变缓,证明速度线性控制具有降低蛇行运动极限环幅值的作用。

图12为构架横向加速度随车速变化曲线。可以得到,随着阻尼增益 c_a 增大,构架横向加速度值减小。说明引入摇头速度反馈控制可以在一定程度上降低构架横向加速度。

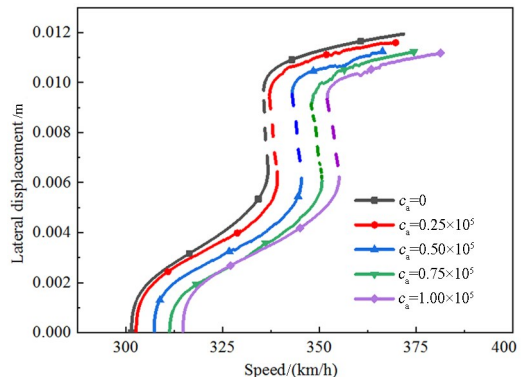


图11 车辆系统在不同阻尼增益 c_a 下分岔图
Fig. 11 Bifurcation diagram of vehicle system at different damping gain

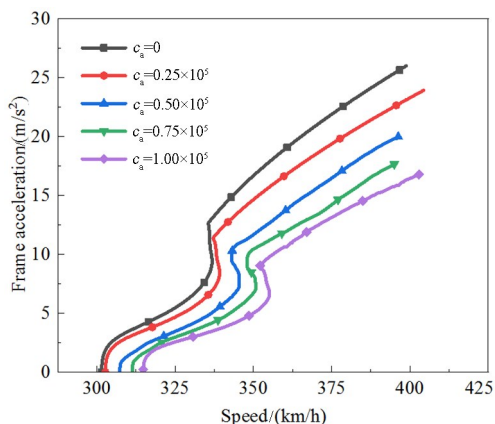


图 12 不同阻尼增益 c_a 下构架加速度幅值

Fig. 12 Acceleration of vehicle system at different damping gain

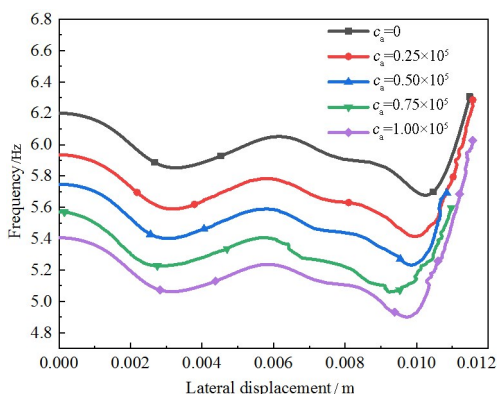


图 13 刚度增益 c_a 对转向架蛇行频率影响

Fig. 13 Influence of damping gain on hunting frequency of bogie

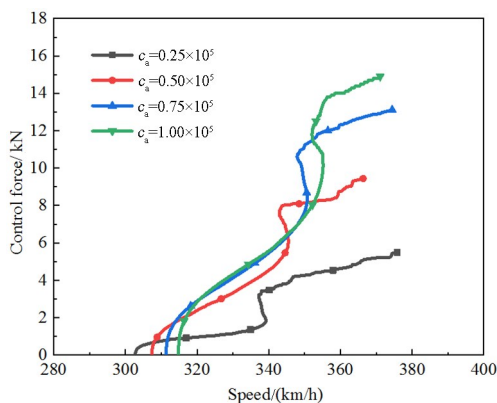


图 14 阻尼增益 c_a 对控制力影响

Fig. 14 Influence of damping gain on control force

图 13 为轮对横移量和转向架蛇行运动频率的关系图。当加入控制力后,随着 c_a 增大,在转向架横移量相同的情况下,车辆蛇行运动频率降低,进而远离车体的弹性模态,避免“抖车”。由此可见,摇头速度控制在抑制蛇行运动频率方面效果显著。

阻尼增益对控制力的影响如图 14 所示,与摇头角位移线性控制不同,随着选取的阻尼控制增益 c_a 成倍增大, F_a 没有呈现相同增长趋势,增长速度

变得缓慢;这是由于随着 c_a 增大减缓了摇头角速度的上升趋势,因此抑制了控制力的增长速度。

4 结论

本文通过建立三自由度简化模型,考虑非线性轮轨力与轮缘力,结合线路试验结果对磨损后期车轮的等效锥度曲线进行拟合,对转向架摇头线性控制下的蛇行运动 Hopf 分岔展开研究,得到以下结论:

(1) 引入转向架摇头位移线性反馈控制与摇头速度线性反馈控制均能延后 Hopf 分岔点. 控制增益越大,车辆系统的线性临界速度越大. 摇头位移线性控制对 Hopf 分岔点的改善效果更明显。

(2) 摇头角速度线性控制具有降低蛇行运动极限环幅值的作用. 同时可以降低转向架的横向加速度. 但速度线性控制下系统会出现不稳定的极限环。

(3) 在轮对产生相同横移量的情况下,相比较被动悬挂,摇头角速度线性控制能降低转向架的蛇行运动频率,但位移线性控制对蛇行频率有放大作用。

(4) 本文证明转向架摇头主动控制可以提高蛇行运动稳定性. 为尽可能提高线性临界速度、降低极限环幅值并避免与车体弹性模态产生共振,要合理地选取反馈控制方式与控制增益大小。

