

具有环状运动约束的悬臂输流管道的非线性振动特征^{*}

郭勇[†]

(安顺学院 电子与信息工程学院, 安顺 561000)

摘要 本文对具有环状运动约束的悬臂输流管道的空间弯曲振动进行研究, 目的在于考察约束刚度系数、约束放置位置对管道的两类周期运动(包括平面周期运动和空间周期运动)及其稳定性的影响规律. 首先, 在已有文献的基础上, 将运动约束对管道的作用模拟成非线性立方弹簧模, 得出振动方程. 其次, 运用 Galerkin 方法将振动方程离散成常微分方程组, 结合基于中心流形—范式理论的投影法与平均法, 给出了决定系统定性动力学性质的相关系数(包括临界特征值随流速的变化率及非线性共振项), 取模态截断数为 6, 在几组约束刚度值和约束位置处计算了上述系数, 据此考察了运动约束对管道的周期运动的影响, 总结出了如下结论: 在约束位置取定时增加约束刚度, 或在约束刚度取定时增大约束位置至管的固定端的距离, 均会使得管道的稳定平面周期运动对应的质量比区间减小, 稳定空间周期运动对应的质量比区间增大; 约束位置距管的固定端越远, 约束刚度的变化对管道动力学行为的影响越明显. 最后, 对上述通过投影法和平均法得出的结论, 本文在特定的质量比处数值求解了原振动方程的 6 模态 Galerkin 离散化方程, 绘制了位形图、相图和 Poincaré 映射图, 计算了频率, 从而验证了相关的分析.

关键词 输流管道, 平面周期运动, 空间周期运动, 约束, 弹簧, 稳定

中图分类号: O322; O326

文献标志码: A

Nonlinear Vibration Characteristics of Cantilevered Fluid-Conveying Pipe with Circular Motion Constraint^{*}

Guo Yong[†]

(School of electronic and Information Engineering, Anshun University, Anshun 561000, China)

Abstract In this paper, the spatial bending vibration of a cantilevered fluid-conveying pipe with circular motion constraints was studied to explore the influence of constraint stiffness coefficient and constraint placement position on the two kinds of periodic motion of pipeline (including planar periodic motion and spatial periodic motion) and their stabilities. Firstly, the vibration equation was obtained by simulating the action of the motion constraint on the pipeline as a nonlinear cubic spring mode based on the existing literature. Secondly, the vibration equation was discretized into a system of ordinary differential equations by the Galerkin method. The relevant coefficients (including the rate of change of critical eigenvalue with velocity and the nonlinear resonant term) that determine the qualitative dynamical properties of the system were given in combination with the projection method based on the center manifold - normal form theory and averaging method. By setting the truncated mode numbers to 6, the aforementioned coefficients were calculated at several sets of constrained stiffness values and constrained positions. And then, the influence of motion constraints on the periodic motion of the pipeline was studied. The follow-

2023-10-22 收到第 1 稿, 2023-12-15 收到修改稿.

^{*} 国家自然科学基金资助项目(12002096), 安顺学院 2022 年度博士基金资助项目(asxybsjj202201), National Natural Science Foundation of China (12002096) and the 2022 Doctoral Foundation of Anshun University (asxybsjj202201).

[†] 通信作者 E-mail: gy-gates@163.com

ing conclusions were drawn: Increasing the constraint stiffness at a fixed constraint position or increasing the distance from the constraint position to the fixed end of the pipeline while keeping the constraint stiffness constant, both will reduce the mass ratio interval corresponding to the stable planar periodic motion of the pipeline, and increase the mass ratio interval corresponding to the stable spatial periodic motion; the farther the constraint position from the fixed end of the pipeline, the more significant the influence of the changes in the constraint stiffness on the dynamic behavior of the pipeline. Finally, the 6-mode Galerkin discretization equation of the original vibration equation was numerically solved at some specific mass ratios to calculating the oscillation frequencies and generating the configuration diagrams, phase diagrams, and Poincaré mapping diagrams, which validates the relevant conclusions obtained by projection and averaging methods.

Key words fluid-conveying pipe, planar periodic motion, spatial periodic motion, constraint, springs, stability

引言

输流管道广泛应用于工程实践中,如飞机的空中加油、水电核电、化工装置、石油工业、海洋工程,以及微纳机电力学系统等,学者们对其动力学行为的研究,历经了从运动方程的建立和管道的线性振动^[1-3]到管道的非线性振动^[4-7],从管道的平面振动^[8, 9]到管道的空间振动^[10-12],从宏观管到微纳尺度管^[13-17],从简单形状管到复杂形状管^[18-20]的发展过程,取得了大量的研究成果^[21].

在实际应用中,管道通常放置于一定的工作环境,其周围的相关元件因对管道的运动有约束作用,故称为“运动约束”.当管内流体的流速超过一定值时,输流管道会发生屈曲^[22]或颤振^[23],在运动约束的作用下,展现出丰富的动力学现象. Paidoussis 等^[24]最早研究了含有运动约束的悬臂输流管的非线性振动,文中方程的“非线性项”仅来源于被模拟为立方弹簧的运动约束.结果表明,管道通过周期倍化分岔进入混沌. Paidoussis 和 Semler^[25]在文献[24]的基础上加入了管道大振幅运动引起的几何非线性,对比研究了将运动约束分别模拟成立方弹簧和立方三折线弹簧时管道动力学行为的异同,并探讨了在用 Galerkin 方法研究该系统时,不同的模态截断数所对应的计算结果的差别. Jin^[26]将文献[24]中的运动约束模拟为线性弹簧和立方弹簧的和,并通过考察原方程的 Galerkin 离散化方程的线性部分分析了管道的高余维分岔. Wang 和 Ni^[27]研究了文献[26]中的管为倒立时的动力学特征. Guo^[28]研究了具有对称运动约

束的微尺度悬臂输流管的非线性振动,基于投影法及数值模拟,微尺度效应对管道分岔阈值和混沌阈值的影响得以刻画. Wang 等^[29]和 Peng 等^[30]对运输脉动流的两端支撑管模型考虑了运动约束的影响.以上文献中的力学模型均是在某个“点”处放置了运动约束的管,对于沿管的轴向均存在运动约束的情形, Ni 等^[31]最先对其中的悬臂管模型的动力学行为进行了研究,探讨了失稳后的管在后续的运动过程中与运动约束的接触模式及管内流体速度对接触模式的影响.在文献[31]的基础上,王乙坤和王琳^[32]进一步研究了管内流体为脉动流时悬臂管道的参数振动问题.以上文献考虑的都是受有运动约束的管道的平面振动, Wang 等^[33]研究该类悬臂管道的空间振动问题,分别考虑了平行条运动约束和环状运动约束两种运动约束模式,对每一种约束模式,又将其分别模拟为立方弹簧和立方三折线弹簧,分析了质量比、流速等参数对管道的平面运动、非平面运动,以及粘滞行为的影响.

从文献综述可以看到,管道与运动约束之间一般视为弹性接触,运动约束通常被模拟为非线性弹簧,制作管道及运动约束的材料软硬特性表现在该弹簧的刚度系数上.另外,运动约束须根据具体情况放置在管道的不同位置.因此,有必要考察约束刚度和放置位置对输流管道动力学行为的影响.此前的研究主要基于管道离散化方程的数值求解,但是当模态截断数较多时,常微分方程组的数值求解相对耗时,若能根据离散化方程的系数判定出管道的周期运动模式,则有助于较快了解管道的动力学性质.有鉴于此,本文运用投影法(该法基于中心

流形—范式理论)及平均法对该问题进行研究;第1节给出了具有环状运动约束的悬臂输流管的空间弯曲振动方程及边界条件,此处该运动约束被模拟为立方非线性弹簧;在第2节中,考虑到该模型的边界条件,选择悬臂梁的模态函数为基函数,运用 Galerkin 方法对振动方程进行离散,得到一组常微分方程,并在此基础上给出降维方程及系数表达式,给出了周期运动类型及稳定性与降维方程系数的关系;在第3节中,具体地取模态截断数为6,在“约束放置位置”及“非线性弹簧刚度”取不同值时分别计算了降维方程的系数,考察了两者对管道的两类周期运动(包括平面周期运动和空间周期运动)的稳定性随质量比的分布,揭示了约束位置和约束刚度这两个因素对悬臂输流管道的周期运动的影响规律。

1 力学模型与运动方程

研究图1所示的系统.如图1(a)所示,直管的长度为 L ,单位长度的质量为 m ,管材料密度为 ρ ,拉伸弹性模量为 E ,剪切弹性模量为 G ,管内的不可压缩流体的速度大小为 V ,单位长度的质量为 M ,管在 $X=S_0$ 处受有运动约束;管做空间弯曲振动[图1(b)];为便于描述管的运动,以管未变形时的形心线为 X 轴,管内流体的流向为 X 轴的正向,悬臂端面为 YZ 平面,管形心线和 YZ 平面的交点为坐标原点 O ,建立拉格朗日坐标系 $O-XYZ$,用

