

# 基于索—梁结构的斜拉桥非线性振动仿真研究<sup>\*</sup>

康厚军<sup>1,2</sup> 尹昆<sup>1,2</sup> 苏潇阳<sup>1,2†</sup> 郭铁丁<sup>1,2</sup> 丛云跃<sup>1,2</sup>

(1. 广西大学 土木建筑工程学院, 南宁 530004)

(2. 广西大学 工程力学研究中心, 南宁 530004)

**摘要** 本文建立了索—梁结构的有限元模型,对斜拉桥线性和非线性振动问题进行研究.首先对结构进行模态分析,发现结构振动表现出全局模态,局部模态以及混合模态,且索梁两者之间固有频率相互影响,对低阶频率影响较大,对高阶频率影响较小.其次,应用有限元软件对索—梁结构的自由振动和强迫振动进行仿真研究.结果表明:整个自由振动过程中频率有先增大后减小的趋势,且最终小于真实频率;在强迫振动中,观察到了丰富的非线性振动现象,包括索的亚谐波共振和内共振,与以往的实验和理论研究结果定性上得到验证;为斜拉桥全桥非线性动力学分析提供参考.

**关键词** 斜拉桥, 索—梁结构, 有限元仿真, 非线性振动, 共振

中图分类号:O322

文献标志码:A

## Nonlinear Vibration Simulation Study of Cable-Stayed Bridge Based on Cable-Beam Structure<sup>\*</sup>

Kang Houjun<sup>1,2</sup> Yin Kun<sup>1,2</sup> Su Xiaoyang<sup>1,2†</sup> Guo Tieding<sup>1,2</sup> Cong Yunyue<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

(2. Scientific Research Center of Engineering Mechanics, Guangxi University, Nanning 530004, China)

**Abstract** In this paper, the finite element model of cable-beam structure is established to study the linear and nonlinear vibration of cable-stayed bridge. Firstly, the modal analysis of the structure is carried out, and it is found that the vibration of the structure shows global modes, local modes and coupled modes, and the natural frequencies of the cable and the beam interact with each other, which has a greater impact on the low order frequency and a lesser impact on the high order frequency. Secondly, the free vibration and forced vibration of cable-beam structure are simulated by finite element software. The results show that during the entire free vibration process, the frequency first increases and then decreases, and is ultimately smaller than the true frequency. In the forced vibration, abundant nonlinear vibration phenomena are observed, including subharmonic resonance and internal resonance of the cable, which are qualitatively verified with previous experimental and theoretical results. It provides a reference for nonlinear dynamics analysis of cable-stayed bridge.

**Key words** cable-stayed bridge, cable-beam structure, finite element simulation, nonlinear vibration, resonance

## 引言

由于优良的力学性能,索-梁结构被广泛用于工程中,如塔吊、斜拉桥、人行天桥以及高空悬挑结构等。斜拉索由于刚度小、阻尼低、质量轻的特点,同时受到几何非线性影响,容易在各种激励下发生非线性振动,影响结构安全、使用性能与寿命。索-梁结构同时具有柔性索和弹性梁的力学性能,振动行为更为复杂。

针对这一结构,国内外学者对其复杂的动力学行为进行了大量的研究。Fujino等<sup>[1]</sup>进行了索-梁结构的缩尺模型试验,观察到全局模态和局部模态线性和非线性的耦合振动现象。赵跃宇等<sup>[2]</sup>应用伽辽金和多尺度方法对索-梁组合系统的内共振问题进行了研究,并对该系统的内共振行为进行了数值模拟。Gattulli等<sup>[3,4]</sup>深入研究了索-梁结构非线性振动相互作用机制,提出了模态局部化因子,从系统整体角度探究各参数对线性和非线性特性的影响。Wei等<sup>[5]</sup>运用哈密顿原理建立了索-梁组合结构非线性动力学方程,研究了索的垂跨比、质量比和刚度比对非线性响应的影响。Wang等<sup>[6]</sup>利用直接展开法和离散方法求解了斜拉梁模型的非线性模态特征,并探究运动方程中非线性项的影响。Zhang等<sup>[7]</sup>建立了考虑索梁耦合的主参数共振模型,并以某斜拉桥拉索为研究对象,进行了多种工况下的数值模拟分析。丛云跃等<sup>[8]</sup>建立了单梁-多索力学模型,研究索和梁的刚度对模型的模态及力学特性的影响。吕建根等<sup>[9]</sup>研究了索-梁结构中抗弯刚度对斜拉索幅频响应、激频响应的影响。Su等<sup>[10]</sup>运用传递矩阵法求解了多索斜拉桥模型的面内自由振动问题,确定了频率和模态,并进行了参数分析。Peng等<sup>[11]</sup>主要探究了时滞反馈控制系统对索-梁组合结构的面内非线性响应的影响,合理选取反馈控制机制能极大的抑制系统的振动响应。Cong等<sup>[12,13]</sup>通过理论分析研究了悬臂端受到集中谐波激励时索-梁组合结构的非线性动力响应和动力特性。然而,上述成果主要为理论研究,尚需进行相关实验或数值模拟验证。