参考文献

[1] 石怀龙, 罗仁, 曾京. 国内外高速列车动力学评价标准综述[J]. 交通运输工程学报, 2021, 21(1): 36-58.
 SHI H L, LUO R, ZENG J. Review on domestic and foreign dynamics evaluation criteria of high-speed train [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2021, 21(1): 36-58. (in Chinese)
 [2] 黄彩虹, 曾京, 魏来. 铁道车辆蛇行稳定性主动控制综述[J]. 交通运输工程学报, 2021, 21(1): 267-284.
 HUANG C H, ZENG J, WEI L. Review on active control of hunting stability for railway vehicles [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2021, 21(1): 267-284. (in Chinese)
 [3] 曾京. 车辆系统的蛇行运动分叉及极限环的数值计

- 算[J]. 铁道学报, 1996, 18(3): 13-19.
- ZENG J. Numerical computations of the hunting bifurcation and limit cycle for railway vehicle system [J]. Journal of the China Railway Society, 1996, 18(3): 13-19. (in Chinese)
- [4] WU X W, CHI M R. Parameters study of Hopf bifurcation in railway vehicle system [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2015, 10(3): 031012.
- [5] PARK J H, KOH H I, KIM N P. Parametric study of lateral stability for a railway vehicle [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2011, 25(7): 1657-1666.
- [6] 机车车辆动力学性能评定及试验鉴定规范: GB/T 5599-2019 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2019.
- Specification for dynamic performance assessment and testing verification of rolling stock: GB/T 5599-2019 [S]. Beijing: Standards Press of China, 2019.
- [7] 王忆佳, 曾京, 罗仁, 等. 高速车辆车轮磨耗与轮轨接触几何关系的研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(7): 45-50.
- WANG Y J, ZENG J, LUO R, et al. Wheel profile wear and wheel/rail contact geometric relation for a high-speed train [J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(7): 45-50. (in Chinese)
- [8] 杨绍普, 刘永强. 轨道车辆动力学与控制研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(3): 1-4.
- YANG S P, LIU Y Q. Development of railway vehicle dynamics and control [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(3): 1-4. (in Chinese)
- [9] 姚远, 宋亚东, 李广, 等. 高速列车转向架的主动稳定性研究[J]. 动力学与控制学报, 2020, 18(3): 31-37.
- YAO Y, SONG Y D, LI G, et al. Research on active stability of high-speed train bogies [J]. Journal of Dynamics and Control, 2020, 18(3): 31-37. (in Chinese)
- [10] 任铖铭, 姚远, 钟晓波, 等. 基于迭代学习策略的高速机车二系横向主动控制[J]. 动力学与控制学报, 2022, 20(5): 41-48.
- REN C M, YAO Y, ZHONG X B, et al. Lateral active control for secondary suspension of high-speed locomotive based on iterative learning method [J]. Journal of Dynamics and Control, 2022, 20(5): 41-48. (in Chinese)
- [11] 晏永, 曾京, 翟玉江, 等. 轨道车辆蛇行运动 GALQR主动控制研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2020, 17(10): 2642-2648.
- YAN Y, ZENG J, ZHAI Y J, et al. Active control analysis of railway vehicle hunting motion based on LQR and genetic algorithm [J]. Journal of Railway Science and Engineering, 2020, 17(10): 2642-2648. (in Chinese)
- [12] 孙桐林, 胡忠国, 高国生. 轮对蛇行运动 Hopf 分岔的非线性反馈控制[J]. 国防交通工程与技术, 2004, 2(1): 29-33.
- SUN T L, HU Z G, GAO G S. Nonlinear feedback control of HOPF bifurcation of the hunting motion in a rail wheelset [J]. Traffic Engineering and Technology for National Defence, 2004, 2(1): 29-33. (in Chinese)
- [13] 高国生, 杨绍普, 郭京波. 轮对蛇行运动 Hopf 分岔的非线性控制[J]. 铁道学报, 2002, 24(3): 23-26.
- GAO G S, YANG S P, GUO J B. Nonlinear control for Hopf bifurcation of hunting motion in rail wheelset [J]. Journal of the China Railway Society, 2002, 24(3): 23-26. (in Chinese)
- [14] 晏永. 车辆系统蛇行运动 Hopf 分岔行为研究[D]. 成都: 西南交通大学, 2019.
- YAN Y. Hopf bifurcation study of hunting behavior of vehicle systems [D]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2019. (in Chinese)
- [15] 等效锥度的确定方法: UIC519-2004[S]. 巴黎: 国际铁路联盟, 2004.
- Method for determining the equivalent conicity: UIC519-2004 [S]. Paris: International Union of Railways, 2004.
- [16] 罗仁, 石怀龙. 铁道车辆系统动力学及应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2018.
- LUO R, SHI H L. Dynamics of railway vehicle systems and application [M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2018. (in Chinese)
- [17] GUO J Y, SHI H L, LUO R, et al. Bifurcation analysis of a railway wheelset with nonlinear wheel-rail contact [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 104(2): 989-1005.