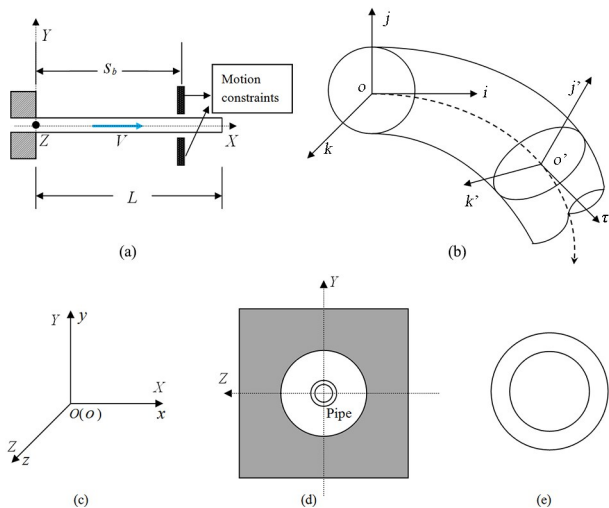


图1 (a)具有环状运动约束的悬臂输流管道;(b)三维弯曲振动;(c)坐标系;(d)环状运动约束在YOZ面的投影图;(e)管道的 $O(2)$ 对称横截面

Fig. 1 (a) The cantilevered fluid-conveying pipe with circular motion constraint; (b) Three dimensional flexural vibration; (c) Coordinate systems; (d) The projection of circular motion constraint on the YOZ plane; (e) The $O(2)$ symmetric cross-section of the pipe

于描述管未变形时其上任一物质点的初始位置;管变形后,用另一个坐标系(即欧拉坐标系 $o-xyz$,其与拉格朗日坐标系 $O-XYZ$ 重合^[34])描述管在运动过程中其上任一物质点的瞬时位置[图1(a)~图1(c)];从 X 轴正向看到的管道及运动约束的视图如图1(d)所示;管具有 $O(2)$ 对称的横截面[图1(e)],其形状和面积 A_p 沿轴向不变,抗弯刚度为 EI .

管上任一物质点 (X, Y, Z) 在 t 时刻的位移 (u_1, u_2, u_3) 可通过该点的拉格朗日坐标 (X, Y, Z) 和欧拉坐标 (x, y, z) 表示为^[35]:

$$\begin{aligned} u_1(X, Y, Z, t) &= x - X, \\ u_2(X, Y, Z, t) &= y - Y, \\ u_3(X, Y, Z, t) &= z - Z \end{aligned} \quad (1)$$

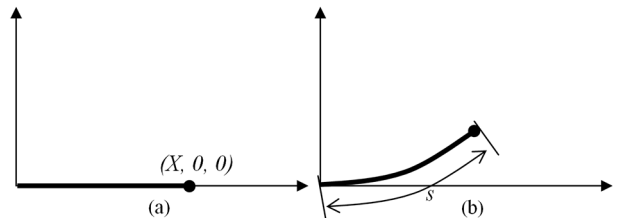


图2 轴线不可伸缩:(a)变形前;(b)变形后
Fig. 2 The centroid line of the pipe is not stretchable: (a) before the deformation; (b) after the deformation

如图2所示^[20],沿管的形心线引入曲线坐标 s ,因无初始轴力,所以悬臂管的形心线在运动过程中通常被认为是没有伸缩的,即 $s = X$ ^[34],从而管形心线上任一点 $(X, 0, 0)$ 也可表示为 $(s, 0, 0)$,其在 t 时刻的位置矢量记为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t) = (s + u, v, w) \quad (2)$$

其中 $u = u_1(s, 0, 0, t)$, $v = u_2(s, 0, 0, t)$, 以及 $w = u_3(s, 0, 0, t)$. 悬臂梁无伸缩即^[34]:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 = 1 \quad (3)$$

采用欧拉—伯努利梁模型,文献[36]已给出了图1所示的系统在不含运动约束时的空间弯曲振动方程[式(7)]和边界条件[式(8)],其中的无量纲参数如下:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{s}{L}, \eta = \frac{w}{L}, \zeta = \frac{v}{L}, \tau = \left(\frac{EI}{m+M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{L^2}, \\ \nu &= \left(\frac{M}{EI}\right)^{\frac{1}{2}} VL, \beta = \frac{M}{m+M}, l_0 = \frac{A_p l^2 G}{2EI} \end{aligned} \quad (4)$$

上式中的 l 是刻画微尺度效应的材料长度尺寸参数^[37],在本文中仅考虑宏观管,所以 l 和 l_0 等于零.方程(7)、(8)中的“点”表示相应的量对无量纲时

间 τ 求导,即 $(\cdot) = \partial/\partial\tau$,“撇”表示相应的量对无量纲弧长 ξ 求导,即 $(\cdot)' = \partial/\partial\xi$,下文中的“点”和“撇”的含义均是如此。

本文将运动约束模拟为刚度系数为 K 的立方弹簧^[24,25,28,29,31,32],将其对管道的作用力添加到运动方程(7)中,得到最终的振动方程(9),其中,无量

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + \nu^2 \eta'' + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}' + (2l_0 + 1)\eta^{(4)} + \frac{3}{2}[\eta''^3 + \eta''\zeta''^2 + 2\eta'\eta''\eta'' + 2\eta'\zeta'\zeta''] - \\ & \eta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi d\xi + \\ & \eta' \int_0^{\xi} [\dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi + \\ & l_0[-\eta'^2\eta^{(4)} + 2\eta'\eta''\eta'' + 2\eta''^3 + 2\eta''\zeta''^2 - \eta''\zeta'\zeta'' + 3\eta'\zeta'\zeta'' - \eta'\zeta'\zeta^{(4)} + \\ & 2\eta' \int_0^{\xi} (\eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}) d\xi - 2\eta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} (\eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}) d\xi d\xi] = 0 \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\zeta} + \nu^2 \zeta'' + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}' + (2l_0 + 1)\zeta^{(4)} + \frac{3}{2}[\zeta''^3 + \eta''^2\zeta'' + 2\zeta'\zeta''\zeta'' + 2\zeta'\eta''\eta''] - \\ & \zeta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} [\dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi d\xi + \\ & \zeta' \int_0^{\xi} [\dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi + \\ & l_0[-\zeta'^2\zeta^{(4)} + 2\zeta'\zeta''\zeta'' + 2\zeta''^3 + 2\zeta''\eta''^2 - \zeta''\eta'\eta'' + 3\zeta'\eta''\eta'' - \zeta'\eta'\eta^{(4)} + \\ & 2\zeta' \int_0^{\xi} (\eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}) d\xi - 2\zeta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} (\eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}) d\xi d\xi] = 0 \end{aligned} \quad (7b)$$

$$\begin{cases} \eta(0, \tau) = \eta'(0, \tau) = \eta(1, \tau) = \eta'(1, \tau) = 0 \\ \zeta(0, \tau) = \zeta'(0, \tau) = \zeta(1, \tau) = \zeta'(1, \tau) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + \nu^2 \eta'' + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}' + \eta^{(4)} + \frac{3}{2}[\eta''^3 + \eta''\zeta''^2 + 2\eta'\eta''\eta'' + 2\eta'\zeta'\zeta''] - \eta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} [\dot{\eta}'^2 + \\ & 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi d\xi + \eta' \int_0^{\xi} [\dot{\eta}'^2 + \\ & 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \dot{\zeta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi + \\ & k(\sqrt{\eta^2 + \zeta^2})^3 \frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \delta(\xi - \xi_b) = 0 \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\zeta} + \nu^2 \zeta'' + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}' + \zeta^{(4)} + \frac{3}{2}[\zeta''^3 + \eta''^2\zeta'' + 2\zeta'\zeta''\zeta'' + 2\zeta'\eta''\eta''] - \zeta'' \int_{\xi}^1 \int_0^{\xi} [\dot{\zeta}'^2 + \\ & 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi d\xi + \zeta' \int_0^{\xi} [\dot{\zeta}'^2 + \\ & 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\zeta}'\zeta'' + \dot{\eta}'^2 + 2\sqrt{\beta\nu}\dot{\eta}'\eta'' + \nu^2(\eta''^2 + \zeta''^2) + \eta''\eta^{(4)} + \zeta''\zeta^{(4)}] d\xi + \\ & k(\sqrt{\eta^2 + \zeta^2})^3 \frac{\zeta}{\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}} \delta(\xi - \xi_b) = 0 \end{aligned} \quad (9b)$$

2 Galerkin 离散化方程及降维方程

2.1 Galerkin 离散化方程

因悬臂梁的模式函数满足边界条件(8),可选取其为基础函数^[2,23,25,26],根据 Galerkin 方法,设方

纲约束位置

$$\xi_b = s_b/L \quad (5)$$

$\delta(\xi - \xi_b)$ 是 Dirac 函数,无量纲刚度

$$k = \frac{KL^5}{EI} \quad (6)$$

程(9)的解为

$$\begin{cases} \eta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) q_i(\tau) \\ \zeta(\xi, \tau) = \sum_{i=1}^n \psi_i(\xi) p_i(\tau) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\varphi_i(\xi)$ 、 $\psi_i(\xi)$ 是悬臂梁的第 i 阶模式函数,

$q_i(\tau)$ 、 $p_i(\tau)$ 是管道在两个横向上振动的广义坐标, n 为模态截断数. $\varphi_i(\xi)$ 、 $\psi_i(\xi)$ 的表达式为:

$$\begin{cases} \varphi_i(\xi) = \psi_i(\xi) = \cosh \lambda_i \xi - \\ \cos \lambda_i \xi - \sigma_i (\sinh \lambda_i \xi - \sin \lambda_i \xi), \\ \sigma_i = (\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i) / (\cosh \lambda_i + \\ \cos \lambda_i), (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (11)$$

λ_i 是悬臂梁的第 i 阶频率.