由于实验费用和条件限制,近年来国内外学者开始应用有限元软件对斜拉桥的动力学问题进行研究。如孙正华等<sup>[14]</sup>通过建立有限元模型进行模态分析,并将计算结果与环境振动试验结果进行比

较,验证了整桥有限元模型的有效性。Ouni等<sup>[15]</sup>考虑面内与面外运动的二次和三次非线性耦合,建立了斜拉桥的有限元模型,观察到索与桥面之间存在能量传递现象。王涛等<sup>[16]</sup>提出了一种非线性静/动力有限元计算程序,对索-梁结构的模态特性与其在外部激励作用下的振动响应进行了研究。吴庆雄等<sup>[17]</sup>采用斜拉桥整体动力分析有限元方法建立了索-梁结构有限元模型,与试验结果进行比较验证了所建有限元模型的正确性。然而,上述对斜拉桥的有限元研究成果主要集中在线性理论,对其复杂的非线性振动行为尚还有很多的研究空间,需要进一步探究。

基于前人的研究,斜拉桥多自由度多模态理论模型研究还存在求解困难、计算效率低等不足<sup>[18]</sup>。鉴于此,本文提供一种高效有限元分析方法,建立索-梁结构的有限元模型,对斜拉桥线性和非线性振动问题进行研究,旨在为斜拉桥全桥非线性动力学分析提供参考,为解决大跨度斜拉桥的工程实际问题提供可靠依据。

## 1 模态分析

应用有限元软件 ANSYS 建立索-梁结构的有限元模型如图 1 所示。梁采用 Beam 3 单元,划分单元数为 200,该单元为 2D 弹性梁单元,可承受轴向拉压和弯曲,每个节点有 3 个自由度。索采用 Link 1 单元,划分单元数为 600,该单元为 2D 杆单元,可模拟桁架、连杆、索和弹簧等,可承受轴向拉压但不能承受弯矩,每个节点具有 2 个自由度。索梁交点处重合节点建立耦合关系,节点位移误差不超过 0.0001m,并施加向下集中力,使梁的静力构型水平。所选梁和索的物理参数如下:梁的长度  $l_b = 82.98\text{m}$ ,单位长度质量  $m_b = 1.785 \times 10^4 \text{kg/m}$ ,

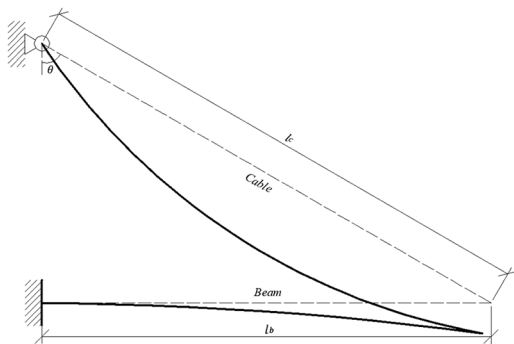


图1 索-梁结构有限元模型

Fig. 1 Finite element model of cable-beam structure

弹性模量  $E_b = 55\text{GPa}$ , 截面面积  $A_b = 2.158\text{m}^2$ ; 索的长度  $l_c = 95.82\text{m}$ , 单位长度质量  $m_c = 45.82\text{kg/m}$ , 弹性模量  $E_c = 210\text{GPa}$ , 截面面积  $A_c = 7.8 \times 10^{-3}\text{m}^2$ , 初始索力  $H = 1.5 \times 10^6\text{N}$ , 倾斜角  $\theta = \pi/6\text{rad}$ .

对结构进行模态分析, 得到索-梁结构的前6阶模态如图2所示. 由图可知: 结构振动表现出全局模态、局部模态以及混合模态, 这与以往理论研究保持一致<sup>[19]</sup>. 其中全局模态主要是以梁的振动起主导作用, 如第一阶模态和第三阶模态; 局部模态主要为索的振动, 如第二阶模态、第四阶模态和第六阶模态; 混合模态为梁和索共同参与运动的模态, 如第五阶模态.

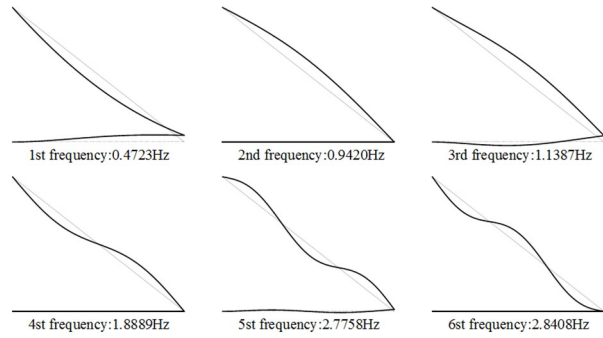


图2 索-梁结构的前6阶模态

Fig. 2 The first 6 modes of cable-beam structure

此外, 利用有限元软件建立了相同参数下的悬臂梁和铰支索模型, 计算出其频率值如表1所示, 并得到悬臂梁和铰支索的前3阶模态如图3所示.

表1 悬臂梁、铰支索和索-梁结构的固有频率

Table 1 Natural frequencies of beams, cables and cable-beam structure

前6阶频率/Hz	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
悬臂梁	0.1562	0.9781	2.7336	5.3428	7.7688	8.8021
铰支索	0.9441	1.8883	2.8324	3.7766	4.7208	5.6650
索-梁结构	0.4723	0.9421	1.1387	1.8889	2.7758	2.8408

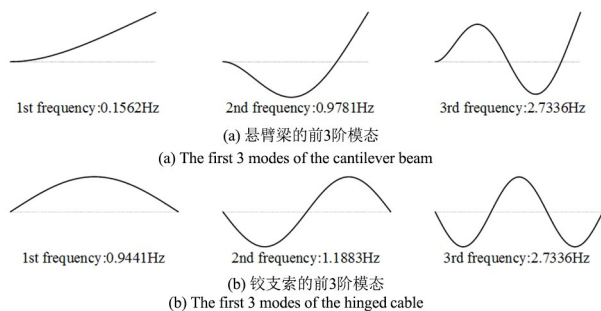


图3 悬臂梁和铰支索的前3阶模态

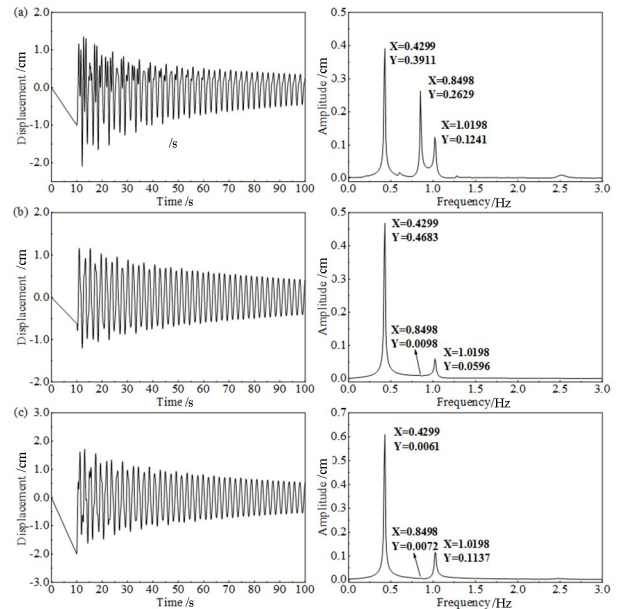
Fig. 3 The first 3 modes of the cantilever beam and the hinged cable

对比图2和图3发现: 索-梁结构第一阶模态和第三阶模态(全局模态)分别对应悬臂梁的第一阶模态和第二阶模态. 索-梁结构第二阶模态、第四阶模态和第六阶模态(局部模态)分别对应铰支索的第一阶模态、第二阶模态和第三阶模态. 索-梁结构第五阶模态(耦合模态)对应悬臂梁的第三阶模态和铰支索的第三阶模态. 另外由表1可知: 在索-梁结构中, 索梁两者之间的固有频率相互影响, 对低阶频率影响较大, 对高阶频率影响较小. 索-梁结构的全局模态频率相对于悬臂梁的频率有所增大, 这是由于斜拉索对主梁起着弹性支承的作用, 从而使索-梁结构整体刚度增大, 全局模态频率增大. 索-梁结构的局部模态频率相对于单索的频率有所不同, 这是由于在计算单索频率时边界条件为两端铰接, 而在计算索-梁结构时一端变为和梁耦合连接, 边界条件对其产生了一定影响.