将式(10)代入方程(9), 用 $\varphi_i(\xi)$ 、 $\psi_i(\xi)$ 分别乘以方程(9a)和方程(9b)两边, 并从 0 到 1 积分可得:

$$\begin{cases} \ddot{q}_i + c_{ij} \dot{q}_j + k_{ij} q_j + A_{ijkl} q_j q_k q_l + B_{ijkl} q_j q_k \dot{q}_l + C_{ijkl} q_j \dot{q}_k \dot{q}_l + L_{ijkl} q_j p_k p_l + \\ M_{ijkl} q_j p_k \dot{p}_l + N_{ijkl} q_j \dot{p}_k \dot{p}_l = 0 \\ \ddot{p}_i + c_{ij} \dot{p}_j + k_{ij} p_j + A_{ijkl} p_j p_k p_l + B_{ijkl} p_j p_k \dot{p}_l + C_{ijkl} p_j \dot{p}_k \dot{p}_l + L_{ijkl} p_j q_k q_l + \\ M_{ijkl} p_j q_k \dot{q}_l + N_{ijkl} p_j \dot{q}_k \dot{q}_l = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} c_{ij} = 2\nu\sqrt{\beta} \int_0^1 \varphi_i \varphi_j' d\xi, k_{ij} = \int_0^1 \varphi_i^{(4)} \varphi_j d\xi + \nu^2 \int_0^1 \varphi_i \varphi_j'' d\xi \\ A_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot [\nu^2 (\varphi_j' \int_0^\xi \varphi_k'' \varphi_l'' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \varphi_k'' \varphi_l'' d\xi d\xi) + \frac{3}{2} (2\varphi_j' \varphi_k'' \varphi_l'' + \varphi_j'' \varphi_k'' \varphi_l'') + \\ \varphi_j' \int_0^\xi \varphi_k'' \varphi_l^{(4)} d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \varphi_k'' \varphi_l^{(4)} d\xi d\xi] d\xi + k \varphi_i(\xi_b) \varphi_j(\xi_b) \varphi_k(\xi_b) \varphi_l(\xi_b) \\ B_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot 2\nu\sqrt{\beta} (\varphi_j' \int_0^\xi \varphi_k'' \varphi_l' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \varphi_k'' \varphi_l' d\xi d\xi) d\xi \\ C_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot (\varphi_j' \int_0^\xi \varphi_k' \varphi_l' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \varphi_k' \varphi_l' d\xi d\xi) d\xi \\ L_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot [\nu^2 (\varphi_j' \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l'' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l'' d\xi d\xi) + \frac{3}{2} (\varphi_j'' \psi_k'' \psi_l'' + 2\varphi_j' \psi_k'' \psi_l'') + \\ \varphi_j' \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l^{(4)} d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l^{(4)} d\xi d\xi] d\xi + k \varphi_i(\xi_b) \varphi_j(\xi_b) \psi_k(\xi_b) \psi_l(\xi_b) \\ M_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot 2\nu\sqrt{\beta} (\varphi_j' \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \psi_k'' \psi_l' d\xi d\xi) d\xi \\ N_{ijkl} = \int_0^1 \varphi_i \cdot (\varphi_j' \int_0^\xi \psi_k' \psi_l' d\xi - \varphi_j'' \int_\xi^1 \int_0^\xi \psi_k' \psi_l' d\xi d\xi) d\xi \end{cases} \quad (13)$$

i, j, k 和 l 的值取遍 1 到 n .

其中

令

$$q_i = x_i, \dot{q}_i = x_{i+n}, p_i = x_{i+2n}, \dot{p}_i = x_{i+3n} \quad (14)$$

将方程(12)化成一阶常微分方程组:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X}) \quad (15)$$

$$\mathbf{X} = [\underbrace{q_1, \dots, q_n}_n, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_n, \underbrace{p_1, \dots, p_n}_n, \underbrace{\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n}_n]^T = [\underbrace{x_1, \dots, x_n}_n, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{2n}}_n, \underbrace{x_{2n+1}, \dots, x_{3n}}_n, \underbrace{x_{3n+1}, \dots, x_{4n}}_n]^T \quad (17)$$

\mathbf{K} 的元素为 k_{ij} , \mathbf{C} 的元素为 c_{ij} , \mathbf{I} 为 n 阶单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为 n 阶零矩阵. $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ 表示非线性项:

$$\mathbf{N}(\mathbf{X}) = [0, \dots, 0, N_1(\mathbf{X}), \dots, N_n(\mathbf{X}), 0, \dots, 0, N_{1+n}(\mathbf{X}), \dots, N_{2n}(\mathbf{X})]^T \quad (18)$$

其中 $N_i(\mathbf{X})$ 、 $N_{i+n}(\mathbf{X})$ 分别为:

$$N_i(\mathbf{X}) = -A_{ijkl} x_j x_k x_l - B_{ijkl} x_j x_k x_{l+n} - C_{ijkl} x_j x_{k+n} x_{l+n} - L_{ijkl} x_j x_{k+2n} x_{l+2n} - \\ B_{ijkl} x_j x_{k+2n} x_{l+3n} - C_{ijkl} x_j x_{k+3n} x_{l+3n} \quad (19a)$$

$$N_{i+n}(\mathbf{X}) = -A_{ijkl} x_{j+2n} x_{k+2n} x_{l+2n} - B_{ijkl} x_{j+2n} x_{k+2n} x_{l+3n} - C_{ijkl} x_{j+2n} x_{k+3n} x_{l+3n} - \\ L_{ijkl} x_{j+2n} x_k x_l - B_{ijkl} x_{j+2n} x_k x_{l+n} - C_{ijkl} x_{j+2n} x_{k+n} x_{l+n} \quad (19b)$$

2.2 降维方程

2.2.1 临界流速

通过考察方程(15)的线性部分

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}\mathbf{X} \quad (20)$$

的退化性可给出临界流速. 式(20)可以写成:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_1 \\ \dot{\mathbf{X}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式(21)中的“ $\mathbf{0}$ ”为 $2n$ 阶元素全为零的矩阵,

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ 中的“ $\mathbf{0}$ ”为 n 阶元素全为零的矩阵. 式(21)

中的 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 分别为

$$\mathbf{X}_1 = [\underbrace{q_1, \dots, q_n}_n, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_n]^T = [x_1, \dots, x_{2n}]^T,$$

$$\mathbf{X}_2 = [\underbrace{p_1, \dots, p_n}_n, \underbrace{\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n}_n]^T = [x_{2n+1}, \dots, x_{4n}]^T$$

观察可知方程(21)中的 \mathbf{X}_1 和 \mathbf{X}_2 是不耦合的,其可以分写为

$$\dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{L}_1 \mathbf{X}_1 \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{X}_2 \quad (23)$$

考虑到 $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$, 方程(22)、(23)在形式上是一样的,不管参数如何变化, $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ 的特征值是全部的,从而方程(22)、(23)同时退化. 因为(22)、(23)这类悬臂输液管系统的失稳方式为发生颤振^[38, 39], 因此方程(22)、(23)的退化形式为 $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$, 同时具有一对相等的纯虚数特征根, 等价于矩阵 \mathbf{L} 的退化为具有两对“半简单”纯虚数特征根 $\pm i\omega_0$, $\pm i\omega_0$ 的退化. 所以, 临界流速即: 在给定的质量比 β 处, 矩阵 \mathbf{L} 具有两对纯虚数特征根时所对应的流速值(记为 v_c). 纯虚数特征根的虚部 ω_0 称为“临界频率”, 其为此时管道的自振频率. 对于一个加工好的管道, 其长度 L 、单位长度的质量 m 、抗弯刚度 EI 是既定的, 但管内流体的物理性质[从而方程(4)中的 β 值(由定义式知其 在 0 到 1 之间)]则取决于具体的使用场合, 因此在考察临界流速时应研究其随质量比 β 的变化规律, 即绘出“临界流速—质量比曲线”.

2.2.2 降维方程

在给定的质量比 β 处, 当流速在临界值 v_c 附近有改变量 ϵ 时, 将原方程写成:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{L}(v_c + \epsilon)\mathbf{X} + \mathbf{N}(\mathbf{X}) \quad (24)$$

记 $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}(v_c)$; 以 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积, 定义为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}$, “ \mathbf{T} ”和“ $-$ ”分别表示取转置与取共轭; \mathbf{L}_0^* 表示 \mathbf{L}_0 的共轭算子, 满足 $\langle \mathbf{L}_0 \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{L}_0^* \mathbf{y} \rangle$, 实际上对于矩阵而言, $\mathbf{L}_0^* = \bar{\mathbf{L}}_0^T$. 线性算子的特征值集和其共轭算子的特征值集相同, 但是特征向量却需要另外讨论. 此处, 将 \mathbf{L}_0 的对应特征值 $i\omega_0$ ($-i\omega_0$) 的特征向量记为 $\mathbf{w}_0^{(i)}$ ($\bar{\mathbf{w}}_0^{(i)}$), 将 \mathbf{L}_0^* 的对应特征值 $i\omega_0$ ($-i\omega_0$) 的特征向量记为 $\mathbf{q}_0^{(i)}$ ($\bar{\mathbf{q}}_0^{(i)}$), 即:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 \mathbf{w}_0^{(1)} &= i\omega_0 \mathbf{w}_0^{(1)}, \mathbf{L}_0 \bar{\mathbf{w}}_0^{(1)} = -i\omega_0 \bar{\mathbf{w}}_0^{(1)}, \\ \mathbf{L}_0 \mathbf{w}_0^{(2)} &= i\omega_0 \mathbf{w}_0^{(2)}, \mathbf{L}_0 \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)} = -i\omega_0 \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)}, \\ \mathbf{L}_0^* \mathbf{q}_0^{(1)} &= -i\omega_0 \mathbf{q}_0^{(1)}, \mathbf{L}_0^* \bar{\mathbf{q}}_0^{(1)} = i\omega_0 \bar{\mathbf{q}}_0^{(1)}, \\ \mathbf{L}_0^* \mathbf{q}_0^{(2)} &= -i\omega_0 \mathbf{q}_0^{(2)}, \mathbf{L}_0^* \bar{\mathbf{q}}_0^{(2)} = i\omega_0 \bar{\mathbf{q}}_0^{(2)} \end{aligned} \quad (25)$$