## 2 非线性振动分析

### 2.1 索-梁结构自由振动

为了解振动过程中, 斜拉索和主梁模态间的耦合振动情况, 对索-梁结构自由振动进行仿真模拟. 在索梁交点处施加初始位移, 得到索跨中、梁跨中和索梁交点的时程曲线, 并将测得的时程曲线分为3段分别进行频谱分析, 如图4所示.



(A) 频谱分析(第一段): (a) 索跨中点; (b) 梁跨中点; (c) 索梁交点  
(A) Spectrum analysis (Stage 1): (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span; (c) Intersection of cable and beam

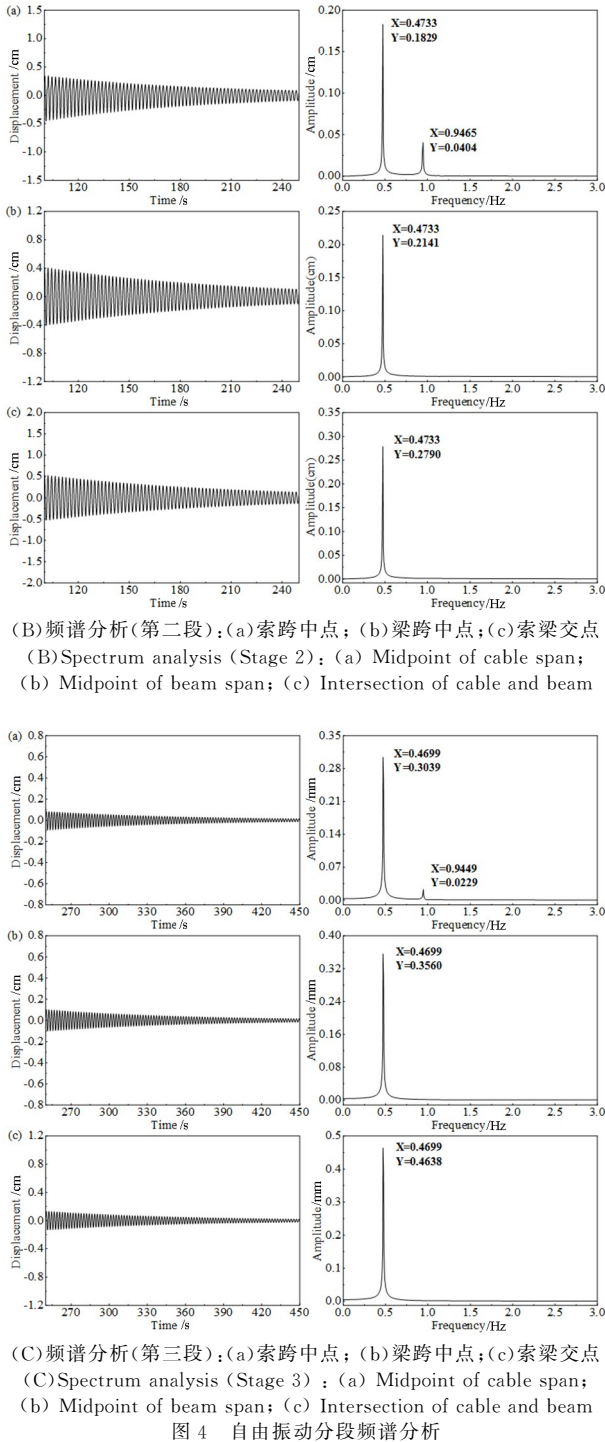


图 4 自由振动分段频谱分析

由图 4 可知,结构振动以一阶为主,同时也激发出了二、三阶振动.在第一段数据的频谱图中存在三个频率,即 0.4299Hz、0.8498Hz 和 1.0198Hz,发现低于整体结构的前三阶频率.由于结构振动初期振幅较大导致结构刚度变小致使频率变小,并伴随有索梁各阶模态能量的相互传递.从频谱分析的第二段和第三段可以看出,随着阻尼对能量的消耗结构的振动幅值逐渐减小,且频率逐渐靠近整体结构的真实频率 0.4723Hz,但在整个振动过程中频率有

先增大后减小的趋势,最终小于真实频率.此外,在三段数据中索跨中点频谱图都出现接近 0.9441Hz 的频率,说明激起了索的一阶模态振动.

### 2.2 索-梁结构强迫振动

为研究索-梁结构的非线性振动行为,本文在索梁交点位置进行两个工况的研究.工况一以结构一阶模态(全局模态)频率进行激励;工况二以结构第四阶模态(局部模态)频率进行激励.两个工况的激励频率分别为 0.4723Hz(工况一)和 1.8889 Hz(工况二),激励幅值为 0.02m,激励时间为 600s.