可以按照文献[36]的方法将高维(具体来说是 $4n$ 维, n 是模态截断数)常微分系统(15)或(24)降维、简化为 4 维方程(z_1, z_2 是复数)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = i\omega_0 z_1 + \epsilon \lambda'_\epsilon z_1 + F_{2100} z_1^2 \bar{z}_1 + \\ \quad F_{1011} z_1 z_2 \bar{z}_2 + F_{0120} \bar{z}_1 z_2^2 + O(\dots) \\ \dot{z}_2 = i\omega_0 z_2 + \epsilon \lambda'_\epsilon z_2 + H_{0021} z_2^2 \bar{z}_2 + \\ \quad H_{1110} z_1 \bar{z}_1 z_2 + H_{2001} z_1^2 \bar{z}_2 + O(\dots) \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\lambda'_\epsilon = \langle \mathbf{L}'_\epsilon \mathbf{w}_0^{(1)}, \mathbf{q}_0^{(1)} \rangle = \langle \mathbf{L}'_\epsilon \mathbf{w}_0^{(2)}, \mathbf{q}_0^{(2)} \rangle \quad (27)$$

$$\mathbf{L}'_\epsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}' & -\mathbf{C}' & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}' & -\mathbf{C}' \end{bmatrix}$$

\mathbf{K}', \mathbf{C}' 均为 n 阶矩阵, 其元素分别为: $k'_{ij} = 2v_c \int_0^1 \phi_i \phi_j'' d\xi, c'_{ij} = 2\sqrt{\beta} \int_0^1 \phi_i \phi_j' d\xi$.

方程(26)中的系数 $F_{2100}, F_{1011}, F_{0120}, H_{0021}, H_{1110}, H_{2001}$ 由下式确定

$$\begin{aligned} F_{2100} &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}_0^{(1)}, \mathbf{C}(\mathbf{w}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(1)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(1)}) \rangle, \\ F_{1011} &= \langle \mathbf{q}_0^{(1)}, \mathbf{C}(\mathbf{w}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(2)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)}) \rangle, \\ F_{0120} &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}_0^{(1)}, \mathbf{C}(\bar{\mathbf{w}}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(2)}, \mathbf{w}_0^{(2)}) \rangle, \\ H_{0021} &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}_0^{(2)}, \mathbf{C}(\mathbf{w}_0^{(2)}, \mathbf{w}_0^{(2)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)}) \rangle, \\ H_{1110} &= \langle \mathbf{q}_0^{(2)}, \mathbf{C}(\mathbf{w}_0^{(1)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(2)}) \rangle, \\ H_{2001} &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{q}_0^{(2)}, \mathbf{C}(\mathbf{w}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(1)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)}) \rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $C(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 为由 $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ 所确定的多重对称线性型. 根据多重对称线性型的定义^[40], 对于任意的 $4n$ 维向量:

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_{4n}]^T, \boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_{4n}]^T, \\ \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \dots, \gamma_{4n}]^T.$$

考虑到 $\mathbf{N}(\mathbf{X})$ 的形式(18), 可设

$$C(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = [\underbrace{0, \dots, 0}_{1 \sim n}, C_1(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \dots, \\ C_n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \underbrace{0, \dots, 0}_{1 \sim n}, C_{1+n}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \dots, \\ C_{2n}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})]^T \quad (29)$$

直接由定义可知^[40]

$$\begin{cases} C_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j,k,l=1}^{4n} \frac{\partial^3 N_i(\mathbf{X})}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \Big|_{\mathbf{X}=0} \alpha_j \beta_k \gamma_l \\ C_{i+n}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \sum_{j,k,l=1}^{4n} \frac{\partial^3 N_{i+n}(\mathbf{X})}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} \Big|_{\mathbf{X}=0} \alpha_j \beta_k \gamma_l \end{cases} \quad (30)$$

根据方程(19)可具体计算出:

$$C_i(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -A_{ijkl} (\alpha_j \beta_k \gamma_l + \alpha_j \beta_l \gamma_k + \alpha_k \beta_j \gamma_l + \\ \alpha_l \beta_j \gamma_k + \alpha_k \beta_l \gamma_j + \alpha_l \beta_k \gamma_j) - B_{ijkl} (\alpha_j \beta_k \gamma_{l+n} + \\ \alpha_j \beta_{l+n} \gamma_k + \alpha_k \beta_j \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_j \gamma_k + \alpha_k \beta_{l+n} \gamma_j + \\ \alpha_{l+n} \beta_k \gamma_j) - C_{ijkl} (\alpha_j \beta_{k+n} \gamma_{l+n} + \alpha_j \beta_{l+n} \gamma_{k+n} + \\ \alpha_{k+n} \beta_j \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_j \gamma_{k+n} + \alpha_{k+n} \beta_{l+n} \gamma_j + \\ \alpha_{l+n} \beta_{k+n} \gamma_j) - L_{ijkl} (\alpha_j \beta_{k+2n} \gamma_{l+2n} + \alpha_j \beta_{l+2n} \gamma_{k+2n} + \\ \alpha_{k+2n} \beta_j \gamma_{l+2n} + \alpha_{l+2n} \beta_j \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{l+2n} \gamma_j + \\ \alpha_{l+2n} \beta_{k+2n} \gamma_j) - M_{ijkl} (\alpha_j \beta_{k+2n} \gamma_{l+3n} + \alpha_j \beta_{l+3n} \gamma_{k+2n} + \\ \alpha_{k+2n} \beta_j \gamma_{l+3n} + \alpha_{l+3n} \beta_j \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{l+3n} \gamma_j + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{k+2n} \gamma_j) - N_{ijkl} (\alpha_j \beta_{k+3n} \gamma_{l+3n} + \alpha_j \beta_{l+3n} \gamma_{k+3n} + \\ \alpha_{k+3n} \beta_j \gamma_{l+3n} + \alpha_{l+3n} \beta_j \gamma_{k+3n} + \alpha_{k+3n} \beta_{l+3n} \gamma_j + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{k+3n} \gamma_j) \quad (31)$$

$$C_{i+n}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -A_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_{k+2n} \gamma_{l+2n} + \\ \alpha_{j+2n} \beta_{l+2n} \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{j+2n} \gamma_{l+2n} + \\ \alpha_{l+2n} \beta_{j+2n} \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{l+2n} \gamma_{j+2n} + \\ \alpha_{l+2n} \beta_{k+2n} \gamma_{j+2n}) - B_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_{k+2n} \gamma_{l+3n} + \\ \alpha_{j+2n} \beta_{l+3n} \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{j+2n} \gamma_{l+3n} + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{j+2n} \gamma_{k+2n} + \alpha_{k+2n} \beta_{l+3n} \gamma_{j+2n} + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{k+2n} \gamma_{j+2n}) - C_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_{k+3n} \gamma_{l+3n} + \\ \alpha_{j+2n} \beta_{l+3n} \gamma_{k+3n} + \alpha_{k+3n} \beta_{j+2n} \gamma_{l+3n} + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{j+2n} \gamma_{k+3n} + \alpha_{k+3n} \beta_{l+3n} \gamma_{j+2n} + \\ \alpha_{l+3n} \beta_{k+3n} \gamma_{j+2n}) - L_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_k \gamma_l + \alpha_{j+2n} \beta_l \gamma_k + \\ \alpha_k \beta_j \gamma_{l+2n} + \alpha_l \beta_j \gamma_{k+2n} + \alpha_k \beta_l \gamma_{j+2n} + \\ \alpha_l \beta_k \gamma_{j+2n}) - M_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_k \gamma_{l+n} + \alpha_{j+2n} \beta_{l+n} \gamma_k + \\ \alpha_k \beta_j \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_j \gamma_k + \alpha_k \beta_{l+n} \gamma_{j+2n} + \\ \alpha_{l+n} \beta_{k+n} \gamma_{j+2n}) - N_{ijkl} (\alpha_{j+2n} \beta_{k+n} \gamma_{l+n} +$$

$$\alpha_{j+2n} \beta_{l+n} \gamma_{k+n} + \alpha_{k+n} \beta_{j+2n} \gamma_{l+n} + \alpha_{l+n} \beta_{j+2n} \gamma_{k+n} + \\ \alpha_{k+n} \beta_{l+n} \gamma_{j+2n} + \alpha_{l+n} \beta_{k+n} \gamma_{j+2n}) \quad (32)$$

至此, 方程(29), 即 $C(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ 的具体形式已知. 结合 \mathbf{L}_0 的特征向量 $\mathbf{w}_0^{(1)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(1)}, \mathbf{w}_0^{(2)}, \bar{\mathbf{w}}_0^{(2)}$ 以及 \mathbf{L}_0^* 的特征向量 $\mathbf{q}_0^{(1)}, \bar{\mathbf{q}}_0^{(1)}, \mathbf{q}_0^{(2)}, \bar{\mathbf{q}}_0^{(2)}$, 方程(26)的具体系数(27), (28)可计算出, 从而可得方程(26)的具体形式.