图 5 为工况一下,索跨中点、梁跨中点和索梁交点的时程响应图.由图可知:索的振动幅值由小变大,最终稳态幅值为 0.0245m,大于激励幅值,且包含多个频率.梁的振动幅值由大变,最终稳态幅值为 0.0153m,小于激励幅值.索梁交点幅值与激励幅值一致.

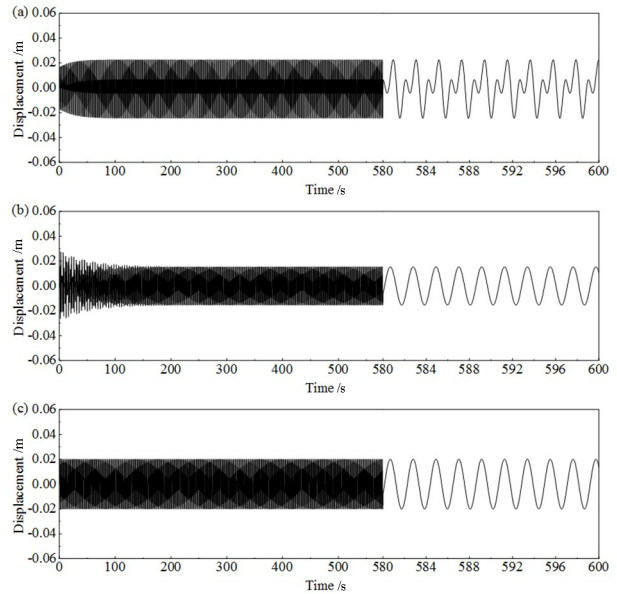


图 5 工况一时程响应图: (a) 索跨中点; (b) 梁跨中点; (c) 索梁交点  
 Fig.5 Time history curve of condition one; (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span; (c) Intersection of cable and beam

为更深入分析梁和索的能量传递以及共振现象,图 6、图 7 分别给出了工况一下索跨中点和梁跨中点的瞬态和稳态时频图,其中频率值通过傅里叶变换求得.

由图 6、图 7 可知:索跨中点的瞬态和稳态时频图都出现了三个频率,为 0.4699Hz、0.9398Hz 和 1.4197Hz.其中 0.4699Hz 接近结构的一阶频率,说明激起了结构的一阶振动(全局模态),同时该频率也低于激励频率,这与上文自由振动的结果

保持一致。0.9398Hz 接近索的一阶频率,说明激起了索的一阶振动(局部模态),即全局模态与局部模态发生了 1:2 内共振。1.4197Hz 接近激励频率的三倍,这与通过多尺度法求解得到的响应中包含有频率为激励频率倍数的谐波项保持一致<sup>[20]</sup>。梁跨中点的瞬态时频图中除了频率 0.4699Hz 外,还出现了频率 0.6798Hz,但在稳态时频图中,该频率消失。这说明系统耦合振动过程中,索与梁在一段时间内通过一个频率进行能量交换,该频率为系统内共振时全局模态和局部模态频率之和的 1/2,这是一个非常有趣的现象。

图 8 为工况二下索跨中点、梁跨中点和索梁交

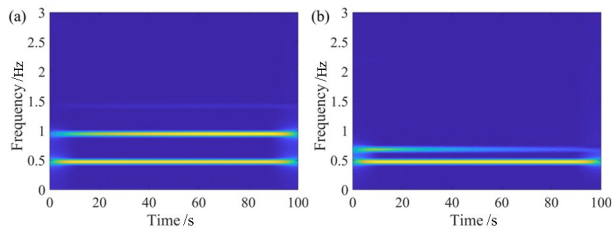


图 6 工况一瞬态时频图: (a)索跨中点; (b)梁跨中点

Fig. 6 Transient time-frequency diagram of working condition one: (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span

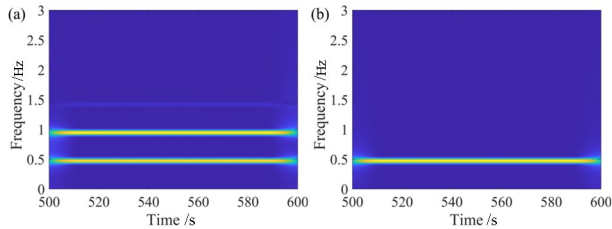


图 7 工况一稳态时频图: (a)索跨中点; (b)梁跨中点

Fig. 7 Steady-state time-frequency diagram of working condition one: (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span

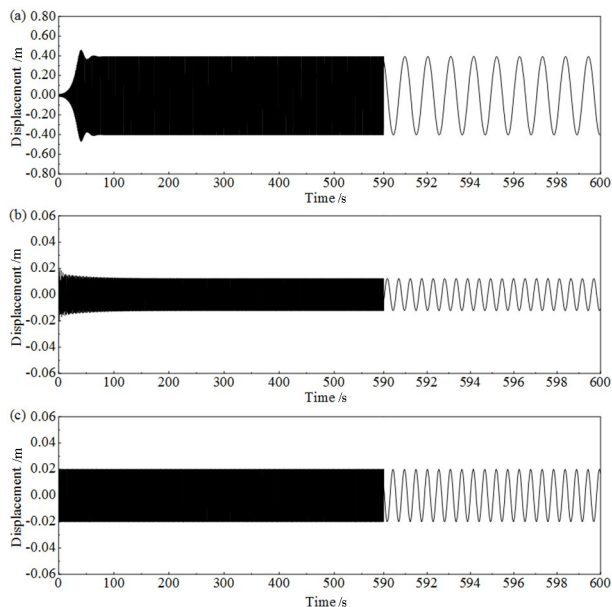


图 8 工况二时程响应图: (a)索跨中点; (b)梁跨中点; (c)索梁交点  
Fig. 8 Time history curve of condition two: (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span; (c) Intersection of cable and beam

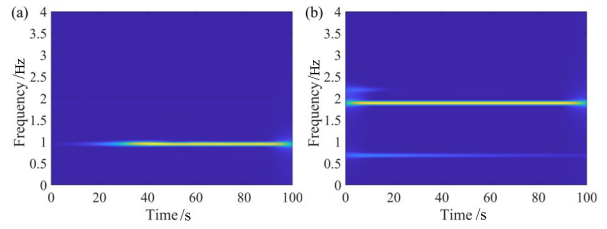


图 9 工况二瞬态时频图: (a)索跨中点; (b)梁跨中点

Fig. 9 Transient time-frequency diagram of working condition two: (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span

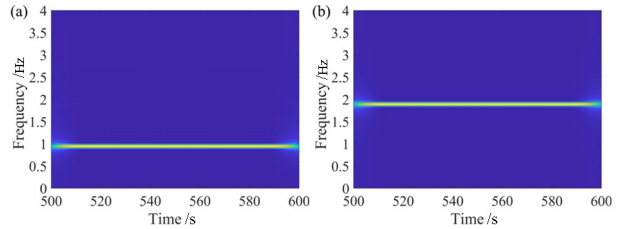


图 10 工况二稳态时频图: (a)索跨中点; (b)梁跨中点

Fig. 10 Steady-state time-frequency diagram of working condition two: (a) Midpoint of cable span; (b) Midpoint of beam span

点的时程响应图,由图可知:激励刚开始,索便迅速发生振动,达到瞬态振动的最大振幅 0.4696m,为激励幅值的 23 倍,之后经过 100s 振幅逐渐减小至稳态,幅值为 0.4031m,为激励幅值 20 倍,说明当拉索产生主参数共振时,梁的微小振动就会引起索的大幅振动,这与以往关于斜拉索参强振动的理论保持一致<sup>[21]</sup>。梁的振动幅值由大变小,最终稳态幅值为 0.0122m,小于激励幅值,说明此激励下没有激起梁的共振,梁的振幅较小。索梁交点振幅与激励幅值一致。

为更深入分析梁和索的能量传递以及共振现象,图 9、图 10 分别给出了工况二下索跨中点和梁跨中点的瞬态和稳态时频图,其中频率值通过傅里叶变换求得。

由图 9、图 10 可知:索跨中点的瞬态和稳态时频图都出现了三个频率,为 0.9398Hz、1.8896Hz 和 2.8294Hz。其中 0.9398Hz 接近索的一阶频率且与激励频率之比为 1:2,说明在该激励频率下,索发生了亚谐波共振,这与以往关于斜拉桥面内非线性振动试验的结果一致<sup>[22]</sup>。1.8896Hz 为激励频率。2.8294 Hz 接近索的三阶频率,说明索在该激励下激起了拉索 1 阶模态(局部模态)和 3 阶模态(局部模态)的 1:3 内共振。另外,激励频率接近拉索二阶模态的频率,即对拉索的二阶模态通过参强激励方式进行了主共振激励,但二阶模态的振动响应相对较小。由此,系统同时存在拉索二阶模态的主共振,一阶模态的亚谐波共振和一阶模态与三阶

模态的 1:3 内共振,而以亚谐波共振占主导。

另外,可以看到,梁跨中点的瞬态时频图中除了激励频率 1.8896Hz 外,又出现了频率 0.6798 Hz,但在稳态时频图中,该频率消失.表明虽然激励频率不同,但索与梁仍以 0.6798Hz 进行能量交换,直至达到稳态。