2.2.3 周期运动及其稳定性

对方程(26), 我们有下面的结论^[36]. 取极坐标变换 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 式(26)可以写成

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \epsilon \operatorname{Re}(\lambda'_\epsilon) r_1 + \operatorname{Re} F_{2100} r_1^3 + \operatorname{Re} F_{1011} r_1 r_2^2 + \\ [\operatorname{Re} F_{0120} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) - \operatorname{Im} F_{0120} \sin(2\theta_2 - \\ 2\theta_1)] r_1 r_2^2 \\ \dot{r}_2 = \epsilon \operatorname{Re}(\lambda'_\epsilon) r_2 + \operatorname{Re} H_{0021} r_2^3 + \operatorname{Re} H_{1110} r_2 r_1^2 + \\ [\operatorname{Re} H_{2001} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) + \\ \operatorname{Im} H_{2001} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_2 r_1^2 \\ \dot{\theta}_1 = \omega_0 + \epsilon \operatorname{Im}(\lambda'_\epsilon) + \operatorname{Im} F_{2100} r_1^2 + \operatorname{Im} F_{1011} r_1 r_2^2 + \\ [\operatorname{Re} F_{0120} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \operatorname{Im} F_{0120} \cos(2\theta_2 - \\ 2\theta_1)] r_2^2 \\ \dot{\theta}_2 = \omega_0 + \epsilon \operatorname{Im}(\lambda'_\epsilon) + \operatorname{Im} H_{0021} r_2^2 + \operatorname{Im} H_{1110} r_1 r_2^2 + \\ [-\operatorname{Re} H_{2001} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \\ \operatorname{Im} H_{2001} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_1^2 \end{cases} \quad (33)$$

当 $\epsilon \operatorname{Re}(\lambda'_\epsilon) > 0$ 时, 管道才可发生颤振. 考虑到振幅较小, 因此作变换 $r_1 \rightarrow \sqrt{|\epsilon|} r_1, r_2 \rightarrow \sqrt{|\epsilon|} r_2$, 从而方程(33)可以写成:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = |\epsilon| \{ |\operatorname{Re}(\lambda'_\epsilon)| r_1 + \operatorname{Re} F_{2100} r_1^3 + \\ \operatorname{Re} F_{1011} r_1 r_2^2 + [\operatorname{Re} F_{0120} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) - \\ \operatorname{Im} F_{0120} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_1 r_2^2 \} \\ \dot{r}_2 = |\epsilon| \{ |\operatorname{Re}(\lambda'_\epsilon)| r_2 + \operatorname{Re} H_{0021} r_2^3 + \\ \operatorname{Re} H_{1110} r_2 r_1^2 + [\operatorname{Re} H_{2001} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1) + \\ \operatorname{Im} H_{2001} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_2 r_1^2 \} \\ \dot{\theta}_1 = \omega_0 + |\epsilon| \{ \operatorname{sign}(\epsilon) \operatorname{Im}(\lambda'_\epsilon) + \operatorname{Im} F_{2100} r_1^2 + \\ \operatorname{Im} F_{1011} r_1 r_2^2 + [\operatorname{Re} F_{0120} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \\ \operatorname{Im} F_{0120} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_2^2 \} \\ \dot{\theta}_2 = \omega_0 + |\epsilon| \{ \operatorname{sign}(\epsilon) \operatorname{Im}(\lambda'_\epsilon) + \operatorname{Im} H_{0021} r_2^2 + \\ \operatorname{Im} H_{1110} r_1 r_2^2 + [-\operatorname{Re} H_{2001} \sin(2\theta_2 - 2\theta_1) + \\ \operatorname{Im} H_{2001} \cos(2\theta_2 - 2\theta_1)] r_1^2 \} \end{cases} \quad (34)$$

记 $\varphi = \theta_2 - \theta_1$, 运用平均化方法并结合时间尺度变换 $\tau \rightarrow \varepsilon \tau$, 可将方程(34)其化为

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = [\alpha |r_1 + a_1 r_1^3 + a_2 r_1 r_2^2 + [a_3 \cos(2\varphi) - b_3 \sin(2\varphi)] r_1 r_2^2 \\ \dot{r}_2 = [\alpha |r_2 + a_1 r_2^3 + a_2 r_2 r_1^2 + [a_3 \cos(2\varphi) + b_3 \sin(2\varphi)] r_2 r_1^2 \\ \dot{\varphi} = [-a_3 \sin(2\varphi) + b_3 \cos(2\varphi) + b_2 - b_1] r_1^2 + [b_1 - b_2 - a_3 \sin(2\varphi) - b_3 \cos(2\varphi)] r_2^2 \end{cases} \quad (35)$$

其中, (\cdot) 表示对慢时间求导, 相关系数由方程(26)中的系数确定:

$$\begin{cases} \alpha = \text{Re}(\lambda'_\varepsilon), \\ a_1 = \text{Re}F_{2100} = \text{Re}H_{0021}, b_1 = \text{Im}F_{2100} = \text{Im}H_{0021}, \\ a_2 = \text{Re}F_{1011} = \text{Re}H_{1110}, b_2 = \text{Im}F_{1011} = \text{Im}H_{1110}, \\ a_3 = \text{Re}F_{0120} = \text{Re}H_{2001}, b_3 = \text{Im}F_{0120} = \text{Im}H_{2001}. \end{cases} \quad (36)$$

方程(35)的稳定(不稳定)平衡点对应方程(26)的稳定(不稳定)周期解.

根据文献[36], 不管 α 是正或负, 空间周期运动和平面周期运动的其中一个特征值都是负的: 当 $\alpha > 0$ 时为 -2α , 当 $\alpha < 0$ 时为 2α . 从而两类周期运动的稳定性由其余的特征值确定, 具体而言: 对空间周期运动, 当 $a_3/a_2 > 0$ 时稳定, 当 $a_3/a_2 < 0$ 时不稳定; 对平面周期运动, 当 $a_3/a_1 > 0$ 时不稳定, 当 $a_3/a_1 < 0$ 时稳定.

3 数值仿真

本文中, 在用 Galerkin 方法对原振动方程(9)进行离散时, 式(10)中的模态截断数 n 取为 6^[33, 41] (在已有参考文献中, 其通过递增地取模态截断数并作分岔图, 发现 $n = 6$ 时结果已经收敛), 即式(12)是 12 个自由度的二阶常微分方程组, 式(15)是 24 维的一阶常微分方程组. 结合上文“2.2.1”的叙述, 通过计算可绘出“临界流速—质量比曲线”, 如图 3(a)所示. 对给定的质量比 β , 当流速跨越临界值时, 管道将发生颤振, 做平面周期运动或空间周期运动. 为了说明下文中周期运动的频率, 此处还给出了 ω_0 [见式(25)] 随质量比的变化曲线, 即“临界频率—质量比曲线”, 如图 3(b)所示.

在文献[24]中, 无量纲刚度 k [见式(6)] 的取值为 100, 在文献[31, 32]中, k 的取值为 10^5 . 本文

k 对的取值介于这两者之间, 考察 k 增加时对周期运动的影响. 另外, 如上文所述[式(23)下方的文字], 在不同的应用场合, 质量比 β 可有不同的值, 因此应考察 β 对管道周期运动的影响.

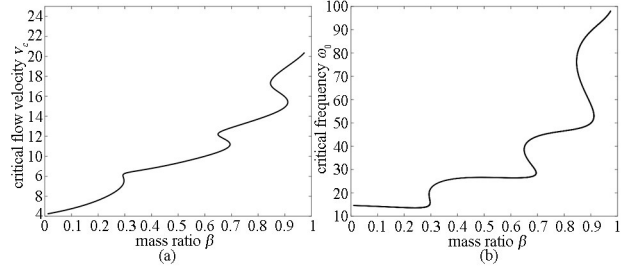
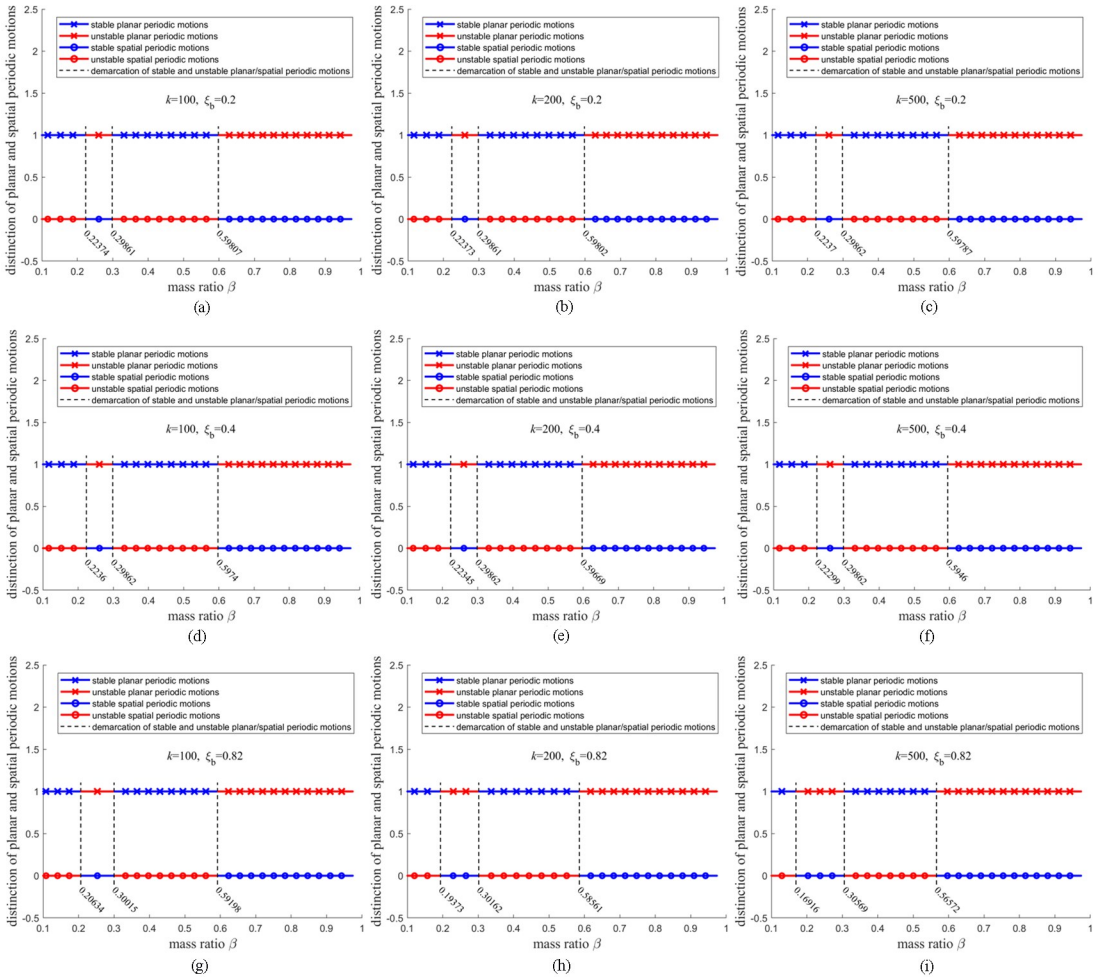