为研究激励频率和激振位置对索-梁结构振动响应的影响,在梁跨中和索梁交点分别以索-梁结构前五阶频率进行激振模拟,得到索的稳态响应幅值如图 11. 由图可知:梁跨中激振的稳态响应幅值明显比索梁交点激振的稳态响应幅值大,最大差值达一倍以上,说明激振位置的不同会对索-梁结构振动响应产生显著影响,这在实际工程中应引起高度重视.当激励位置在梁跨中时,最大稳态响应幅值频率为 0.9421Hz 接近索的一阶频率,说明在该激励位置下,索的一阶模态主共振是导致索产生大幅振动的原因.当激励位置在索梁交点时,最大稳态响应幅值频率为 1.8889Hz,在工况二下已经分析,索产生了亚谐波共振致使索产生大幅振动。

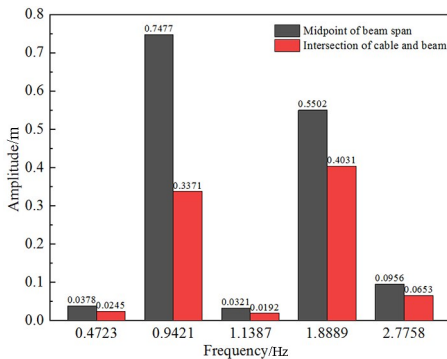


图 11 不同工况下索的稳态幅值

Fig. 11 Steady-state amplitude of cable under different working conditions

### 3 结论

本文建立了索-梁结构的有限元模型,通过对其进行模态分析以及自由振动和强迫振动的仿真研究,观察到了新的非线性振动现象,同时验证了应用有限元软件对斜拉桥非线性内共振进行仿真研究的可行性.最终得到如下结论:

(1)对比索-梁结构和悬臂梁和铰支索的固有频率和固有振型,发现索-梁结构振动表现出全局模态,局部模态以及混合模态,且索梁两者之间固有频率相互影响,对低阶频率影响较大,对高阶频率影响较小。

(2)索-梁结构在自由振动中,存在着索梁各阶模态能量的相互传递,且整个振动过程中频率有先增大后减小的趋势,最终小于真实频率。

(3)当竖向激励频率为结构的一阶频率时,可能激发全局模态与局部模态间的 1:2 内共振,且在响应中观察到与激励频率成倍数关系的谐波成分,这与理论和实验研究一致。

(4)当竖向激励频率与索的一阶频率比例接近 2:1 时,索-梁结构中索同时发生二阶模态的主共振,一阶模态的亚谐波共振,一阶和三阶模态的 1:3 内共振,以一阶模态的亚谐波共振为主导。

(5)激振位置的不同会对索-梁结构振动响应产生显著影响.当激励位置在梁跨中时,索的一阶模态主共振是导致索产生大幅振动的原因.当激励位置在索梁交点时,索的亚谐波共振是导致索产生大幅振动的原因。

### 参考文献

- [1] FUJINO Y, WARNITCHAI P, PACHECO B M. An experimental and analytical study of autoparametric resonance in a 3DOF model of cable-stayed-beam [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4(2): 111-138.
- [2] 赵跃宇, 蒋丽忠, 王连华, 等. 索-梁组合结构的动力学建模理论及其内共振分析[J]. *土木工程学报*, 2004, 37(3): 69-72+104.  
ZHAO Y Y, JIANG L Z, WANG L H, et al. The dynamical modelling theory and internal resonance of cable-beam composite structure [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2004, 37(3): 69-72+104. (in Chinese)
- [3] GATTULLI V, LEPIDI M, MACDONALD J H G, et al. One-to-two global-local interaction in a cable-stayed beam observed through analytical, finite element and experimental models [J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40(4): 571-588.
- [4] GATTULLI V, LEPIDI M. Localization and veering in the dynamics of cable-stayed bridges [J]. *Computers & Structures*, 2007, 85(21/22): 1661-1678.
- [5] WEI M H, XIAO Y Q, LIU H T, et al. Nonlinear responses of a cable-beam coupled system under parametric and external excitations [J]. *Archive of Ap-*