图 3 (a) 临界流速—质量比曲线; (b) 临界频率—质量比曲线
Fig. 3 (a) The critical flow velocity-mass ratio curve; (b) The critical frequency-mass ratio curve

根据上文中“2.2.3 周期运动及其稳定性”部分的分析, 在无量纲刚度 k 分别等于 100、200、500, 以及无量纲约束位置 ξ_b [见图 1 及式(5)] 分别为 0.2、0.4、0.82 时, 通过计算 a_1, a_2, a_3 的值及判断 $a_3/a_2, a_3/a_1$ 的正负, 两类周期运动——平面周期运动和空间周期运动的稳定性关于质量比 β 的分布形式如图 4 所示. 值得一提的是, 管道在做平面周期运动时自由端的轨迹近似是一条线段, 类似数字“1”, 所以把平面周期运动表示在纵坐标为“1”的位置; 而管道在做空间周期运动时自由端的轨迹是一个圆周, 类似数字“0”, 所以把空间周期运动表示在纵坐标为“0”的位置. 两类周期运动的稳定性的分布受参数 k 及 ξ_b 的影响, 具体而言, 对给定的 ξ_b, k 增加时, 稳定平面(或空间)周期运动和不稳定平面(或空间)周期运动的左分界点往左移动, 中间分界点往右移动或保持不变, 右分界点往左移动; 对给定的 k, ξ_b 增加时, 稳定平面(或空间)周期运动和不稳定平面(或空间)周期运动的左分界点往左移动, 中间分界点往右移动或保持不变, 右分界点往左移动. 进一步观察可知, 图 4(a→b→c)的变化和图 4(d→e→f)的变化不甚明显, 但图 4(g→h→i)的变化较为明显, 即约束距离悬臂端越远(对应 ξ_b 越大), 弹簧刚度的变化对管道动力学行为的影响越明显. 从图 4(a→d→g)、图 4(b→e→h)、图 4(c→f→i)的变化趋势看, 对给定的 k , 比较 ξ_b 从 0.2 增加到 0.4 以及从 0.4 增加到 0.82 时管道动力学性质的变化, 后者更为明显; 且 k 越大, ξ_b 从 0.2 增加到 0.4、再增加到 0.82 时, 管道动力学性质的变化越显著.

图4 k 和 ξ_b 取不同值时两类周期运动的稳定性随质量比的变化Fig. 4 The variation of the stability of two types of periodic motion with the mass ratio for different values of k and ξ_b

根据图4可制出表1和表2,从这两个表可以看出,在 ξ_b 一定时增大 k ,或在 k 一定时增大 ξ_b ,均会使得稳定的平面周期运动所对应的质量比区间变小,稳定的空间周期运动所对应的质量比区间变大.总的来讲, k 和 ξ_b 的增加会使得稳定的平面周期运动所对应的质量比区间减小,稳定的空间周期运动所对应的质量比区间增大.下面分别取定几组具体的参数,对方程(12)进行数值计算,并将计算结果代入方程(10)得到 η 、 ζ 及相应的 $\dot{\eta}$ 、 $\dot{\zeta}$,从而验证图4所示的稳定周期运动的类型.

表1 稳定的平面周期运动所对应的质量比 β 的区间总长
Table 1 The total length of interval of mass ratio corresponding to stable planar periodic motions

ξ_b	$k=100$	$k=200$	$k=500$
0.2	0.5232	0.52314	0.52295
0.4	0.52238	0.52152	0.51897
0.82	0.49817	0.47772	0.42919

表2 稳定的空间周期运动所对应的质量比 β 的区间总长
Table 2 The total length of interval of mass ratio corresponding to stable spatial periodic motions

ξ_b	$k=100$	$k=200$	$k=500$
0.2	0.4768	0.47686	0.47705
0.4	0.47762	0.47848	0.48103
0.82	0.50183	0.52228	0.57081

取 $k=100$, $\xi_b=0.82$, $\beta=0.19$,根据图4(g)的预测,此时管道做稳定的平面周期运动.在该组参数下,数值求解方程(12)并结合方程(10)可得 η 、 ζ 、 $\dot{\eta}$ 及 $\dot{\zeta}$,其相互间的关系如图5(a)~图5(d)所示.需要说明的是,为便于数值模拟,在图5~图8中,流速跨越临界值的增量均取为0.2;另外,在图5~图8中,彩色的线或点的含义是:蓝色对应管道的瞬态解,红色对应管道的稳态解,品红色表示管道的轴线,子图(a)~图(d)的含义是:(a)管道自由端在两个横向上的位移关系,(b)整个管道做稳态振

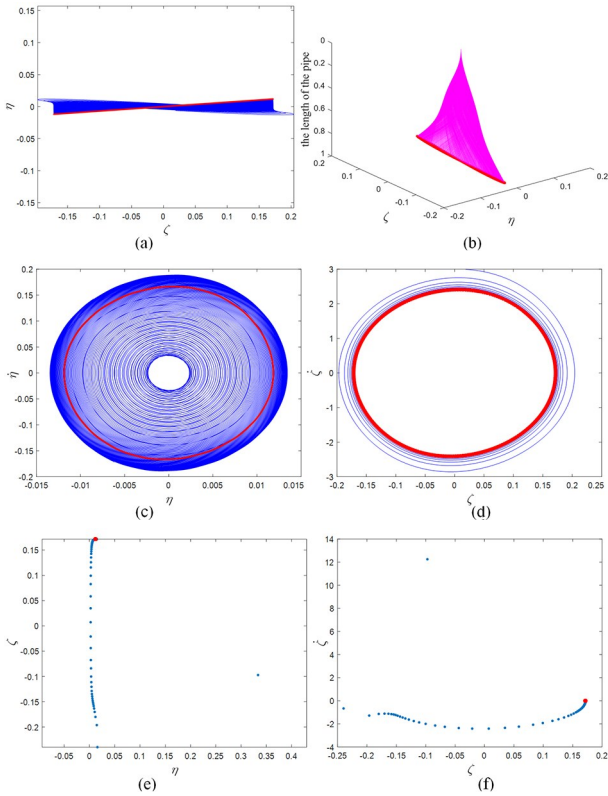


图 5 (a)管道自由端在两个方向上的位移关系;(b)整个管道的稳态振动;(c)管道自由端在 η 方向上的位移-速度关系;(d)管道自由端在 ζ 方向上的位移-速度关系;(e, f) Poincaré 截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系

Fig. 5 (a) The position relationship of the free ends of the pipe in two directions; (b) The steady-state vibration of the whole pipe; (c) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in η direction; (d) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in ζ direction; (e, f) The η - ζ and ζ - $\dot{\zeta}$ relationship diagrams on the Poincaré section

动时的位形图, (c) η 方向上的位移-速度关系, (d) 为 ζ 方向上的速度-位移关系. 以 $\dot{\eta} = 0$ 为 Poincaré 截面作映射图, 该截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系如图 5(e)~图 5(f) 所示, 可见映射收敛到不动点. 综合图 5 可知, $k = 100, \xi_b = 0.82, \beta = 0.19$ 时管道做稳定的平面周期运动, 与图 4(g) 的预测一致. 关于振动频率: 在该质量比 (即 $\beta = 0.19$) 处, 流速取临界值 5.4901 [如图 3(a)] 时, 由图 3(b) 知管道的临界频率为 13.7516; 当流速超过临界值 0.2 (为小扰动) 时, 通过数值计算可得管的自振频率为 13.9101, 与临界频率颇为接近.

取 $k = 500, \xi_b = 0.82, \beta = 0.19$, 根据图 4(i) 的预测, 此时管道做稳定的空间周期运动. 通过方程 (12) 和方程 (10) 的数值解所得到的 $\eta, \zeta, \dot{\eta}$ 及 $\dot{\zeta}$ 的关系如图 6(a)~图 6(d) 所示, 以 $\dot{\eta} = 0$ 为 Poincaré 截面作映射图, 该截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系如图 6(e)~图 6(f) 所示, 映射收敛到不动点. 图 6 表明,

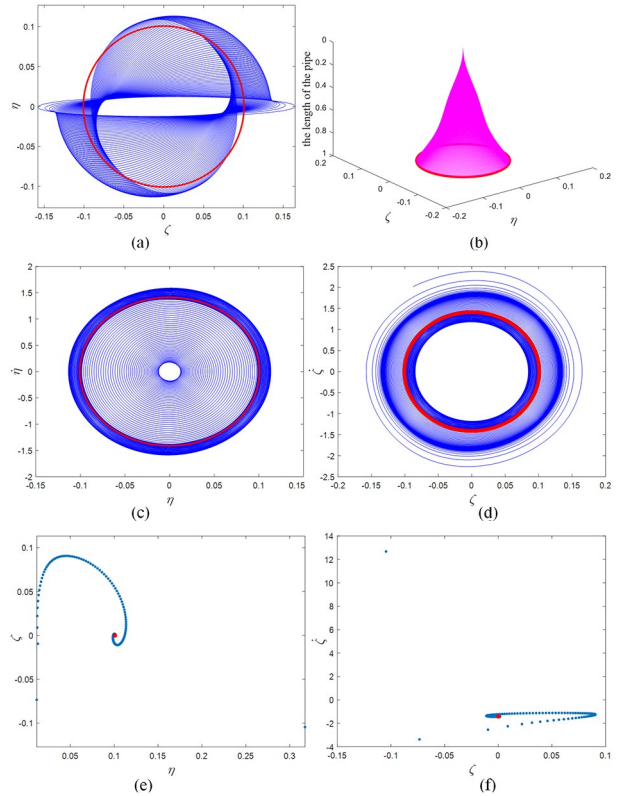


图 6 (a)管道自由端在两个方向上的位移关系;(b)整个管道的稳态振动;(c)管道自由端在 η 方向上的位移-速度关系;(d)管道自由端在 ζ 方向上的位移-速度关系;(e, f) Poincaré 截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系

Fig. 6 (a) The position relationship of the free ends of the pipe in two directions; (b) The steady-state vibration of the whole pipe; (c) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in η direction; (d) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in ζ direction; (e, f) The η - ζ and ζ - $\dot{\zeta}$ relationship diagrams on the Poincaré section

管道做稳定的空间周期运动, 与图 4(i) 的预测一致. 图 6 和图 5 相比, 只有 k 的值改变了, 说明 k 的增加使得原本稳定的平面周期运动变成了稳定的空间周期运动, 印证了上文中关于“ k 的变化对周期运动的影响”的陈述. 关于振动频率: 此处质量比 β 仍为 0.19, 临界流速、临界频率仍分别为 5.4901、13.7516 (如图 3 所示); 当流速超过临界值 0.2 (为小扰动) 时, 通过数值计算可得管道的自振频率为 13.9968, 与临界频率也很接近, 但与图 5 中的自振频率 13.9101 有微小差别, 表明不同 k 值所引起的非线性项的差异影响了管道的自振频率.

取 $k = 500, \xi_b = 0.2, \beta = 0.58$, 根据图 4(c) 的预测, 此时管道做稳定的平面周期运动. 基于方程 (12) 和方程 (10) 的数值解所得到的 $\eta, \zeta, \dot{\eta}$ 及 $\dot{\zeta}$ 的关系如图 7(a)~图 7(d) 所示, 在 Poincaré 截面 $\dot{\eta} = 0$ 上, η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系如图 7(e)、图 7(f) 所示, 蓝色的瞬态点收敛到红色的稳态不动点. 由图 7

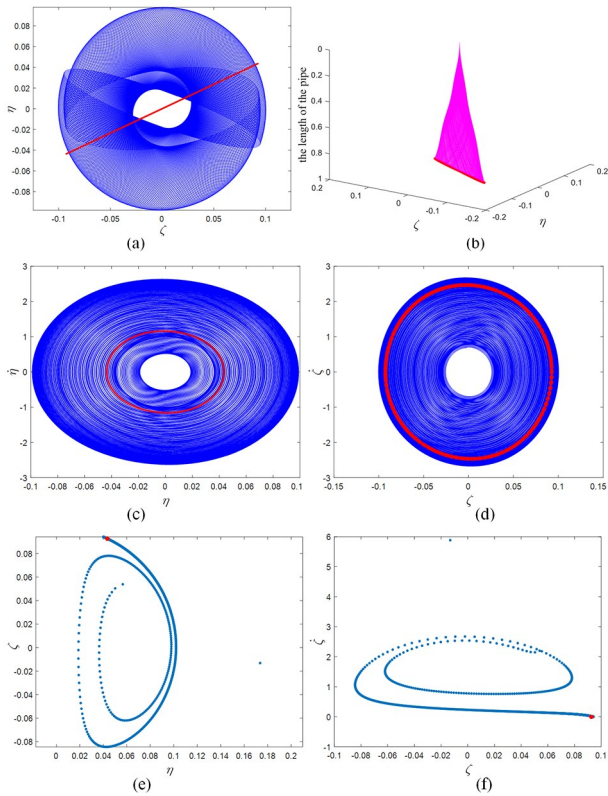


图7 (a)管道自由端在两个方向上的位移关系;(b)整个管道的稳态振动;(c)管道自由端在 η 方向上的位移-速度关系;(d)管道自由端在 ζ 方向上的位移-速度关系;

(e, f) Poincaré截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系

Fig. 7 (a) The position relationship of the free ends of the pipe in two directions; (b) The steady-state vibration of the whole pipe; (c) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in η direction; (d) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in ζ direction; (e, f) The η - ζ and ζ - $\dot{\zeta}$ relationship diagrams on the Poincaré section

知管道做稳定的平面周期运动,与图4(c)的预测一致.在振动的频率方面,此时的质量比(即 $\beta = 0.58$)对应的临界流速[如图3(a)]和临界频率[如图3(b)]分别为9.8530和26.4882;当流速超过临界值0.2(为小扰动)时,通过数值计算所得到的管的自振频率为26.8972,接近临界频率.

取 $k = 500, \xi_b = 0.82, \beta = 0.58$,根据图4(i)的预测,此时管道做稳定的空间周期运动.方程(12)和方程(10)的数值解所给出的 $\eta, \zeta, \dot{\eta}$ 及 $\dot{\zeta}$ 的关系如图8(a)~图8(d)所示,以 $\dot{\eta} = 0$ 为Poincaré截面作映射图,其给出的 η 与 ζ 及 $\dot{\zeta}$ 及 $\dot{\zeta}$ 的关系如图8(e)、图8(f),蓝色的瞬态点收敛到红色的稳态不动点.图8表明管道做稳定的空间周期运动,与图4(i)的预测一致.图8与图7在参数上的差别仅为 ξ_b ,但运动形式却有改变,其表明: ξ_b 的增加使得原本稳定的平面周期运动变成了稳定的空间周期运动,印证了上文中关于“ ξ_b 的变化对周期运动的影

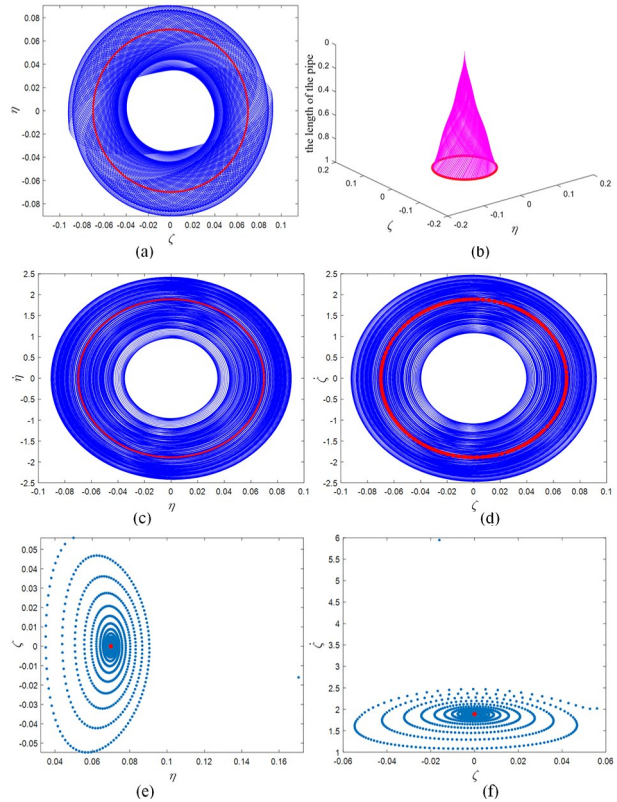


图8 (a)管道自由端在两个方向上的位移关系;(b)整个管道的稳态振动;(c)管道自由端在 η 方向上的位移-速度关系;(d)管道自由端在 ζ 方向上的位移-速度关系;

(e, f) Poincaré截面上 η 与 ζ 及 ζ 与 $\dot{\zeta}$ 的关系

Fig. 8 (a) The position relationship of the free ends of the pipe in two directions; (b) The steady-state vibration of the whole pipe; (c) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in η direction; (d) The velocity-displacement relationship diagram of the free ends of the pipe in ζ direction; (e, f) The η - ζ and ζ - $\dot{\zeta}$ relationship diagrams on the Poincaré section

响”的陈述.在振动的频率方面,图8中的质量比、临界流速和临界频率和图7中的相同,分别为0.58、9.8530和26.4882;当流速超过临界值0.2(为小扰动)时,通过数值计算所得到的管的自振频率为27.0361,虽也接近临界频率,但和图7中的自振频率26.8972有微小差别,原因在于两图所对应的 ξ_b 值不同,从而非线性项不同,最终导致管道的自振频率有区别.