- plied Mechanics, 2014, 84(2): 173–185.
- [6] WANG Z Q, SUN C S, ZHAO Y B, et al. Modeling and nonlinear modal characteristics of the cable-stayed beam [J]. European Journal of Mechanics-A, 2014, 47: 58–69.
- [7] ZHANG L N, LI F C, WANG X Y, et al. Theoretical and numerical analysis of 1: 1 main parametric resonance of stayed cable considering cable-beam coupling [J]. Advances in Materials Science and Engineering, 2017, 2017: 6948081.
- [8] 丛云跃, 康厚军, 郭铁丁, 等. CFRP 索斜拉桥面内自由振动的多索梁模型及模态分析[J]. 动力学与控制学报, 2017, 15(6): 494–504.  
CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. A multiple cable-beam model and modal analysis on in-plane free vibration of cable-stayed bridge with CFRP cables [J]. Journal of Dynamics and Control, 2017, 15(6): 494–504. (in Chinese)
- [9] 吕建根, 王荣辉. 索梁结构中抗弯刚度斜拉索的非线性响应[J]. 动力学与控制学报, 2019, 17(4): 326–334.  
LV J G, WANG R H. Nonlinear response of stay cables with flexural rigidity in cable-stayed beams [J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(4): 326–334. (in Chinese)
- [10] PENG J, XIANG M J, WANG L H, et al. Nonlinear primary resonance in vibration control of cable-stayed beam with time delay feedback [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2020, 137: 106488.
- [11] SU X Y, KANG H J, GUO T D, et al. Dynamic analysis of the in-plane free vibration of a multi-cable-stayed beam with transfer matrix method [J]. Archive of Applied Mechanics, 2019, 89(12): 2431–2448.
- [12] CONG Y Y, KANG H J, YAN G R. Investigation of dynamic behavior of a cable-stayed cantilever beam under two-frequency excitations [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2021, 129: 103670.
- [13] CONG Y Y, KANG H J, GUO T D, et al. One-to-one internal resonance of a cable-beam structure subjected to a concentrated load [J]. Journal of Sound and Vibration, 2022, 529: 116915.
- [14] 孙正华, 李兆霞. 润扬斜拉桥有限元模拟及模态分析[J]. 地震工程与工程振动, 2006, 26(2): 25–32.  
SUN Z H, LI Z X. Finite element modeling and modal analysis of Runyang Cable-stayed Bridge [J]. Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2006, 26(2): 25–32. (in Chinese)
- [15] EL OUNI M H, BEN KAHLA N, PREUMONT A. Numerical and experimental dynamic analysis and control of a cable stayed bridge under parametric excitation [J]. Engineering Structures, 2012, 45: 244–256.
- [16] 王涛, 沈锐利. 基于动力非线性有限元法的索—梁相关振动研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(5): 159–167.  
WANG T, SHEN R L. Cable-beam vibration study with nonlinear dynamic FEM [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(5): 159–167. (in Chinese)
- [17] 吴庆雄, 王文平, 陈宝春. 多索—梁结构固有振动特性分析[J]. 工程力学, 2017, 34(1): 109–116+129.  
WU Q X, WANG W P, CHEN B C. Natural vibration analysis of multi-cables-stayed beam structures [J]. Engineering Mechanics, 2017, 34(1): 109–116+129. (in Chinese)
- [18] 康厚军, 郭铁丁, 赵跃宇. 大跨度斜拉桥非线性振动模型与理论研究进展[J]. 力学学报, 2016, 48(3): 519–535.  
KANG H J, GUO T D, ZHAO Y Y. Review on nonlinear vibration and modeling of large span cable-stayed bridge [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2016, 48(3): 519–535. (in Chinese)
- [19] GATTULLI V, MORANDINI M, PAOLONE A. A parametric analytical model for non-linear dynamics in cable-stayed beam [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2002, 31(6): 1281–1300.
- [20] 康厚军, 赵跃宇, 杨相展. 弯斜拉桥中索的主共振研究[J]. 工程力学, 2008, 25(11): 86–91.  
KANG H J, ZHAO Y Y, YANG X Z. Research on primary resonance of cables in curved cable-stayed bridge [J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(11): 86–91. (in Chinese)
- [21] 康厚军, 赵跃宇, 蒋丽忠. 参数振动和强迫振动激励下超长拉索的面内非线性振动[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2011, 42(8): 2439–2445.  
KANG H J, ZHAO Y Y, JIANG L Z. In-plane nonlinear vibration of super long stay cables under

- parametric and forced excitations [J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2011, 42(8): 2439–2445. (in Chinese)
- [22] 陈杰夫, 康厚军, 苏潇阳, 等. 谐波激励下斜拉桥面内非线性振动试验研究 [J]. *固体力学学报*, 2019, 40(3): 248–259.
- CHEN J F, KANG H J, SU X Y, et al. Experimental study on the in-plane nonlinear vibration of a cable-stayed bridge subjected to a harmonic excitation [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2019, 40(3): 248–259. (in Chinese)