4 结论

本文研究了具有环状运动约束的悬臂输流管道,侧重从 Galerkin 离散化方程的系数出发判定管道的周期运动类型(包括平面周期运动和空间周期运动)及稳定性,即式(13)、式(26)、式(28)、式(29)、式(31)、式(32)、式(36).基于振动方程的6模态 Galerkin 离散化方程,对不同的约束刚度系数和约束放置位置,考察了该系统的两类周期运动

的稳定性随质量比的变化情况,总结了两者对管道的两类周期运动及其稳定性的影响规律.具体而言:通过递增地取定约束刚度的值 $k = 100, k = 200, k = 500$,以及递增地取定约束位置距管道的固定端的值 $\xi_b = 0.82, \xi_b = 0.4, \xi_b = 0.82$,分析了管道的平面周期运动和空间周期运动的稳定性沿质量比 β 的分布情况,发现 k 和 ξ_b 的增加会使得管道稳定的平面周期运动所对应的质量比区间减小,稳定的空间周期运动所对应的质量比区间增大,且运动约束到管道固定端的距离 ξ_b 越大,弹簧刚度的变化对管道动力学行为的影响越明显.借助常微分方程的数值解、位形图、相图和 Poincaré 映射图,相关结果得到了验证.

参考文献

- [1] BENJAMIN T B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid- I. Theory [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1961, 261 (1307): 457-486.
- [2] GREGORY R W, PAÏDOUSSIS M P. Unstable oscillation of tubular cantilevers conveying fluid I. Theory [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences, 1966, 293(1435): 512-527.
- [3] PAÏDOUSSIS M P, ISSID N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 33(3): 267-294.
- [4] HOLMES P J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations; a finite dimensional analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 1977, 53(4): 471-503.
- [5] HOLMES P, MARSDEN J. Bifurcation to divergence and flutter in flow-induced oscillations; an infinite dimensional analysis [J]. Automatica, 1978, 14(4): 367-384.
- [6] ROUSSELET J, HERRMANN G. Dynamic behavior of continuous cantilevered pipes conveying fluid near critical velocities [J]. Journal of Applied Mechanics, 1981, 48(4): 943-947.
- [7] ZHANG L X, HUANG W H. Analysis of nonlinear dynamic stability of liquid-conveying pipes [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 23(9): 1071-1080.
- [8] SRI NAMACHCHIVAYA N, TIEN W M. Bifurcation behavior of nonlinear pipes conveying pulsating flow [J]. Journal of Fluids and Structures, 1989, 3 (6): 609-629.
- [9] XU J, YANG Q B. Flow-induced internal resonances and mode exchange in horizontal cantilevered pipe conveying fluid (I) [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(7): 935-941.
- [10] LUNDGREN T S, SETHNA P R, BAJAJ A K. Stability boundaries for flow induced motions of tubes with an inclined terminal nozzle [J]. Journal of Sound and Vibration, 1979, 64(4): 553-571.
- [11] BAJAJ A K, SETHNA P R. Flow induced bifurcations to three-dimensional oscillatory motions in continuous tubes [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1984, 44(2): 270-286.
- [12] 杨佳丽, 杨虹, 李伟. 旋转 Timoshenko 输流管道的固有频率和稳定性分析[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(2): 58-65.
YANG J L, YANG H, LI W. Natural frequency and stability analysis of rotating Timoshenko pipe conveying fluid [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(2): 58-65. (in Chinese)
- [13] ZHANG W M, MENG G. Nonlinear dynamic analysis of electrostatically actuated resonant MEMS sensors under parametric excitation [J]. IEEE Sensors Journal, 2007, 7(3): 370-380.
- [14] RINALDI S, PRABHAKAR S, VENGALLATORE S, et al. Dynamics of microscale pipes containing internal fluid flow: Damping, frequency shift, and stability [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(8): 1081-1088.
- [15] WANG L. Size-dependent vibration characteristics of fluid-conveying microtubes [J]. Journal of Fluids and Structures, 2010, 26(4): 675-684.
- [16] 郭勇, 谢建华. 微尺度悬臂管的空间弯曲振动—非线性运动方程及尺度效应[J]. 振动与冲击, 2017, 36(22): 65-72.
GUO Y, XIE J H. Three-dimensional flexural vibration of a micro-scale cantilever pipe-nonlinear equations of motion and scale effect [J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(22): 65-72. (in Chinese)
- [17] 郭勇, 谢建华. 微尺度悬臂管颤振的研究 [J]. 动力学与控制学报, 2018, 16(1): 53-64.
GUO Y, XIE J H. Research on flutter of micro-scale cantilever pipe [J]. Journal of Dynamics and

- Control, 2018, 16(1): 53–64. (in Chinese)
- [18] ZHOU K, NI Q, CHEN W, et al. New insight into the stability and dynamics of fluid-conveying supported pipes with small geometric imperfections [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(5): 703–720.
- [19] YE S Q, DING H, WEI S, et al. Non-trivial equilibriums and natural frequencies of a slightly curved pipe conveying supercritical fluid [J]. Ocean Engineering, 2021, 227: 108899.
- [20] GUO Y. Periodic motion of microscale cantilevered fluid-conveying pipes with symmetric breaking on the cross-section [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 116: 277–326.
- [21] 唐治, 高传康, 丁千, 等. 输流管道动力学与控制领域的最新进展[J]. 动力学与控制学报, 2023, 21(6): 18–30.
TANG Y, GAO C K, DING Q, et al. Review on dynamic and control of pipes conveying fluidan [J]. Journal of Dynamics and Control, 2023, 21(6): 18–30. (in Chinese)
- [22] ZHANG Y L, CHEN L Q. External and internal resonances of the pipe conveying fluid in the supercritical regime [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(9): 2318–2337.
- [23] WANG Y K, TANG M, YANG M, et al. Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying pulsating fluid [J]. Applied Mathematical Modelling, 2023, 114: 502–524.
- [24] PAÏDOUSSIS M P, LI G X, MOON F C. Chaotic oscillations of the autonomous system of a constrained pipe conveying fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1989, 135(1): 1–19.
- [25] PAÏDOUSSIS M P, SEMLER C. Nonlinear and chaotic oscillations of a constrained cantilevered pipe conveying fluid; a full nonlinear analysis [J]. Nonlinear Dynamics, 1993, 4(6): 655–670.
- [26] JIN J D. Stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 208(3): 427–439.
- [27] WANG L, NI Q. A note on the stability and chaotic motions of a restrained pipe conveying fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 296(4/5): 1079–1083.
- [28] GUO Y. Fluid-induced nonlinear vibration of a cantilevered microtube with symmetric motion constraints [J]. Shock and Vibration, 2020, 2020: 8852357.
- [29] WANG L. A further study on the non-linear dynamics of simply supported pipes conveying pulsating fluid [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2009, 44(1): 115–121.
- [30] PENG G, XIONG Y M, GAO Y, et al. Non-linear dynamics of a simply supported fluid-conveying pipe subjected to motion-limiting constraints: two-dimensional analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 435: 192–204.
- [31] NI Q, WANG Y K, TANG M, et al. Nonlinear impacting oscillations of a fluid-conveying pipe subjected to distributed motion constraints [J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 81(1): 893–906.
- [32] 王乙坤, 王琳. 分布式运动约束下悬臂输液管的参数共振研究[J]. 力学学报, 2019, 51(2): 558–568.
WANG Y K, WANG L. Parametric resonance of a cantilevered pipe conveying fluid subjected to distributed motion constraints [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2019, 51(2): 558–568. (in Chinese)
- [33] WANG Y K, WANG L, NI Q, et al. Non-planar responses of cantilevered pipes conveying fluid with intermediate motion constraints [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 93(2): 505–524.
- [34] WADHAM-GAGNON M, PAÏDOUSSIS M P, SEMLER C. Dynamics of cantilevered pipes conveying fluid. Part 1: Nonlinear equations of three-dimensional motion [J]. Journal of Fluids and Structures, 2007, 23(4): 545–567.
- [35] 徐鉴, 王琳, 输流管动力学分析和控制[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
XU JIAN, WANG LIN, Dynamics and control of fluid-conveying pipe systems [M]. Beijing: Science Press, 2015. (in Chinese)
- [36] GUO Y, XIE J H, WANG L. Three-dimensional vibration of cantilevered fluid-conveying micropipes-types of periodic motions and small-scale effect [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2018, 102: 112–135.
- [37] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(10): 2731–2743.
- [38] HOSSEINI M, BAHAADINI R. Size dependent stability analysis of cantilever micro-pipes conveying

- fluid based on modified strain gradient theory [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2016, 101: 1–13.
- [39] HU K, WANG Y K, DAI H L, et al. Nonlinear and chaotic vibrations of cantilevered micropipes conveying fluid based on modified couple stress theory [J]. *International Journal of Engineering Science*, 2016, 105: 93–107.
- [40] KUZNETSOV Y A. *Elements of applied bifurcation theory* [M]. New York: Springer New York, 2004.
- [41] GHAYESH M H, PAÏDOUSSIS M P. Three-dimensional dynamics of a cantilevered pipe conveying fluid, additionally supported by an intermediate spring array [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010, 45(5): 507–524.